# Multiplicités galoisiennes

Stefano Morra

9 Octobre 2009

## Table des matières



# 1 Anneaux de déformation universelle

Dans cette section, on va introduire l'object de base qui permet de donner la notion de "multiplicité galoisienne". Les réferences serons l'article de Schlessinger [13], les articles de Mazur [10] et Lenstra [8], ainsi que la thèse de Ariane Mézard [11].
C'est important de remarquer que les notions qui suivent ("déformation", la catégorie $\mathscr{C}$) ne sont que de cas particuliers d'une theorie plus abstraite.

## 1.1 Le foncteur de déformation

Dans la suite, soit $p$ un nombre premier, $k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_q$ avec $q \stackrel{\text{def}}{=} p^f$ pour $f \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers d'une extention $E$ de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, de corps residuel $k$ (en particulier, si $E$ est non ramifié, $\mathcal{O}_E$ est l'anneau des vecteurs de Witt associé à $k$).
On va définir la categorie $\widehat{\mathcal{C}}$ de la manière suivante :

*i)* les objets de $\widehat{\mathscr{C}}$ sont des $\mathcal{O}_E$-algèbres noetheriens locales $(A, \mathfrak{m}_A)$ qui sont séparées et complétes pour la topologie $\mathfrak{m}_A$-adiques, de corps résiduel $k \cong A/\mathfrak{m}_A$ ;

*ii)* Si $(A, \mathfrak{m}_A)$, $(A', \mathfrak{m}_{A'})$ sont deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, un morphisme $A \to A'$ est un morphisme local de $\mathcal{O}_E$-algèbres.

Définissons enfin $\mathscr{C}$, la sous categorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ dont les objets sont les éléments $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$ tels que la dimension de Krull est nulle : $\dim(A) = 0$.

Par exemple, $\mathcal{O}_E[[X]] \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$ et $k[\epsilon] \stackrel{\text{def}}{=} k[[X]]/(X^2) \in \mathcal{O}b(\mathscr{C})$.

Fixons maintenant une représentation continue de dimension $n$ sur $k$

$$\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(k).$$

On va définir le foncteur de déformation associé

$$\mathrm{Def}(\overline{\rho}, \bullet) : \widehat{\mathscr{C}} \to \mathscr{E}ns$$

de la maniére suivante.

Soit $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$ ; une *déformation de* $\overline{\rho}$ *dans* $A$ est la donné de la famille des $A$-représentations $\rho$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \arrow[r, "\overline{\rho}"] \arrow[dr, "\rho"] & \mathrm{GL}_n(k) \\ & \mathrm{GL}_n(A) \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

soit commutatif, modulo la relation d'equivalence $\rho \sim \rho'$ ssi il existe $M \in \ker(\mathrm{GL}_n(A) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_n(k))$ avec $\rho(g) = M^{-1} \cdot \rho'(g) \cdot M$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ [1]

.

Si $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$, $\mathrm{Def}(\overline{\rho}, A)$ est enfin l'ensemble des déformations de $\overline{\rho}$ dans $A$.

Si $A \xrightarrow{\phi} A' \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(A, A')$ est un morphisme dans $\widehat{\mathscr{C}}$, on définit

$$\begin{array}{rcl} \phi_* : \mathrm{Def}(\overline{\rho}, A) & \to & \mathrm{Def}(\overline{\rho}, A') \\ [\rho]_\sim & \mapsto & [\phi_1 \circ \rho]_\sim \end{array}$$

(où $\phi_1 : \mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_n(A')$ est le morphisme induit par $\phi$) ; on verifie que c'est une bonne définition, ce qui donne un foncteur $\mathrm{Def}(\overline{\rho}, \bullet) : \widehat{\mathscr{C}} \to \mathscr{E}ns$.

Le fait le plus important concernant le foncteur de déformation est le suivant :

**Proposition 1.1** *Le foncteur* $\mathrm{Def}(\overline{\rho}, \bullet) : \widehat{\mathscr{C}} \to \mathscr{E}ns$ *est continu, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Def}(\overline{\rho}, A) = \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{Def}(\overline{\rho}, A/(\mathfrak{m}_A)^n)$$

1. la flèche $\mathrm{GL}_n(A) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$ est cela induite par la projection $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}_A$

*pour tout object* $A \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$.

**Preuve :**Omissis. Cf.[10], §20, proposition 1. ♯

Par consequent, d'après la définition de limite projectif

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(A, A') = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(A, A'/(\mathfrak{m}_{A'})^n)$$

on pourra donc se limiter à la sous-catégorie $\mathscr{C}$ pour l'etude de la représentabiliré du foncteur de déformation.

## 1.2 Déformations universelles

Notations comme dans §1.1

Soit $F : \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ un foncteur ; on va définir un foncteur $\widehat{F} : \widehat{\mathscr{C}} \to \mathscr{E}ns$ de la manière suivante.

