Noname manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Structure interne des représentations modulo p de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Ramla Abdellatif · Stefano Morra

the date of receipt and acceptance should be inserted later

Résumé Soit $p \geq 5$ un nombre premier. À partir de travaux antérieurs dus aux deux auteurs, nous déterminons la filtration par le $SL_2(\mathbb{Z}_p)$-socle des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Mots-clé représentations supersingulières, programme de Langlands modulo p, poids de Serre, filtration par le socle

Mathematics Subject Classification (2010) 11F85, 22E50

1 Introduction

Soit p un nombre premier, que l'on choisit comme uniformisante de $\mathbb{Z}_p$, et soit $\overline{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique du corps résiduel $\mathbb{F}_p$ de $\mathbb{Z}_p$. Dans [Ab], le premier auteur donne une classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ en quatre familles qui correspondent à celles apparaissant dans la classification obtenue par Barthel-Livné et Breuil pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Lorsque p est impair, le second auteur détermine dans [Mo1] la filtration par le $GL_2(\mathbb{Z}_p)$-socle des représentations lisses irréductibles de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.
Nous nous proposons d'exploiter ces travaux pour expliciter la filtration par le $SL_2(\mathbb{Z}_p)$-socle des représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Avant d'énoncer notre résultat, nous rappelons que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note χ_n^s le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère du groupe $B(\mathbb{F}_p)$ des matrices triangulaires supérieures de $GL_2(\mathbb{F}_p)$ défini par

$$\chi_n^s\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) := d^n \ , \tag{1.1}$$

R. Abdellatif
Laboratoire de Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud XI, 91 405 Orsay
E-mail: Ramla.Abdellatif@math.u-psud.fr

S. Morra
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, place Eugène Bataillon, case courrier 051, 34095 Montpellier
E-mail: stefano.morra@math.univ-montp2.fr

que l'on désigne par $\mathfrak{a}$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $B(\mathbb{F}_p)$ défini par $\mathfrak{a}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) := ad^{-1}$, par ω le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{Q}_p^\times$ trivial en p dont la restriction à $\mathbb{Z}_p^\times$ est donnée par l'application de réduction modulo p, et que pour tout coefficient $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ non nul, on note μ_λ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse non ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur λ.

Théorème 1.1 *Soit $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ et soit $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Notons I_S le sous-groupe d'Iwahori standard de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, $K_S := SL_2(\mathbb{Z}_p)$ et B_S le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.*

1. *La filtration par le K_S-socle de l'induite parabolique $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda\omega^{p-1-r})$ est donnée par*

$$\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_r^s))\text{—}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-2}^s))\text{—}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-4}^s))\text{—}\ldots\,.$$

2. *La filtration par le K_S-socle de la représentation de Steinberg St_S est donnée par*

$$\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2\text{—}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}))\text{—}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}^2))\text{—}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I}^{K}(\mathfrak{a}^3))\text{—}\ldots\,.$$

3. *La filtration par le K_S-socle de la représentation supersingulière π_r est donnée par*

$$\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2\text{—}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-2}^s))\text{—}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-4}^s))\text{—}\ldots\,.$$

Cet article est organisé de la façon suivante : on commence par rappeler les résultats de [Ab] et [Mo1] ayant inspiré l'étude menée ici, et qui traitent respectivement des représentations modulo p de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ et de la structure interne des représentations modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. On démontre ensuite deux résultats techniques concernant le comportement des $GL_2(\mathbb{Z}_p)$-extensions après restriction à $SL_2(\mathbb{Z}_p)$, dont nous déduisons une preuve simple du Théorème 1.1.

2 Préliminaires

2.1 Notations

On fixe un nombre premier p. On note $G := GL_2(\mathbb{Q}_p)$ de sous-groupe ouvert compact maximal $K := GL_2(\mathbb{Z}_p)$ et de centre $Z \simeq \mathbb{Q}_p^\times$ dont le pro-p-sous-groupe maximal est noté Z_1. On désigne par B le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de G et par U son radical unipotent. L'application de réduction modulo p induit naturellement une surjection de K sur $GL_2(\mathbb{F}_p)$ qui nous permet de définir le sous-groupe d'Iwahori standard I (resp. : son pro-p-radical $I(1)$) comme l'image réciproque par cette surjection du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures (resp. : et unipotentes) de $GL_2(\mathbb{F}_p)$. Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$, on définit $K_0(p^n)$ comme le sous-groupe des éléments de K s'écrivant sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ p^n c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p$.

De même, on note $G_S := SL_2(\mathbb{Q}_p)$ de sous-groupe ouvert compact maximal standard $K_S = SL_2(\mathbb{Z}_p)$, de sous-groupe de Borel $B_S := G_S \cap B$, de sous-groupe d'Iwahori standard $I_S = G_S \cap I$ et de pro-p-Iwahori standard $I_S(1) = G_S \cap I(1)$.

