

Exercices de révision

Exercice 1 :

Résoudre les systèmes suivants dans \mathbb{Z} :

- $$\begin{cases} x \equiv 2 & [5] \\ x \equiv 3 & [9] \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 2x \equiv 3 & [21] \\ 5x \equiv 2 & [8] \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x \equiv 7 & [9] \\ 3x \equiv 6 & [11] \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soient K et L deux corps, et $f : K \rightarrow L$ un morphisme d'anneaux.

- Montrer que $f(x)$ est inversible pour tout $x \in K$ non-nul et déterminer $f(x)^{-1}$.
- En déduire que tout morphisme de corps est injectif.

Exercice 3 :

Soit $(A, \times, +)$ un anneau.

- Monter que l'application $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow A$ définie par $\varphi(k) = k \cdot 1_A$ est un morphisme d'anneaux.
- Justifier qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $\ker(\varphi) = n\mathbb{Z}$.

Cet entier n est appelé la caractéristique de l'anneau A .

- Justifier que la caractéristique d'un corps est nulle ou égale à un nombre premier.

Exercice 4 :

Quel est l'ordre de $\bar{9}$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 5 :

Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

- Donner la liste de tous les éléments de G .
- Pour tout $a \in G$, déterminer le sous-groupe $\langle a \rangle$ engendré par a .
- (G, \cdot) est-il un groupe cyclique ?

Exercice 6 :

Montrer que $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$ et que $\varphi(3n) = 2\varphi(n)$ si et seulement si $n \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Exercice 7 :

Construire un isomorphisme entre les groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et $(U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}, \times)$.