Soit $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$ ; on a donc le système projectif $\{A/(\mathfrak{m}_A)^n\}_{n\geq 1}$ dans $\mathscr{C}$. On pose alors,

$$\widehat{F}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{n\geq 1} F(A/(\mathfrak{m}_A)^n).$$

Si $A \stackrel{\phi}{\to} A' \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(A, A')$, alors, dés que $\phi$ est un morphisme d'anneaux locaux, on obtient des morphismes $\phi_n : A/(\mathfrak{m}_A)^n \to A'/(\mathfrak{m}_{A'})^n$ qui donnent un morphisme de systèmes projectifs :

$$\{\phi_n\}_{n\geq 1} : \{A/(\mathfrak{m}_A)^n\}_{n\geq 1} \quad \to \quad \{A'/(\mathfrak{m}_{A'})^n\}_{n\geq 1}$$

et on définit

$$\widehat{F}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{n\geq 1} F(\phi_n).$$

Clairement, on a $\widehat{F}|_{\mathscr{C}} = F$.

**Définition 1.1** *On dit que le foncteur* $F$ *est* pro-représentable *si le foncteur* $\widehat{F} : \widehat{\mathscr{C}} \to \mathscr{E}ns$ *est représentable.*

Grâce à Yoneda, pour tout $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$ on a un isomorphisme canonique

$$\Phi : \widehat{F}(A) \quad \stackrel{\sim}{\to} \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}}(\mathrm{h}_A, \widehat{F})$$

(où $h_A \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(A, \bullet)$).

**Définition 1.2** *Une* pro-couple *est la donné d'une couple* $(A, \xi)$*, avec* $A \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$*,* $\xi \in \widehat{F}(A)$*.*
*Un morphisme de procouple* $(A, \xi) \to (A', \xi')$ *est la donné d'un morphisme* $u \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(A, A')$ *tel que le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{h}_{A'} \arrow[r, "\Phi(\xi')"] \arrow[d, "\_\circ u"'] & \widehat{F} \\ \mathrm{h}_A \arrow[ur, "\Phi(\xi)"'] & \end{tikzcd}$$

*soit commutatif. On dit que le foncteur* $F$ *admet une* déformation universelle *s'il existe une pro-couple* $(A, \xi)$ *telle que*

$$\Phi(\xi)|_{\mathscr{C}} : \mathrm{h}_A|_{\mathscr{C}} \to F$$

*soit un isomorphisme. On dit alors que* $A \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$ *est un anneau de déformation universelle pour* $F$ *(et* $\xi$ *est appelée la déformation universelle de* $\overline{\rho}$ *à* $A$*).*

Notons que si $F$ admet une déformation universelle, alors $F$ est en particulier pro-représentable ; plus précisement, on pourra parler de *l'* anneau de déformation universelle :

**Lemme 1.1** *Si* $F$ *admet une déformation universelle, alors la pro-couple* $(A, \xi)$ *est unique, à unique isomorphisme près.*

**Preuve :**Omissis. Cf. [13], §2.8. $\sharp$

**Remarque 1.1** On dispose aussi de la notion de *déformation verselle,* qui est definie par des condition plus faibles sur le morphisme $\mathrm{h}_A|_{\mathscr{C}} \to F$. Dans ce cas, une deformation verselle pour $F$ est unique à isomorphisme près (mais l'isomorphisme n'est pas canonique). Cf. [13], §2.7.

On dispose du résultat suivant pour déterminer si un foncteur $F$ admet une déformation universelle :

**Théorème 1.1 (Critère de Schlessinger)** *Soit* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ *tel que* $F(k) = \{*\}$ *(un singleton). Étant donnés deux morphismes dans* $\mathscr{C}$*,* $u_1 : A' \to A$ *et* $u_2 : A'' \to A$*, soit*

$$\theta : F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'')$$

*le morphisme canonique.*
1) $F$ *admet une deformation verselle ssi* $F$ *verifie les proprietés suivantes :*
$H1)$ *pour tout* $u_2 : A'' \to A$ *petite extention,* $\theta$ *est surjectif;*
$H2)$ *si* $A = k$*,* $A'' = k[\epsilon]$*, alors* $\theta$ *est bijectif;*

*H*3) $\dim_k(F(k[\epsilon])) < \infty$.

2) *F admet une deformation universelle ssi F verifie les proprietées* $H1), H2), H3)$ *et*

*H*4) *si* $u_1 : A' \to A$ *est une petite extention, alors*

$$\theta : F(A' \times_A A') \to F(A') \times_{F(A)} F(A')$$

*est bijectif.*

**Remarque 1.2** *i*) Une extention abelienne est la donnée d'un morphisme surjectif $u : A' \to A$ dans $\widehat{\mathscr{C}}$, telle que $\ker(u)\mathfrak{m}_{A'} = 0$. Si, de plus, $\ker(u)$ est principal, on dit que l'extention (abelienne) $u$ est petite.
On montre alors que la condition $H1)$ du critère 1.1 est equivalent à que $\theta$ soit surjectif lorsque $u_1$ est surjectif (cf. [13], 2.14).