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, on désigne par ω le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère lisse de $\mathbb{Q}_p^\times$ qui est trivial sur p et dont l'action sur $\mathbb{Z}_p^\times$ est définie par l'application de réduction modulo p. Pour tout coefficient $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non nul, on note $\mu_\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère lisse non ramifié qui envoie p sur λ, et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par χ_n^s le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère du groupe fini $B(\mathbb{F}_p)$ défini par $\chi_n^s\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) := d^n$. On note enfin $\mathfrak{a}$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $B(\mathbb{F}_p)$ défini par $\mathfrak{a}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) := ad^{-1}$.

Remarque 2.1 Les caractères χ_n^s et $\mathfrak{a}$ définissent par restriction des caractères du groupe fini $B_S(\mathbb{F}_p) = B(\mathbb{F}_p) \cap SL_2(\mathbb{F}_p)$, qui définissent par inflation des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de I_S que l'on note encore χ_n^s et $\mathfrak{a}$. Notons qu'ils satisfont notamment aux relations suivantes :

$$\forall\ M \in B_S(\mathbb{F}_p),\ \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \chi_n^s(M) = \chi_{-n}^s(M^{-1})\ ,$$

et que l'on a par ailleurs $\chi_2^s\mathfrak{a} = \det$.

Pour tout sous-groupe ouvert H de G, on dispose d'un foncteur d'induction compacte ind_H^G qui coïncide avec le foncteur d'induction lisse Ind_H^G lorsque H est d'indice fini dans G. Pour toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse σ de H et tout vecteur $v \in \sigma$, on note $[1, v]$ l'élément de $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ de support égal à H et qui envoie I_2 sur v.
Ceci reste vrai si l'on remplace G par K et que l'on considère le sous-groupe d'indice fini $H = K_0(p)$ de K. Dans ce cas, si σ est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse de $K_0(p)$ et si v est un élément de σ, on pose alors, pour tout $\ell \in \{0, \ldots, p-1\}$,

$$F_\ell(v) := \sum_{\lambda_0 \in \mathbb{F}_p} \lambda_0^\ell \begin{pmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, v] \in \mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K \sigma\ . \tag{2.1}$$

Rappelons enfin que toute représentation lisse irréductible de K_S sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ provient par inflation d'une représentation irréductible $\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2$ de $SL_2(\mathbb{F}_p)$, et que toute représentation lisse irréductible de K sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ provient par inflation d'une représentation irréductible $\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^m$ de $GL_2(\mathbb{F}_p)$, avec $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $m \in \{0, \ldots, p-2\}$ uniques. Par abus de notation, nous noterons encore $\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2$ (resp. $\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det$) la représentation de K_S (resp. de K) correspondante.

2.2 Représentations modulo p de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Les travaux présentés dans [Ab] fournissent une classification exhaustive des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ ainsi qu'une description de la restriction à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ des représentations lisses irréductibles de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Ils mènent notamment à l'énoncé suivant [Ab, Théorèmes 0.1, 2.16 et Proposition 4.5].

Théorème 2.1 *Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et soit $r \in \{0, \ldots, p-1\}$.*

1. *La restriction à G_S définit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :*

$$\mathrm{Res}_{G_S}^G(\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}}\omega^r)) \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^2}\omega^{p-1-r})\ .$$

2. *Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^2}\omega^{p-1-r})$ est réductible si et seulement si le caractère $\mu_{\lambda^2}\omega^{p-1-r}$ est trivial. L'induite parabolique $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module indécomposable de longueur 2 admettant le caractère trivial comme sous-objet et la représentation de Steinberg St_S comme quotient.*
3. *La restriction à G_S établit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules de la représentation de Steinberg St de G vers la représentation de Steinberg St_S.*
4. *La restriction à G_S induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules :*

$$\mathrm{Res}_{G_S}^{G}(\pi(r,0,1)) \simeq \pi_r \oplus \pi_{p-1-r} \ . \tag{2.2}$$

Dans cet énoncé, $\pi(r,0,1) := \mathrm{Coker}(T_r : \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2) \to \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2))$ est la représentation supersingulière de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ de paramètre r [Br, Section 2.7]. On désigne par $\bar{f}$ l'image dans $\pi(r,0,1)$ d'un élément $f \in \mathrm{ind}_{KZ}^{G}(\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2)$. Les représentations $\pi_0,\dots,\pi_{p-1}$ forment quant à elles un système explicite de représentants des classes d'isomorphisme des représentations supersingulières de G_S [Ab, Section 4.1] qui vérifient en particulier les assertions suivantes [Ab, Propositions 4.7 et 4.11].

