TD $n^\circ 5$

Exercice 1 :

Soit G un groupe, $x, y \in G$ tels que $x^3y = yx^3$ et $x^5 = 1$. Montrer que $xy = yx$.

Exercice 2 :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe tels que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 3 :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G :

(1) $C(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\ xy = yx\}$.

(2) $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ où $a \in G$ et H est un sous-groupe de G.

(3) On suppose que G est abélien. On dit que x est un élément de torsion de G s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e$. Démontrer que l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G.

Exercice 4 :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $x, y \in G$ tels que :

$$x^2 = 1, \quad y^2 = 1, \quad xy = yx, \quad x \neq 1, \quad x \neq y, \quad xy \neq e$$

Déterminer le cardinal du groupe H engendré par $\{x, y\}$.

Exercice 5 :

Soit G un groupe tel que l'application $x \mapsto x^{-1}$ soit un morphisme. Montrer que G est commutatif.

Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$. Montrer que f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même.

Exercice 7 :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour $a \in G$, on note t_a l'application de G dans G définie par $t_a(x) = axa^{-1}$.

— Montrer que t_a est un morphisme du groupe $(G, \cdot)$ dans lui-même.

— Vérifie que $t_{ab} = t_a \circ t_b$.

— Montrer que t_a est bijective et déterminer son application réciproque.

— En déduire que $(G) = \{t_a \mid a \in G\}$ muni de la composition est un groupe.

Exercice 8 :

Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même. Lesquels sont injectifs, surjectifs ?