*ii*) On montre que la condition $H2)$ permet de munir $F(k[\epsilon])$ d'une structure canonique de $k$- espace vectoriel (cf. [13], lemme 2.10).

On arrive à la conclusion de la section, avec le

**Théorème 1.2** *Si* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(k)$ *est continue, et* $\dim_k \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}(\overline{\rho}) = 1$, *alors,* $\mathrm{Def}(\overline{\rho}, \bullet)$ *admet une deformation universelle.*

**Preuve :** Omissis. Cf. [10], proposition 2, et [12]. $\sharp$

## 1.3 Quelques remarques autour de la preuve du critère de Schlessinger

Soit donc $F$ vérifiant les hypothèses $H1), H2), H3)$ de l'enoncé du théorème 1.1, $d \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k(F(k[\epsilon]))$. Posons $S \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_E[[X_1, \ldots, X_d]]$ et $\mathfrak{m}_S$ son ideal maximal. Dans [13], on montre que l'anneau de deformation (uni)versel est en fait de la forme $S/J$ pour un "ideal des rélations" convenable, par un argument de recurrence.

Le premier pas consist à définir $J_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{m}_S^2 + (\varpi_E)$ (où $\varpi_E \in \mathcal{O}_E$ est un uniformisante fixé) et $R_1 \stackrel{\text{def}}{=} S/J_1$. Alors, grâce à l'hypothèse $H1)$, on montre l'existence d'une déformation $\xi_1 \in F(k[\epsilon])$ qui induit un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(R_1, k[\epsilon]) \to F(k[\epsilon])$.

Supposons que l'on ait définit une couple $(R_q, \xi_q)$ avec $R_q = S/J_q$ (pour un ideal convenable $J_q \leq S$) et $\xi_q \in F(R_q)$. Grâce à $H1)$, on montre alors qu'il existe un ideal $J_{q+1} \leq S$ tel que $\mathfrak{m}_S J_q \leq J_{q+1} \leq J_q$ et que $\xi_q$ admet un relevement à un $\xi_{q+1} \in F(S/J_{q+1})$ via la projection canonique $R_{q+1} \stackrel{\text{def}}{=} S/J_{q+1} \twoheadrightarrow R_q$, et $J_{q+1}$. est minimale par rapport à ces deux proprietées.

Enfin, on pose $J \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{q \in \mathbb{N}} J_q$, et $R \stackrel{\text{def}}{=} S/J$. La démonstation conclut en verifiant que $R = \varprojlim_{q \in \mathbb{N}} R_q$ et que la couple $(R, \varprojlim_{q \in \mathbb{N}} \xi_q)$ est une déformation verselle (et universelle si de plus $F$ verifie $H4)$).

Si $F = \mathrm{Def}(\overline{\rho}, \bullet)$ est de plus un foncteur de déformation, on peut décrire de manière plus explicite l'ideal des relations $J$.

**Problème d'obstruction.** Soit $\rho$ un représentant d'une déformation de $\overline{\rho}$ à $A \in \mathcal{O}b(\mathscr{C})$, et $\psi : A' \to A$ une extention abelienne de noyau $I$. Alors (cf. [11], chapitre 1, §3) le problème de relever $\rho$ à une déformation $\widetilde{\rho}$ (i.e. de trouver une déformation $\widetilde{\rho}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ à $A'$ de telle sorte que $\rho = \psi_1 \circ \widetilde{\rho}$, avec $\psi_1 : \mathrm{GL}_n(A') \to \mathrm{GL}_n(A)$ le morphisme induit par $\psi$) donne un element $\mathrm{obs}_\rho(\psi) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), M_n(k)) \otimes_k I$ (la *classe d'obstruction*) de telle sorte que $\mathrm{obs}_\rho(\psi) = 0$ implique l'existence d'un relevement $\widetilde{\rho}$.

**La $n$-versalité.** Soit $n \geq 1$. Un object $A \in \mathcal{O}b(\mathscr{C})$ est dit d'ordre $\leq n$ si

$$\mathfrak{m}_A^{n+1} = 0 = \varpi_E \mathfrak{m}_A^{n-1};$$

on définit $\mathscr{C}_n$, la sous-categorie pleine de $\mathscr{C}$ dont les objects sont d'ordre $\leq n$.

Si $A \in \mathcal{O}b(\widehat{\mathscr{C}})$, on définit le tronqué d'ordre $n$ :

$$\tau_{\leq n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} A/(\mathfrak{m}_A^{n+1} + \varpi_E \mathfrak{m}_A^{n-1}) \in \mathcal{O}b(\mathscr{C}_n);$$

si $[\rho]_\sim \in \mathrm{Def}(\overline{\rho}, A)$, on note $\tau_{\leq n}([\rho]_\sim) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Def}(\overline{\rho}, \tau_n)([\rho]_\sim)$ où $\tau_n : A \to \tau_{\leq n}(A)$ désigne la projection canonique.