Théorème 2.2 *Soit $r \in \{0,\dots,p-1\}$.*

1. *L'espace $\pi_r^{I_S(1)}$ des vecteurs $I_S(1)$-invariants de la représentation supersingulière π_r est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et engendré par $v_r := \overline{[I_2, x^r]}$.*
2. *Le sous-groupe d'Iwahori standard I_S agit sur $\pi_r^{I_S(1)}$ par le caractère ω^r.*

2.3 Structure interne des représentations modulo p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$

On suppose désormais que $p \geq 5$. Nous rappelons maintenant quelques résultats de [Mo1] concernant la structure interne des représentations lisses irréductibles de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, qui décrivent notamment la filtration par le K-socle des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de dimension infinie de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ [Mo1, Theorems 1.1 and 1.2].

Théorème 2.3 *Soit $(r,\lambda) \in \{0,\dots,p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ une paire de paramètres.*

1. *La représentation $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}}\omega^r)$ admet la filtration par le K-socle suivante :*

$$\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s))\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s\mathfrak{a}))\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s\mathfrak{a}^2))\text{---}\dots\ .$$

2. *La représentation de Steinberg St de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ admet la filtration par le K-socle suivante :*

$$\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\mathfrak{a}))\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\mathfrak{a}^2))\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\mathfrak{a}^3))\text{---}\dots\ .$$

3. *La restriction à KZ de la représentation supersingulière $\pi(r,0,1)$ est scindée de longueur 2 :*

$$\pi(r,0,1)|_{KZ} \simeq \Pi_r \oplus \Pi_{p-1-r} \ . \tag{2.3}$$

Les représentations Π_r et Π_{p-1-r} admettent respectivement les filtrations par le K-socle suivantes :

$$\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s\mathfrak{a}^{r+1}))\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s\mathfrak{a}^{r+2}))\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s\mathfrak{a}^{r+3}))\text{---}\dots$$

et

$$\mathrm{Sym}^{p-1-r}\overline{\mathbb{F}}_p^2\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s\mathfrak{a}))\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s\mathfrak{a}^2))\text{---}\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s\mathfrak{a}^3))\text{---}\dots\ .$$

3 De K à K_S

Cette section a pour but de combiner les résultats rappelés ci-avant afin d'obtenir deux énoncés techniques nous permettant de démontrer facilement le Théorème 1.1. Nous procédons comme suit : nous commençons par étudier plus en détail la nature des K-extensions entre poids de Serre contenus dans une représentation lisse irréductible donnée de G, ce qui fournit un raffinement de l'énoncé du Théorème 2.3. Nous prouvons ensuite que ces K-extensions restent non scindées lorsqu'on se limite à les considérer comme des K_S-extensions.

3.1 Structure des K-extensions entre poids de Serre

Traitons tout d'abord le cas d'une représentation de la forme $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}}\omega^r)$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ et $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ fixés. Un calcul direct reposant sur la décomposition d'Iwahori $G = KB = BK$ montre, par application de la décomposition de Mackey, que le $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-module porté par $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}}\omega^r)$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{K\cap B}^K \chi_r^s$. D'après [Mo1, §10], on dispose en outre d'un isomorphisme K-équivariant[1]

$$\varinjlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\cap B}^K \chi_r^s \ .$$

Par continuité du foncteur d'induction $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K$, on en déduit l'existence d'un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-modules

$$\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K \left(\varinjlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s \right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\cap B}^K \chi_r^s \ . \tag{3.1}$$

Par ailleurs, on sait grâce à [Mo1, Proposition 5.10] que pour tout entier $n \geq 1$, la représentation $\mathrm{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$ est unisérielle[2] de dimension p^n sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et qu'elle admet la filtration par le $K_0(p)$-socle suivante :

$$\chi_r^s — \chi_r^s \mathfrak{a} — \chi_r^s \mathfrak{a}^2 — \ldots — \chi_r^s \mathfrak{a}^{p^n-2} — \chi_r^s \mathfrak{a}^{p^n-1} \ .$$

On obtient donc ainsi le premier résultat suivant.

Lemme 3.1 *Soit $(r, \lambda) \in \{0, \ldots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ une paire de paramètres. Le $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-module porté par $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}}\omega^r)$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K R_\infty^-$, où $R_\infty^- := \varinjlim_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$ est une représentation unisérielle de $K_0(p)$ de longueur infinie admettant la filtration par le $K_0(p)$-socle suivante :*

$$\chi_r^s — \chi_r^s \mathfrak{a} — \chi_r^s \mathfrak{a}^2 — \ldots \ .$$

[1] Donc en particulier $I = K_0(p)$-équivariant.

