TD $n^{\circ}6$

Exercice 1 :

Supposons que $(G, \cdot)$ est un groupe fini d'ordre un nombre premier. Montrer que les seuls sous-groupes de G sont G et $\{1\}$.

Exercice 2 :

Montrer que $(\mathbb{Z}^2/\langle(0,1)\rangle, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 3 :

Montrer que $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 4 :

Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 5 :

Monter que le groupe quotient $(\mathbb{Z}^2/\langle(1,5)\rangle, +)$ est engendré par l'élément $\overline{(1,0)}$.

Exercice 6 :

Soit d un diviseur de n. Montrer que le morphisme de réduction :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ a \bmod n &\mapsto a \bmod d \end{aligned}$$

est bien défini et surjectif. Quel est son noyau ?

Exercice 7 :

Soit $n \geq 1$ un entier et $k \in \mathbb{Z}$.Montrer que $\overline{k}$ est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si $\mathrm{PGCD}(k, n) = 1$.

Exercice 8 :

Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ sont tous les deux commutatifs et de cardinal égal à 4 mais ne sont pas isomorphes.