Une pro-couple est dite *$n$-verselle* si

*i)* la trasformation naturelle $\mathrm{h}_{\tau_{\leq n}(R)} \to \mathrm{Def}(\overline{\rho}, \bullet)|_{\mathscr{C}_n}$ de foncteurs sur $\mathscr{C}_n$ induit par $\tau_{\leq n}(\xi)$ via Yoneda est lisse [2] ;

*ii)* la couple $(\tau_{\leq 1}(R), \tau_{\leq 1}(\xi))$ est 1-universelle : le morphisme naturel $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(\tau_{\leq 1}(R), \bullet) \to \mathrm{Def}(\overline{\rho}, \bullet)|_{\mathscr{C}_1}$ de valuation en $\tau_{\leq 1}(\xi)$ est bijectif.

**Construction de l'ideal des relations.** Prenons $S \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_E[[X_1, \ldots, X_d]]$ avec $d \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k(\mathrm{Def}(\overline{\rho}, k[\epsilon]))$ et posons $J_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{m}_S^{n+1} + \varpi_E \mathfrak{m}_S^{n-1}$ pour $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$ on définit par recurrence une suite de couples $n$-verselles $(R_n, \xi_n)$ avec $R_n \stackrel{\text{def}}{=} S/I_n$ et $I_n \stackrel{\text{def}}{=} J_n + \langle F_1^{(n+1)}, \ldots, F_r^{(n+1)} \rangle$ (avec $r \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k(\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), M_n(k))))$ de manière que

*i)* $F_j^{(n)}, F_j^{(n-1)} \in S$ ont même image dans $S/J_{n-1}$ (via la projection canonique) ;

*ii)* via la projection $\pi_n : R_n \to R_{n-1}$ (bien definie grâce à *i)*), on a $\mathrm{Def}(\overline{\rho}, \pi_n)(\xi_n) = \xi_{n-1}$.

Alors, grâce à l'hypothèse $H1$), on montre l'existence d'une couple 1-verselle $(R_1, \xi_1)$ avec $I_1 = J_1$ et $F_j^{(1)} = 0$ (cf. [11], chapitre 1, exemple 3.2.6).

2. une trasformation naturelle $\theta : F \to G$ entre des foncteurs $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ est dite *lisse* si pour tout surjection $A \twoheadrightarrow B$ dans $\mathscr{C}$ le morphisme canonique $F(A) \to F(B) \times_{G(B)} G(A)$ est surjectif.

Supposons d'avoir une couple (avec les proprietés plus haut) $(R_n, \xi_n)$ ; pour construir la couple $(R_{n+1}, \xi_{n+1})$, on considère la projection $\psi_n : \widetilde{R_n} \stackrel{\text{def}}{=} S/(\mathfrak{m}_S I_n) \to R_n$. Si l'on fixe une $k$-base $\omega_1, \ldots, \omega_r$ de $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), M_n(k))$, on a $\mathrm{obs}_{\xi_n}(\psi_n) = \sum_{j=1}^r \omega_j \otimes u_j$ pour des elements $u_1, \ldots, u_r \in I_n$ qui sont bien definis modulo $\mathfrak{m}_S I_n$, et on définit

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{m}_S I_n + \langle u_1, \ldots, u_r \rangle.$$

Dans le point succesif on montre que $R_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} S/I_{n+1} \in \mathcal{O}b(\mathscr{C}_n)$, que $\xi_n$ se relève à un $\xi_{n+1} \in \mathrm{Def}(\overline{\rho}, R_{n+1})$ et, grâce à l'hypothese $H1$), que la couple ainsi obtenue est bien $n+1$-verselle (cf. [11], chapitre 1, pagg. 25-26, en particulier le lemme 3.3.4).
De plus, avec des arguments élémentaires (cf. [11], chapitre 1, §3.3.5 et 3.3.6), on montre que $I_{n+1}$ admet une ecriture $I_{n+1} = J_{n+1} + \langle F_1^{(n+1)}, \ldots, F_r^{(n+1)} \rangle$.
Enfin, on verifie que la couple $(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} R_n, \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \xi_n)$ est verselle (universelle si de plus l'on a $H4$)) et que $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} R_n = S/\langle F_1, \ldots, F_r \rangle$ avec $F_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} F_i^{(n)}$.

**Remarque 1.3** La preuve de l'existence de la déformation (uni)verselle pour le foncteur de déformation est en fait une re-lecture de la preuve que l'on trouve dans [14], §7 ; mais Vistoli travaille avec de déformations dans un contexte "schématique", et il faut faire un peu d'attention pour re-adapter sa preuve dans le contexte des représentations galoisiennes.