[2] Ce qui signifie que sa restriction au sous-groupe $U(\mathbb{Z}_p)$ des matrices unipotentes de $B \cap K$ est une suite d'extensions non scindées d'objets irréductibles.

La situation est analogue pour les $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$-modules Π_r et Π_{p-1-r} introduits dans l'énoncé du Théorème 2.3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons σ_r^n le $\overline{\mathbb{F}}_p[K_0(p^n)]$-module d'espace sous-jacent $\bigoplus_{i=0}^{r} \overline{\mathbb{F}}_p X^i Y^{r-i}$ sur lequel l'action de $K_0(p^n)$ est donnée par la formule suivante [Mo1, §3.1] :

$$\sigma_r^n \left(\begin{pmatrix} a & b \\ p^n c & d \end{pmatrix} \right) \cdot X^i Y^{r-i} := (dX + cY)^i (p^n bX + aY)^{r-i} \ .$$

En posant $R_n := \mathrm{Ind}_{K_0(p^n)}^{K}(\sigma_r^n)$, on dispose grâce à [Mo2, Lemma 3.4] d'une injection de systèmes inductifs

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dotted] & \vdots \arrow[d, dotted] \\
R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_{n-2}^-} R_{n-1}^- \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_{n-2}} R_{n-1} \arrow[d, hook] \\
R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^- \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted] & R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} \arrow[d, dotted] \\
{} & {}
\end{tikzcd}$$

qui induit un isomorphisme K-équivariant [Mo1, Proposition 3.9]

$$\varinjlim_{n \text{ impair}} R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} \xrightarrow{\sim} \Pi_r \ .$$

Chaque $R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-$ définit alors une représentation unisérielle de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont la filtration par le $K_0(p)$-socle est de la forme [Mo2, Theorem 5.18] :

$$\chi_r^s \mathfrak{a}^r — \chi_r^s \mathfrak{a}^{r+1} — \chi_r^s \mathfrak{a}^{r+2} — \ldots \ .$$

Le lemme suivant établit une relation importante entre $R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-$ et $R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1}$.

Lemme 3.2 *Pour tout entier impair $n \geq -1$, on dispose de la suite exacte courte suivante de $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-modules :*

$$0 \to \mathrm{Sym}^{p-1-r}\overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det{}^r \to \mathrm{Ind}_{K_0(p)}^{K}(R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-) \to R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} \to 0. \tag{3.2}$$

Preuve La démonstration s'effectue par récurrence sur l'entier impair $n \geq -1$, le cas $n = -1$ s'obtenant par un calcul direct qui repose sur la définition de $R_0 \simeq \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$ et de $R_0^- = \chi_r^s \mathfrak{a}^r$ [Mo2, §3].

Le cas général se traite à l'aide du diagramme commutatif suivant [Mo2, Proposition 3.5] :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_n^- \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, two heads] & R_{n+1}^- \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, two heads] & R_{n+1}^-/R_n^- \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_n \arrow[r] \arrow[dd, two heads] & R_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd, two heads] & R_{n+1}/R_n \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \cdots\oplus_{R_{n-2}^-} R_{n-1}^- \arrow[r] \arrow[d, hook] & \cdots\oplus_{R_n^-} R_{n+1}^- \arrow[r] \arrow[d, hook] & R_{n+1}^-/R_n^- \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\cdots\oplus_{R_{n-2}} R_{n-1})|_{K_0(p)} \arrow[r] & (\cdots\oplus_{R_{n2}} R_{n+1})|_{K_0(p)} \arrow[r] & R_{n+1}/R_n \arrow[r] & 0\ .
\end{tikzcd}$$

Par transitivité de l'induction compacte et [Mo2, §3], on sait qu'il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-modules $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K R_{n+1}^- \cong R_{n+1}$. On déduit donc de l'exactitude du foncteur $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K$ et de la réciprocité de Frobenius compacte l'existence du diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \cdots\oplus_{R_{n-1}} R_{n-1} \arrow[r] & \cdots\oplus_{R_n} R_{n+1} \arrow[r] & R_{n+1}/R_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K(\cdots\oplus_{R_{n-1}^-} R_{n-1}^-) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & \mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K(\cdots\oplus_{R_{n+1}^-} R_{n+1}^-) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & R_{n+1}/R_n \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0\ .
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si la suite exacte courte (3.2) est vérifiée pour l'entier $n-1 \geq -1$, l'application du lemme du serpent au diagramme ci-dessus implique directement que la suite exacte (3.2) est vérifiée pour l'entier $n+1$, ce qui achève la démonstration. $\square$

La continuité et l'exactitude du foncteur $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K$ nous permettent en particulier d'en déduire le résultat suivant.

