Champs de modules de Fontaine–Laffaille et compatibilité locale–globale modulo p

Stefano Morra
(avec D. Le, B. Le Hung, C. Park, Z. Qian)

Laboratoire Analyse Géométrie Algèbre

June 1, 2021

$X_U(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\Big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/K_\infty(\prod_\ell U_\ell)\Big)$ courbe modulaire $\rightsquigarrow X_{U/\mathbb{Q}}$ varietée algébrique.

Cohomologie

$$\mathbb{T} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Z}[T_\ell,\ \ell | U_\ell \text{ maximal}]$$

$$G_{\mathbb{Q}} \circlearrowright \ H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}},\ \overline{\mathbb{Q}}_p)[\lambda] \ = r \otimes \bigotimes_\ell \pi_\ell(r|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}})^{U_\ell}$$

- $\lambda : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ système (cuspidal) de valeurs propres de Hecke;
- $r : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ représentation galoisienne associée à λ;
- $\pi_\ell(r|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}})$ représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$, associée à $r|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}}$ par la correspondance de Langlands locale (classique).

$$\varinjlim_{U_p} H^1_{\text{ét}}(X_{U^p U_p,\overline{\mathbb{Q}}},\ \overline{\mathbb{Q}}_p)[\lambda] = \underset{\substack{\circlearrowright \\ G_{\mathbb{Q}}}}{r} \otimes \underset{\substack{\circlearrowright \\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}}{\pi_p(r|_{G_{\mathbb{Q}_p}})} \otimes \dots$$

Cohomologie mod p (Emerton)

$$H^1_{\text{ét}}(X_{U,\overline{\mathbb{Q}}},\ \overline{\mathbb{F}}_p)[\overline{\lambda}] = \overline{r} \otimes \bigotimes_\ell \pi_\ell(\overline{r}|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}})^{U_\ell}$$

- $\overline{\lambda} : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ système de valeurs propres de Hecke mod p;
- $\overline{r} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ représentation galoisienne associée à $\overline{\lambda}$;
- $\pi_\ell(\overline{r}|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}})$ beaucoup plus subtil : correspondance de Langlands locale mod p (Breuil).

Cohomologie mod p completée

$$\widetilde{H}^1(X_{U^p})[\overline{\lambda}] \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{U_p} H^1_{\text{ét}}(X_{U^pU_p,\overline{\mathbb{Q}}},\ \overline{\mathbb{F}}_p)[\overline{\lambda}] = \underset{\substack{\circlearrowleft \\ G_{\mathbb{Q}}}}{\overline{r}} \otimes \underset{\substack{\circlearrowleft \\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}}{\pi_p(\overline{r}|_{G_{\mathbb{Q}_p}})} \otimes \dots$$

G/F^+ groupe unitaire compact à l'infini, F/F^+ extension CM :

- $G(F_v^+) \cong \mathrm{GL}_n(F_w)$ et F_v^+ non ramifiée $\forall\ v = ww^c \mid p$,
- on fixe $v \mid p$ et $U^v \subseteq G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty,v})$ compact ouvert.

Varietée de Shimura de dimension zéro:

$$X_{U^v U_v} = G(F^+)\backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty})/U_v U^v.$$

Espace des formes automorphes algébriques

- $H^0(X_{U^v U_v}, \overline{\mathbb{F}}_p)$ avec action de $\mathbb{T}$;
- $\overline{\lambda} : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{F}}_p \rightsquigarrow \overline{r} : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ associée .

Cohomologie mod p completée

$$\widetilde{H}^0 (= \widetilde{H}^0(X_{U^v})[\overline{\lambda}]) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{U_v} H^0(X_{U^v U_v}, \overline{\mathbb{F}}_p)[\overline{\lambda}]$$

Rêve: $\widetilde{H}^0 = \pi_p(\overline{r}|_{G_{F_v^+}}) \otimes \dots$ correspondance de Langlands locale mod p pour $\mathrm{GL}_n(F_v^+)$.

Questions

- $\widetilde{H}^0$ ne dépends que de $\overline{\rho}_v \overset{\text{def}}{=} \overline{r}|_{G_{F_v^+}}$? ("localitée" de la correspondance)
- $\widetilde{H}^0$ détermine $\overline{\rho}_v \overset{\text{def}}{=} \overline{r}|_{G_{F_v^+}}$?

