TD $n^{\circ}7$

Exercice 1 :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien fini et soit $P = \prod_{g \in G} g$ le produit de ses éléments. Montrer que l'on a $P^2 = 1$. Calculer P si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 2 :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et $x, y \in G$. On suppose qu'il existe $g \in G$ tels que $x = gyg^{-1}$. Montrer que x et y ont le même ordre.

Exercice 3 :

Soient $(G_1, \cdot)$ et $(G_2, \cdot)$ deux groupes fini. Soit $(x, y) \in G_1 \times G_2$ un élément du groupe produit. Montrer que $\text{ord}_{G_1 \times G_2}((x, y)) = \text{PPCM}(\text{ord}_{G_1}(x), \text{ord}_{G_2}(y))$.

Exercice 4 :

Montrer que tout groupe fini d'ordre p est cyclique.

Exercice 5 :

Montrer que tout sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$ est cyclique.

Exercice 6 :

Soit A un anneau tel que pour tout $a, b \in A$, on a $(ab)^2 = a^2b^2$. Montrer que A est commutatif.

Exercice 7 :

Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Exercice 8 :

Trouver tous les idéaux de $\mathbb{Z}$.

Exercice 9 :

Un idéal I d'un anneau commutatif A est dit premier s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. $I \neq A$.
2. $\forall x, y \in A$, si $xy \in I$ alors soit $x \in I$ ou $y \in I$.

Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.