Corollaire 3.1 *Soit $r \in \{0, \ldots p-1\}$ et soit Π_r le facteur direct du $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$-module $\pi(r,0,1)$ de K-socle égal à $\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2$. On dispose alors d'une suite exacte courte de $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-modules*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sym}^{p-1-r}\overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det{}^r \longrightarrow \mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K(R_{\infty,r}^-) \longrightarrow \Pi_r \longrightarrow 0\ ,$$

où $R_{\infty,r}^- := \varinjlim_{n\ impair} R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-$ est une représentation unisérielle de dimension infinie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ dont la filtration par le $K_0(p)$-socle est donnée par

$$\chi_r^s\mathfrak{a}^r — \chi_r^s\mathfrak{a}^{r+1} — \chi_r^s\mathfrak{a}^{r+2} — \ldots\ .$$

3.2 Restriction à K_S

Nous allons maintenant étudier la restriction à K_S des extensions entre poids de Serre considérées dans la sous-section précédente. Commençons par rappeler un résultat dû à Paškūnas [P, Proposition 5.4], qui traite le cas des $K_0(p)$-extensions entre caractères.

Proposition 3.1 *Soient χ et ψ deux $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères lisses de $K_0(p)$. L'espace d'extensions $\mathrm{Ext}^1_{K_0(p)/Z_1}(\psi,\chi)$ est non nul si et seulement si $\psi=\chi\mathfrak{a}$. Dans ce cas, c'est un espace de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et toute extension non triviale de $\chi\mathfrak{a}$ par χ admet une base (e_0,e_1) sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour laquelle $K_0(p)$ agit sur e_i par le caractère $\chi\mathfrak{a}^i$ et telle que*

$$\begin{pmatrix} 1+pa & b \\ pc & 1+pd \end{pmatrix}\cdot e_1 = e_1 + ce_0 \ .$$

Fixons un paramètre $r\in\{0,\dots,p-1\}$. La structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-module portée par $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K\chi_r^s$ est donnée par [BP, Lemma 2.3 & Theorem 2.4] et admet la description suivante :

$$\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \mathrm{Sym}^{p-1-r}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det{}^r \quad \text{si} \quad r\not\equiv 0 \text{ modulo } (p-1)\ , \tag{3.3}$$

$$\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2\oplus\mathrm{Sym}^0\overline{\mathbb{F}}_p^2 \quad \text{si} \quad r\equiv 0 \text{ modulo } (p-1)\ . \tag{3.4}$$

Les fonctions $F_\ell(v)$ définies par la formule (2.1) permettent en outre d'expliciter certains espaces de vecteurs invariants ou coinvariants sous $K_0(p)$. Plus précisément, en fixant un vecteur non nul $e\in\chi_r^s$, on dispose grâce à [BP, Lemma 2.5] des formules suivantes lorsque $r\not\equiv 0$ modulo $(p-1)$:

$$(\mathrm{soc}_K(\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K\chi_r^s))^{K_0(p)} = \langle F_0(e)\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}\ ; \tag{3.5}$$

$$(\mathrm{cosoc}_K(\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K\chi_r^s))_{K_0(p)} = \langle F_{p-1}(e)\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}\ . \tag{3.6}$$

L'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-modules $\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2\oplus\mathrm{Sym}^0\overline{\mathbb{F}}_p^2\cong\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K\mathbf{1}$ permet de plus de déduire de [BP, Lemma 2.6] les cas $r=0$ et $r=p-1$:

$$(\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{K_0(p)} = \langle F_0(e)\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} \tag{3.7}$$

$$(\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2)_{K_0(p)} = \langle F_{p-1}(e)+[1,e]\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} \tag{3.8}$$

$$\mathrm{Sym}^0\overline{\mathbb{F}}_p^2 = \langle F_0(e)+[1,e]\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} \tag{3.9}$$

Nous allons à présent utiliser la Proposition 3.1 dans le cas $\chi=\chi_r^s$ pour construire nos extensions entre poids de Serre. Par exactitude du foncteur $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K$, l'extension non triviale E de $\chi_r^s\mathfrak{a}$ par χ_r^s décrite dans la Proposition 3.1 définit une K-extension de la forme

$$0\longrightarrow\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s)\longrightarrow * \xrightarrow{pr}\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s\mathfrak{a})\longrightarrow 0\ .$$

Pour $r\neq 2$, on définit E_r comme l'image réciproque de $\mathrm{soc}_K(\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s\mathfrak{a}))$ dans l'extension induite

$$0\longrightarrow\mathrm{cosoc}_K(\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s))\longrightarrow * \xrightarrow{pr}\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s\mathfrak{a})\longrightarrow 0\ , \tag{3.10}$$

sous réserve de poser $\mathrm{cosoc}_K(\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K(1))\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2$.
Pour $r=2$, auquel cas on a $\chi_2^s\mathfrak{a}=\det$, on définit $E_{2,0}$ et $E_{2,p-1}$ comme les images

réciproques respectives de $\mathrm{Sym}^0\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det$ et de $\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det$ dans l'extension (3.10).