# 2 Sur quelques représentation de Weil-Deligne

Le but de cette section est de donner un sense à l'expression "la représentation de Weil-Deligne associé à une représentation $p$-adique potentiellement semi-stable de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$".
Pour cela, on va se limiter aux notions et resultats fondamentaux, sans aucune prétention de exhaustivité.

## 2.1 Anneaux de périods $p$-adiques

Les réferences pour ce paragraphe sont [1], et [4].

**L'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$.** Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cong \varprojlim_{n\geq 1} \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]/(\omega)^n$ (avec $\omega$ un generateur du noyay de $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$), tout elelment $x \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ s'écrit (de manière pas unique) comme $x = \sum_{j=0}^\infty b_j \omega^j$. On définit

$$\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \text{ t.q. } x \text{ admet une ecriture de la forme } x = \sum_{j=0}^\infty \frac{b_j}{j!}\omega^j \text{ avec } b_j \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+,\ \lim_{j\to\infty} b_j = 0\}$$

qui est bien un sous-anneau de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$.

Enfin, on pose $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{+}[\frac{1}{t}]$ où $t \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est le $2\pi i$ de Fontaine. Les choses les plus important sur l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ sont resumés dans le

**Lemme 2.1** *L'anneau* $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ *jouit des proprietés suivantes :*

*i) il est muni d'une action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$

*ii) il est muni d'un Frobenius* $\phi$ *compatible à l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *;*

*iii) il est muni d'une filtration, compatible à l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *;*

*iv) si* $F/\mathbb{Q}_p$ *est galois et finie, on a* $(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)} = F_0$ *où* $F_0$ *designe l'extention non ramifiée maximale de* $F$ *dans* $\overline{\mathbb{Q}_p}$*.*

Preuve :Omissis. Cf. [4], §7, ou [7], §2.2. ♯

**L'anneau** $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}$**.** Définissons

$$\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}[Y]$$

(l'anneau des polynômes en une indéterminate). On dispose d'un Frobenius , en posant $\phi(Y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} pY$. Les proprietées les plus important qui concernent l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}$ sont resumés dans le

**Lemme 2.2** *L'anneau* $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}$ *jouit des proprietées suivantes :*

*i) il est muni d'une action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *;*

*ii) si* $F/\mathbb{Q}_p$ *est galois et finie, on a* $(\mathrm{B}_{\mathrm{st}})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)} = F_0$ *où* $F_0$ *designe l'extention non ramifiée maximale de* $F$ *dans* $\overline{\mathbb{Q}_p}$ *;*

*iii) il est muni d'un operateur* $N$ *(la* monodromie*), tel que* $N \circ \phi = p\phi \circ N$ *;*

*iv) si l'on pose*

$$\log[\widetilde{p}] \stackrel{def}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{[\widetilde{p}]}{p})^{n-1} \frac{1}{n} \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$$

*alors la position* $Y \mapsto \log[\widetilde{p}]$ *permet de définir un morphisme injectif* $\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \hookrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ *qui est* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *équivariant et* $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$*-lineaire.*

**Preuve :** Omissis. Cf. [4], §7 et [7], §2.2. ♯

## 2.2 Représentations semi-stables et potentiellement semi-stables

Dans la suite, soient $E, F$ des extentions finies de $\mathbb{Q}_p$. Notons que l'espace de invariant sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ de la représentation produit tensoriel $\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes \rho$ est muni d'une structure naturelle de $F_0$-espace vectoriel (grâce au lemme 2.2-*ii*)) ; on pourra donner donc la

**Définition 2.1** *On dit que une representation continue* $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(E)$ *est semistable sur* $F$ *si*

$$\dim_{F_0}(\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)} = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\rho).$$

*On pose alors* $D_{\mathrm{st},F}(\rho) \overset{def}{=} (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)}$.

**Remarque 2.1** En general, on n'a que l'inegalité

$$\dim_{F_0}(\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)} \leq \dim_{\mathbb{Q}_p}(\rho),$$

cf. [2], lemme 3.1.2, qui permet de montrer aussi que si $\rho$ est semistable sur $F$, alors elle est semistable sur $F'$ extention de $F$.

Plus en génŕal, une representation $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(E)$ est dite *potentiellement semistable* s'il existe une extension finie $F$ de $\mathbb{Q}_p$ telle que $\rho$ soit semistable sur $F$.

Soit donc $\rho$ une $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-représentation sur $E$, potentiellement semistable sur $F$.

