

TD $n^{\circ}3$

Exercice 1 :

Soient a, b , et n trois entiers non nuls. Supposons que a et b divisent n et que a et b sont premiers entre eux. En utilisant le lemme de Gauss, montrer que ab divise n .

Exercice 2 :

Montrer que le produit de 5 nombres consécutifs est divisible par 120.

Exercice 3 :

Montrer que pour tout entier naturel n , $5n^2(n^2 + 11)$ est un multiple de 30.

Exercice 4 :

Déterminer l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z}^2 des équations diophantiennes suivantes :

- (1) $42x + 26y = 2$
- (2) $11x + 21y = 3$
- (3) $15x + 9y = 14$
- (4) $616x + 585y = 12$

Exercice 5 :

Déterminer le PGCD de 65 et 91 puis résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $65x = 91$

Exercice 6 :

Soit p un nombre premier et a, b deux entiers naturels.

- (1) Montrer que si p divise a^n alors p divise n .
- (2) Montrer que si p divise ab et que a et b sont des nombres premiers, alors $p = a$ ou $p = b$.

Exercice 7 :

- (1) Décomposer les nombres 6120 et 5712 en produits de facteurs premiers. En déduire le PGCD et le PPCM de ces deux nombres.
- (2) Décomposer les nombres 2622 et 2530 en produits de facteurs premiers. En déduire le PGCD et le PPCM de ces deux nombres.

Exercice 8 :

Soient a, b deux entiers. Montrer que a divise b si et seulement si pour tout nombre premier p , $v_p(a) \leq v_p(b)$

Exercice 9 :

Soient a, b deux entiers. Montrer que a divise b si et seulement si a^2 divise b^2 .

Exercice 10 :

Soient a, b deux entiers. Montrer que $\text{pgcd}(a^d, b^d) = \text{pgcd}(a, b)^d$.

Exercice 11 :

Déterminer les valuations p -adiques suivantes : $v_2(17)$, $v_2(32)$, $v_5(35)$, $v_3(111)$.