En particulier, on voit que E_r (pour $r\neq 2$), $E_{2,0}$ et $E_{2,p-1}$ possèdent respectivement les filtrations K-équivariantes suivantes[3] :

$$\begin{aligned}(E_r) &: \mathrm{Sym}^{\lfloor p-1-r\rfloor}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det{}^r\cdots\mathrm{Sym}^{\lfloor r-2\rfloor}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det\ ;\\ (E_{2,0}) &: \mathrm{Sym}^{p-3}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det{}^2\cdots\det\ ;\\ (E_{2,p-1}) &: \mathrm{Sym}^{p-3}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det{}^2\cdots\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det\ .\end{aligned}$$

Rappelons maintenant que pour tous scalaires $\lambda_0,\mu\in\mathbb{F}_p$, on a l'égalité suivante dans $\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p$ [AC, Chap. IX, §1, n°3] :

$$[\lambda_0]+[\mu]\equiv[\lambda_0+\mu]+p[P(\lambda_0,\mu)]\mod p^2 \tag{3.11}$$

avec $P(\lambda_0,\mu)\in\mathbb{F}_p[\lambda_0,\mu]$ polynôme de degré $p-1$ en λ_0 et de coefficient dominant égal à $\pm\mu$.

Nous pouvons alors démontrer le résultat technique suivant, sur lequel repose notre preuve du Théorème 1.1.

Lemme 3.3 *Les représentations de $U(\mathbb{Z}_p)$ portées par E_r, $E_{2,0}$ et $E_{2,p-1}$ sont unisérielles.*

Preuve Notons $\overline{E}_r$, $\overline{E}_{2,0}$ et $\overline{E}_{2,p-1}$ les quotients respectifs des $\overline{\mathbb{F}}_p[U(\mathbb{Z}_p)]$-modules E_r, $E_{2,0}$ et $E_{2,p-1}$ par le noyau de la projection naturelle sur les $U(\mathbb{Z}_p)$-coinvariants

$$\mathrm{Sym}^{\lfloor p-1-r\rfloor}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det{}^r\twoheadrightarrow(\mathrm{Sym}^{p-1-\lfloor r\rfloor}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det{}^r)_{U(\mathbb{Z}_p)}\ .$$

Ce sont des représentations de $U(\mathbb{Z}_p)$ qui satisfont par construction aux suites exactes courtes suivantes de $\overline{\mathbb{F}}_p[U(\mathbb{Z}_p)]$-modules :

$$0\longrightarrow(\mathrm{Sym}^{\lfloor p-1-r\rfloor}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det{}^r)_{U(\mathbb{Z}_p)}\longrightarrow\overline{E}_r\longrightarrow\mathrm{Sym}^{\lfloor r-2\rfloor}\overline{\mathbb{F}}_p^2\longrightarrow 0\ ; \tag{3.12}$$

$$0\longrightarrow(\mathrm{Sym}^{p-3}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det{}^2)_{U(\mathbb{Z}_p)}\longrightarrow\overline{E}_{2,0}\longrightarrow\mathbf{1}\longrightarrow 0\ ; \tag{3.13}$$

$$0\longrightarrow(\mathrm{Sym}^{p-3}\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det{}^2)_{U(\mathbb{Z}_p)}\longrightarrow\overline{E}_{2,p-1}\longrightarrow\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2\longrightarrow 0\ . \tag{3.14}$$

On peut donc définir $\overline{E}'_r$ (resp. $\overline{E}'_{2,0}$, $\overline{E}'_{2,p-1}$) comme la sous-représentation de $\overline{E}_r$ (resp. $\overline{E}_{2,0}$, $\overline{E}_{2,p-1}$) obtenue par image reciproque de $(\mathrm{Sym}^{\lfloor r-2\rfloor}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{U(\mathbb{Z}_p)}$ (resp. $\mathbf{1}$, $(\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{U(\mathbb{Z}_p)}$) à partir de la suite exacte (3.12) (resp. (3.13), (3.14)). La restriction à $U(\mathbb{Z}_p)$ des poids de Serre de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ étant unisérielle, il nous suffit de prouver que les $U(\mathbb{Z}_p)$-extensions $\overline{E}'_r$, $\overline{E}'_{2,0}$ et $\overline{E}'_{2,p-1}$ ne sont pas scindées pour conclure.
Pour ce faire, considérons une base (e_0,e_1) adaptée à l'extension non triviale E au sens de la Proposition 3.1. Les identités (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9) permettent alors de voir que l'on a

$$\begin{aligned}\overline{E}'_r&=\langle F_{p-1}(e_0),F_0(e_1)\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}\ ,\\ \overline{E}'_{2,0}&=\langle F_{p-1}(e_0),F_0(e_1)+[1,e]\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}\ ,\\ \overline{E}'_{2,p-1}&=\langle F_{p-1}(e_0),F_0(e_1)\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}\ ,\end{aligned}$$