**Lemme 2.3** *Le* $F_0$*-espace vectoriel* $D_{\mathrm{st},F}(\rho)$ *jouit des proprietées suivantes :*

*i) c'est un* $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$*-module, libre de rang* $\dim_E \rho$ *;*

*ii) il est muni d'un automorphisme* $\phi$ *qui est* $F_0$ *semilineaire*[3] *et* $E$*-lineaire ; ainsi que d'un automorphisme nilpotent et* $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$*-lineaire* $N$ *; on a* $N \circ \phi = p \cdot \phi \circ N$ *;*

*iii) si* $F/\mathbb{Q}_p$ *est galoisienne, il est muni d'une action de* $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}_p)$*, qui rend* $\phi$ *et* $N$ *des automorphismes équivariants, et chaque* $g \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}_p)$ *définit un automorphisme qui est* $F_0$*-semilineaire et* $E$*-lineaire.*

**Preuve :** Omissis. Cf. [5], appendice $B$, et [3], §2.2.

On va munir $D_{\mathrm{st},F}(\rho)$ d'une action du groupe de Weil $W_{\mathbb{Q}_p} \overset{\mathrm{def}}{=} W(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de la manière suivante. Soit $g \in W_{\mathbb{Q}_p}$ ; alors $g \bmod W(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \in W_{\mathbb{Q}_p}/W(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \cong \mathrm{Gal(F/\mathbb{Q}_p)}$ et $g \bmod \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}} = (\mathrm{Frob})^{\alpha(g)} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ pour un $\alpha(g) \in \mathbb{Z}$ convenable.
L'action de $g$ est alors donnée par $(g \bmod W(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)) \circ (\phi^{-1})^{\alpha(g)}$ ; on montre que s'agit d'une bonne définition et que l'action ainsi définie est $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-lineaire et commute avec $\phi$. Enfin, notons que le sous-groupe d'inertie $I(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ agit de manière trivial et donc $W_{\mathbb{Q}_p}$ agit continuement sur $D_{\mathrm{st},F}$ [4].

Soit $d \overset{\mathrm{def}}{=} [F_0 : \mathbb{Q}_p]$, et supposons que $E \supseteq F$. On a le résultat suivant :

3. par rapport au Frobenius de $\mathrm{Gal}(F_0/\mathbb{Q}_p)$
4. pour tout cela, cf. [5], appendice $B$

**Proposition 2.1** *On a un isomorphisme E-lineaire*

$$D_{\mathrm{st},F}(\rho) \cong \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F_0,E)} D_{\sigma,F}(\rho)$$

*où* $D_{\sigma,F}(\rho) \stackrel{def}{=} D_{\mathrm{st},F} \otimes_{F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E} E$ *avec le morphisme* $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \to E$ *induit par la couple* $(\sigma, \mathrm{id}_E)$ *; de plus, chaque E-espace vectoriel* $D_{\sigma,F}$ *est muni d'une action induite de* $W_{\mathbb{Q}_p}$ *et de* $N$*.*

**Preuve :** Omissis. Cf. [7], §2.4.♯

En particulier, on voit que chaque $D_{\sigma,F}(\rho)$ est une représentation de Weil-Deligne [5]. On conclut avec le résultat suivante :

**Lemme 2.4** *La classe d'isomorphisme de représentation de Weil-Deligne de* $D_{\sigma,F}$ *est independent des choix de* $\sigma$ *et de l'extention* $F \subseteq E$ *sur la quelle on a semistabilité.*

**Preuve :**Omissis. Cf. [3], lemme 2.2.1.2. ♯

Grâce au lemme precedent, on peut definir *la* représentation de Weil-Deligne associé à la $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-représentation potentiellement semistable $\rho$ sur $E$, qui sera notée par $WD_E(\rho)$. En fait, on montre aussi que si $E'$ est une extention de $E$, alors $\rho \otimes_E E'$ est potentiellement semistable si $\rho$ l'est, et que $WD'_E(\rho \otimes_E E') = WD_E(\rho) \otimes_E E'$ (cf. [5], appendice $B$), ce qui montre que l'on peut parler de *la* représentation de Weil-Deligne associé à une représentation potentiellement semistable $\rho$ (sans se preoccuper du corps des coefficients de $\rho$), qui ser notée par $WD(\rho)$.

# 3 Poids de Hodge-Tate et type galoisienne

Soit $E$ une extention finie de $\mathbb{Q}_p$, $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(E)$ une représentation continue, potentiellement semi-stable. Si $\epsilon : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Z}_p^\times$ denote le caractère cyclotomique $p$-adique, on note

$$(\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho)\{i\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho \,\text{t.q.}\, g \cdot x = (\epsilon(g))^i x \,\text{pour tout}\, g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)\}$$

(bien sûr, on munit $\mathbb{C}_p$ de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, et $i \in \mathbb{Z}$) qui est muni d'une structure de $E$-espace vectoriel (en fait, de dimension finie) et d'une action $E$-lineaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Le résultat fondamental est le suivante :

**Proposition 3.1** *On dispose d'un isomorphisme de* $\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$*-modules*

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} ((\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho)\{i\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho$$

5. c'est-à-dire une représentation continue du groupe de Weil $W_{\mathbb{Q}_p}$, munie d'un endomorphisme nilpotent $N$ tel que $N \cdot g = p^{-\alpha(g)} g \cdot N$, avec $\alpha(g) \in \mathbb{Z}$ définit comme plus haut.

