# TD $n^\circ 1$

**Exercice 1 :**

Démontrer que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$f(n) : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Exercice 2 :**

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

**Exercice 3 :**

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

**Exercice 4 :**

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

**Exercice 5 :**

Soit $x$ et $y$ deux entier. Montrer que $2x + 3y$ est divisible par 7 si et seulement si $5x + 4y$ l'est.

**Exercice 6 :**

Soit $x$ et $y$ deux entier. Montrer que $2x + 3y$ est divisible par 7 si et seulement si $5x + 4y$ l'est.

**Exercice 7 :**

Pour quels entiers $n$ strictement positifs, le nombre $n^2 + 1$ divise-t-il $n + 1$ ?

**Exercice 8 :**

(1) Déterminer les nombres entiers $n$ tels que $2n - 5$ divise 6.
(2) Déterminer les nombres entiers $n$ tels que $n + 8$ soit divisible par $n$.

**Exercice 9 :**

Un triplet $(a, b, c) \in \mathbf{N}^\times$ est dit triplet pythagoricien s'il existe un triangle rectangle dont la mesure des côtés est $a, b$ et $c$. En d'autres termes, $a, b$ et $c$ vérifient la relation :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(1) Donnez quelques valeurs possibles de $a, b$ et $c$.
(2) Montrer que l'un au moins des trois nombres $a, b$ et $c$ est pair.