[3] Les extensions sont notées en pointillé car à ce stade, nous ne savons pas encore que ces extensions sont non scindées : c'est l'objet du Corollaire 3.2.

les fonctions $F_{p-1}(e_0)$ et $F_0(e_1)$ étant ici des éléments de $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^{K}(E)$.

Étant donné que 1 est un générateur topologique de $\mathbb{Z}_p$, l'action de $U(\mathbb{Z}_p)$ sur $\overline{E}'_r$, $\overline{E}'_{2,0}$ et $\overline{E}'_{2,p-1}$ est entièrement déterminée par l'action des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\mu \in \mathbb{F}_p$. En remarquant que $F_\ell(e_0)$ est nul dans $\overline{E}'_r$, $\overline{E}'_{2,0}$ et $\overline{E}'_{2,p-1}$ lorsque $\ell \neq p-1$, on obtient par un calcul direct reposant sur l'égalité modulaire (3.11) et sur la définition des vecteurs (e_0, e_1) que l'on a, pour tout scalaire non nul $\mu \in \mathbb{F}_p$,

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I_2 \right) \cdot F_0(e_1) = \pm \mu F_{p-1}(e_0) \neq 0 \ .$$

Ceci achève la démonstration une fois que l'on a remarqué que $F_{p-1}(e_0)$ est fixe sous l'action de $U(\mathbb{Z}_p)$. □

Corollaire 3.2 *1. Les K_S-extensions portées par E_r (pour $r \neq 2$), $E_{2,0}$ et $E_{2,p-1}$ ne sont pas scindées.*
2. La filtration par le K-socle de l'induite $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^{K}\chi_r^s$ est stable par restriction à K_S.

Preuve La première assertion est une conséquence directe du Lemme 3.2 puisque $U(\mathbb{Z}_p)$ est un sous-groupe de K_S. La seconde assertion découle quant à elle du Lemme 3.2 et de la décomposition de Mackey qui assure que l'on a

$$\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s)|_{U(\mathbb{Z}_p)} \simeq \rho \oplus \mathbf{1}$$

avec ρ représentation unisérielle de $U(\mathbb{Z}_p)$ de dimension p sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. □

4 Preuve du Théorème 1.1

Nous démontrons maintenant le résultat principal de cette note, dont on rappelle l'énoncé ci-dessous.

Théorème 4.1 *Soit $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ et soit $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$.*

1. *La représentation $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{p-1-r})$ admet la filtration par le K_S-socle suivante :*

$$\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_r^s)) \text{—} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-2}^s)) \text{—} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-4}^s)) \text{—} \ldots .$$

2. *La représentation de Steinberg St_S admet la filtration par le K_S-socle suivante :*

$$\mathrm{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{—} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a})) \text{—} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}^2)) \text{—} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I}^{K}(\mathfrak{a}^3)) \text{—} \ldots \ .$$

3. *La représentation supersingulière π_r admet la filtration par le K_S-socle suivante :*

$$\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{—} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-2}^s)) \text{—} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-4}^s)) \text{—} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-6}^s)) \text{—} \ldots$$

4.1 Cas des représentations non supersingulières

Fixons $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$. D'après le Lemme 3.1, les extensions entre poids de Serre apparaissant dans la filtration par le K-socle de $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\sqrt{\lambda}} \otimes \mu_{\sqrt{\lambda^{-1}}}\omega^r)$ sont, à torsion par un caractère lisse près, des extensions non scindées de la forme E_i, $E_{2,0}$, $E_{2,p-1}$ ou $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s \mathfrak{a}^j$ avec $i \in \{0, \dots, p-1\}$ différent de 2 et $j \in \mathbb{N}$ vérifiant $r-2j \not\equiv 0$ modulo $(p-1)$. Le Lemme 3.2 affirme alors que ces objets définissent des K_S-extensions non scindées, ce qui prouve le résultat voulu pour les représentations de la forme $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{p-1-r})$ grâce aux Théorèmes 2.1 et 2.3 et à l'égalité $I_S = K_0(p) \cap K_S$. On en déduit directement le cas de la représentation de Steinberg en rappelant que l'on dispose de la suite exacte courte non scindée de $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$-modules

$$1 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1}) \longrightarrow St_S \longrightarrow 1 \ .$$

Puisque l'on sait que le K_S-socle de la représentation $\mathrm{Ind}_{B_S \cap K_S}^{K_S}(\mathbf{1})$ est somme directe du caractère trivial et du K_S-socle de la représentation obtenue par inflation de la représentation de Steinberg du groupe fini $SL_2(\mathbb{F}_p)$, celui-ci engendrant de plus le $\overline{\mathbb{F}}_p[K_S]$-module irréductible St_S, il suffit de remarquer qu'en restriction à I_S, on a $\chi_2^s = \mathfrak{a}$ pour déduire le résultat voulu de la K_S-filtration de $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$, qui correspond au cas $(r, \lambda) = (p-1, 1)$.