*qui est* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$*-equivariant (avec action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *qui est* $\mathbb{C}_p$*-semilineaire et* $E$*-lineaire).*

**Preuve :** Omissis. Cf. [6]. $\sharp$

**Définition 3.1** *Dans la situation plus haut, un entier* $k \in \mathbb{Z}$ *est dit* poids de Hodge-Tate *pour* $\rho$ *si* $(\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho)\{i\} \neq 0$.

On peut montrer aussi que $(\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho)\{i\} = 0$ pour presque tout $i \in \mathbb{Z}$

**Type Galoisien.** Considérons $I(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ le groupe d'inertie absolu. Un *type galoisien de degré* $n$ est une classe d'équivalence de représentations lisses

$$\tau : I(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p})$$

qui admettent une extention au groupe de Weil $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.
Étant donné une représentation $F$-semistable $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_n(E)$ on peut donc définir son type galoisien par $WD(\overline{\rho})|_{I(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$. Le résultat remarquable c'est que dans ce cas l'on dispose d'une classification complète des types galoisiennes associés à $\rho$ pour $n = 2$.

# 4 Conclusion

Maintenant, fixons
*i)* $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue ;
*ii)* $\tau$ un type galoisien de degré 2 ;
*iii)* des extentions finies $E \subseteq E'$ de $\mathbb{Q}_p$, avec $\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_{E'}$ les anneaux des entiers, $k(E), k(E')$ les corps residuels ;
*iv)* un naturel $k \geq 1$.
De plus, supposons que :
*i')* $\tau$ soit rationel sur $E$ (i.e. $\tau$ se factorise à travers $\mathrm{GL}_2(E) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ ;
*ii')* $\overline{\rho}$ est rationelle sur $k(E)$ ;

On dit que une deformation $\rho$ de $\overline{\rho}$ sur l'anneau $\mathcal{O}_{E'}$ est *de type (k,$\tau$)* si :
*a)* $\rho \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} \overline{\mathbb{Q}_p}$ est une $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$-représentation sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ potentiellement semistable, et ses poids de Hodge-Tate sont $(0, k-1)$
*b)* $WD(\rho \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} \overline{\mathbb{Q}_p})|_{I(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \cong \tau$ ;
*c)* le caractère $\eta \overset{\text{def}}{=} \epsilon^{-(k-1)} \det(\rho) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{O}_E^\times$ a image d'ordre fini, et

$$p \nmid \frac{\mathrm{Card}(\eta(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)))}{\mathrm{Card}(\eta(I_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sauv}}))}$$

(rappelons que $I_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sauv}} \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{mr})$ designe le sous groupe d'inertie sauvage dans $I_{\mathbb{Q}_p} \overset{\text{def}}{=} I(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$).

**Remarque 4.1** En fait, dans §2 et §3, on a travaillé avec des représentaitons à coefficients dan une extention *finie* de $\mathbb{Q}_p$. D'autre part, on a le lemme (cf. lemme 2.2.1.1 dans [3])

***Lemme 4.1*** *Si* $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ *est continue, alors, elle est* $E$ *rationelle, pour une extention finie* $E$ *de* $\mathbb{Q}_p$ *convenable.*

Donc toute représentation continue à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ sera considerée comme une représentation à coefficients dans une quelque extension finie de $\mathbb{Q}_p$, suffisamment grande.

## 4.1 La definition de la multiplicité galoisienne

Supposon de plus que la représentation $\overline{\rho}$ verifie
*iii'*) $\mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}(\overline{\rho}) \cong \overline{\mathbb{F}}_p$.
Donc, $\mathrm{Def}(\overline{\rho}, \bullet)$ admet un anneau de déformation universelle $R(\overline{\rho}_{\mathcal{O}_E})$ (qui est une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale noetherienne complète de corps residuel $k(E)$), ainsi que d'une déformation universelle $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(R(\overline{\rho}_{\mathcal{O}_E}))$ (plus precisement, $\rho$ désigne un représentant de la déformation universelle).

On dit que un ideal premier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R(\overline{\rho})_{\mathcal{O}_E})$ est de type $(k, \tau)$ s'il existe un homomorphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres $R(\overline{\rho})_{\mathcal{O}_E} \to \overline{\mathbb{Z}_p}$ de noyau $\mathfrak{p}$, et tel que la deformation sur $\overline{\mathbb{Z}_p}$ obtenue par composition [6]

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_2(R(\overline{\rho})_{\mathcal{O}_E}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Z}_p})$$

soit de type $(k, \tau)$ [7].

**Définition 4.1** *Dans la situation precedente on définit*

$$R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathcal{O}_E} \overset{def}{=} \begin{cases} R(\overline{\rho})_{\mathcal{O}_E}/(\bigcap_{\mathfrak{p}\,\mathrm{de\,type}\,(k,\tau)} \mathfrak{p}) & \text{s' il existe au moin un ideal premier de type } (k,\tau); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre que $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathcal{O}_E}$ est une $\mathcal{O}_E$-algèbre locale, noetherienne, plate, complète, réduite de corps résiduel $k(E)$.

