# TD $n^\circ 4$

**Exercice 1 :**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les fractions $\frac{21n+4}{14n+3}$ et $\frac{n^3+n}{2n^2+1}$ sont irréductibles.

**Exercice 2 :**

L'entier 193 est-il inversible modulo 2014 ? Si oui, calculer son inverse.

**Exercice 3 :**

On veut déterminer les solutions entière de l'équation :

$$x^2 - 13y^2 = 7$$

Soit donc $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de cette équation.

1. Montrer que ni $x$ ni $y$ n'est divisible par 7.
2. Montrer que $x^2 \equiv -y^2 \mod 7$.
3. En déduire que $-1$ est un carré modulo 7 (c'est à dire qu'il existe un entier $n$ tel que $n^2 \equiv -1 \mod 7$).
4. Déterminer les carrés modulo 7, en déduire que l'équation n'admet pas de solutions entières.

**Exercice 4 :**

Soit $E$. On considère $S(E) = \{\sigma : E \to E \mid \sigma \text{ est bijective}\}$ l'ensemble des bijections de $E$ sur $E$ et $\circ$ l'opération de composition de deux fonctions. Montrer que $(S(E), \circ)$ est un groupe et qu'il est non commutatif si $E$ a au moins trois éléments.

**Exercice 5 :**

Montrer que $\mu_\infty = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ tel que } z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

**Exercice 6 :**

Soit $a \in \mathbb{Z}$, montrer que l'ensemble $a\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

**Exercice 7 :**

Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de $G$ $H$ et $K$ est un sous-groupe de $G$.