4.2 Cas des représentations supersingulières

Pour terminer la preuve du Théorème 1.1, nous allons relier les représentations supersingulières de G_S aux représentations Π_r de KZ définies dans le Théorème 2.3.

Lemme 4.1 *Soit $r \in \{0, \dots, p-1\}$. Le $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$-module Π_r est stable sous l'action de G_S, et la représentation de G_S qu'il définit est alors isomorphe à π_r.*

Preuve Un calcul direct basé sur la définition de Π_r donnée dans [Mo1, Proposition 3.9] montre que Π_r est stable sous l'action de $\alpha_0 := \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$. Comme la décomposition de Cartan assure que G_S est engendré par K_S et par α_0, cela suffit à prouver que Π_r est un sous-$\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-module de $\pi(r, 0, 1)$. Il suffit ensuite de remarquer que v_r appartient à Π_r pour obtenir que $\pi_r = < G_S \cdot v_r >_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est contenu dans Π_r, puis de comparer les décompositions de $\pi(r, 0, 1)$ données par les Théorèmes 2.1 et 2.3 pour en conclure que les $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$-modules π_r et Π_r sont isomorphes. □

On démontre alors le cas supersingulier du Théorème 1.1 comme suit : d'après le Corollaire 3.1, les extensions entre poids de Serre qui apparaissent dans la filtration par le K-socle de Π_r sont, à torsion par un caractère lisse près, des extensions non scindées de la forme E_i, $E_{2,0}$, $E_{2,p-1}$ ou $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s \mathfrak{a}^j$ avec $i \in \{0, \dots, p-1\}$ différent de 2 et $j \in \mathbb{N}$ vérifiant $r - 2j \not\equiv 0$ modulo $p-1$. Le Lemme 3.2 affirme que ces objets définissent des K_S-extensions non scindées, ce qui prouve le résultat voulu grâce au Lemme 4.1, au Théorème 2.3 et à l'égalité $I_S = K_0(p) \cap K_S$.

4.3 Deux remarques

1) Les résultats présentés dans cet article restent valables lorsque $p = 3$. La difficulté de ce cas réside essentiellement dans la complexité technique des calculs à mener pour obtenir la filtration par l'Iwahori-socle des représentations R_∞ introduites dans la Section 2.3.
2) Le groupe $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ possède deux classes de sous-groupes ouverts compacts maximaux sous l'action par conjugaison, et l'on peut se demander quelle est l'influence du choix de cette classe dans les résultats obtenus ci-avant. Il suffit de remarquer que l'action de l'élément $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, dont l'action par conjugaison échange les deux classes de sous-groupes ouverts compacts maximaux sus-mentionnées, échange aussi les composantes Π_r et Π_{p-1-r} introduites dans le Théorème 2.3. On vérifie alors immédiatement que l'on aura des énoncés parfaitement analogues si l'on s'intéresse aux filtrations par le $K_S^\alpha := \alpha K_S \alpha^{-1}$-socle des représentations lisses irréductibles de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, de sorte que le choix de la classe de sous-groupes ouverts compacts maximaux n'a finalement pas d'influence sur nos rés ultats.

Bibliographie

[Ab] R. Abdellatif, *Classification des représentations modulo p de $SL(2, F)$*, soumis (2012).
[AC] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques - Algèbre commutative*, Ed. Masson (1983).
[Br] Ch. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, I*, Compositio Math. 138 (2003), 165–188.
[BP] Ch. Breuil, V. Paškūnas, *Towards a mod p Langlands correspondance*, Memoirs of Amer. Math. Soc. 216 (2012).
[Mo1] S. Morra, *Explicit description of irreducible* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-representations over* $\overline{\mathbb{F}}_p$, J. of Algebra 339 (2011), 252–303.
[Mo2] S. Morra, *On some representations of the Iwahori subgroup*, à paraître à J. of Number Theory (2011).
[P] V. Paškūnas, *Extensions for supersingular representations of $GL_2(\mathbb{Q}_p)$*, Astérisque 331 (2010), 297–333.