On conclut avec les résulats suivants :

**Lemme 4.2** *Dans les notations plus haut, on a* $R(k,\tau,\overline{\rho})_{\mathcal{O}'_E} \cong \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_E} R(k,\tau,\overline{\rho})$.

6. avec un abuse de notation, $\overline{\mathbb{Z}_p}$ désigne l'anneau des entiers d'une extention *finie* de $\mathbb{Q}_p$ convenable.

7. Dans [3] on utilise le fait que $\tau$ est rationelle pour deduire que si $\mathfrak{p}$ est de type $(k,\tau)$, alors *tout* morphisme $R(\overline{\rho})_{\mathcal{O}_E} \to \overline{\mathbb{Z}_p}$ de noyau $\mathfrak{p}$ est tel que la deformation associée est de type $(k,\tau)$.

**Preuve :** Omissis. Cf. [3], lemme 2.2.2.3.$\sharp$

Si $(A, \mathfrak{m}_A)$ est un anneau local noetherien, l'on dispose de la fonction de Samuel $\chi(n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{long}_A(A/(\mathfrak{m}_A^n))$, qui est un polynôme de degré $d \stackrel{\text{def}}{=} \dim(A)$ en $n$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ pour $n >> 0$ (cf. [9], §13 et 14). De plus, on montre que le coefficient de $n^d$ est $\frac{e_{\max}(A)}{d!}$ pour $e_{\max}(A) \in \mathbb{Z}$ convenble (qui ne depend pas de $n$). On dit que $e_{\max}(A)$ est la *multiplicité de Samuel* de $A$.

Par exemple, on a $e_{\max}(k[[X]]) = 1$, dés que $\chi(n) = n$ pour tout $n \geq 1$.

On conclut : la *multiplicité galoisienne* attachée à la représentation $\overline{\rho}$ (qui verifie les $i'), ii'), iii')$ plus haut) est l'entier

$$\mu_{gal}(k, \tau, \overline{\rho}) \stackrel{\text{def}}{=} e_{\max}(R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} k(E)).$$

C'est une bonne définition, dans le sense que si $E'$ est une extention finie de $E$, alors

$$e_{\max}(R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} k(E)) = e_{\max}(R(k, \tau, \overline{\rho})_{\mathcal{O}_{E'}} \otimes_{\mathcal{O}_E} k(E'))$$

(grâce au lemme 4.2).

## Références


[1] Berger, L. : *An introduction to the theory of $p$-adic representations.* dans Geometric aspects of Dworc theory, Vol.1

[2] Breuil, C. *$p$-adic Hodge theory, deformations and local Langlands.* Note du cours à Barcelona, disponible sur http ://www.ihes.fr/ breuil/publications.html

[3] Breuil, C., Mézard, A. *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *en* $\ell = p$. Duke Mathematical Journal, Vol.115, N.2 (2002)

[4] Colmez, P. : *Espaces de Banach de dimension finie.* disponible sur http ://www.math.jussieu.fr/ colmez/publications.html

[5] Conrad, B., Fred, D., Richard, T. ; *Potentially Barsotti-Tate Galois representaitons.* Journal American Society, 12 (1999)

[6] Fontaine, J.M. : *Représentations $p$-adiques potentiellement semi-stables* Asterisque 223, Soc. Math. de France (1994), 113-184.

[7] Ghate, E, Mézard, A. *Filtered Modules with coefficients* disponible sur http ://www.math.uvsq.fr/ mezard/papier/

[8] de Smit, B., Lenstra, H.W. *Explicit Construction of Universal Deformation Rings* dans
Modular forms and Fermat's Last Theorem, par G. Cornell, J. H. Silverman, et G. Stevens, Springer-Verlag, New York, 1997

[9] Matsumura, H. *Commutative Ring Theory.* Cambridge studies in advanced mathematics, 8

[10] Mazur, B. *An Introduction to the Deformation Yheory of Galois Representations* dans
Modular forms and Fermat's Last Theorem, par G. Cornell, J. H. Silverman, et G. Stevens, Springer-Verlag, New York, 1997

[11] Mézard, A. *Quelques problèmes de déformations en characteristique mixte* thèse de doctorat, http ://www.math.uvsq.fr/ mezard/papier/these.pdf

[12] Ramakrishna, R. *On a variation on Mazur's deformation functor.* Compositio Mathematica, tome 87, n.3 (1993), pagg. 269-286

[13] Schlessinger, M. *Functors of Artinian rings.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 130, No. 2 (Feb., 1968), pp. 208-222

[14] Vistoli, A. *The deformation theory of local complete intersection* diponible sur http ://homepage.sns.it/vistoli/, sur le link "Preprints, on the Mathematics ArXiv"