- Partie poids de la conjecture de Serre : description du $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{F_v^+})$-socle de $\widetilde{H}^0$.
- $\overline{\rho}_v$ a un espace de modules non-triviale : cohomologie Galoisienne

$$\overline{\rho}_v \sim \begin{pmatrix} \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbb{P}\Big(H^1(G_{\mathbb{Q}_{p^f}}, \chi_1\chi_2^{-1})\Big) = \begin{cases} * & \text{si } f = 1 \\ \infty & \text{si } f > 1. \end{cases}$$

$\overline{\rho}_v$ est niveau un, Fontaine–Laffaille de poids λ ($\in$ alcôve inférieure), suffisamment générique. Alors $\widetilde{H}^0$ détermine $\overline{\rho}_v$ dans les cas suivants:

- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^f})$: Breuil–Diamond ;
- $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$: Herzig–Le–M. ($f = 1$), Enns ($f > 1$), avec l'hypothèse $F(\lambda) \in \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_{p^f})}(\widetilde{H}^0)$;
- $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ (Enns) ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (Park–Qian), sous conditions.

Aussi, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, $\overline{\rho}_v$ niveau 2 (Le–M.–Park).

- $\mathrm{GL}_2(K)$, tout $K/\mathbb{Q}_p < \infty$, $\overline{\rho}_v$ (Scholze) ;
- $\mathrm{GL}_n(K)$, avec restrictions sur $\overline{\rho}_v$ (Kegang Liu).

Rappel: $G(F_v^+) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{p^f})$.

Théorème principal (Le–Le Hung–M.–Park–Qian)

Supposons :

- $F(\lambda) \in \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^f})}\widetilde{H}^0$, λ est de profondeur $6n$ dans l'alcôve inférieure;
- $\bar{r}$ satisfait aux hypothèses Taylor–Wiles.

Alors le $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^f})$-socle de $\widetilde{H}^0$ détermine le strate $\mathcal{S}$ de $\overline{\rho}_v$ dans le champ des modules des représentations Fontaine–Laffaille.

- étant donnée $\overline{\rho}_v^{\mathrm{ss}}$, la deuxième partie du théorème s'applique aux extensions des représentations de Fontaine–Laffaille les plus génériques avec semisimplification fixée $\overline{\rho}_v^{\mathrm{ss}}$.

Essentiel du methode de Breuil–Diamond : extraire les paramètres d'extension par réduction mod p des opérateurs de Hecke *en* p.

- $B = TU$, $B_- = TU_-$ Borels opposés, W groupe de Weyl de GL_n;
- I Iwahori de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^f})$.

Mécanisme : construire suffisamment de caractères $\chi,\ \chi' : T(\mathbb{Z}_{p^f}) \to \overline{\mathbb{Z}}_p^\times$ et $S,\ S' \in \mathbb{Z}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^f})]$ tels que

$$(\widetilde{H}^0)^{I,\chi} \underset{S'}{\overset{S\circ\Pi^i}{\rightrightarrows}} (\widetilde{H}^0)^{I,\chi'}$$

avec $\Pi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ p & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $\exists i > 0$.

Outils principaux

- Stratification sur le champ de modules de Fontaine–Laffaille;
- Intérprétation du strate en termes des poids de Serre modulaires ($\Leftarrow$ Le–Le Hung–Levin–M.);
- Extraction systèmatique des operateurs de Hecke normalisés : “Fonctions de Hecke” sur le champs de modules.

Modules de Fontaine–Laffaille modulo p pour $\mathbb{Q}_{p^f}$

Module de Fontaine–Laffaille M:

- projectif de rang n sur $\mathbb{F}_{p^f} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F} = \prod_{\mathbb{F}_{p^f} \hookrightarrow \mathbb{F}}$;
- filtration décroissante $\mathrm{Fil}_\bullet$ d'ampleur $< p - 1$;
- Frobenius semi-linéaire $\varphi : \mathrm{gr}_\bullet M \to M$.

Poids donnés par les sauts de la filtration, en particulier dans l'alcôve inférieure.

$M \rightsquigarrow$ représentation $G_{\mathbb{Q}_{p^f}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. On fixe λ *regulier*, et on considère $\mathcal{FL}_\lambda$, champ des modules de Fontaine–Laffaille de poids λ.

- Obtenir une stratification par tiré en arrière des W-translatées de la stratification de Schubert sur $B\backslash\mathrm{GL}_n$;
- Le lieu des $\overline{\rho}_v$ avec une semisimplification fixé est une réunion des strates
- Exemples : (Tableau !)

Champ d'Emerton–Gee potentiellement cristallin

- $\tau : I_{\mathbb{Q}_{p^f}} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ type inertiel moderé;
- $\mathcal{X}^\tau$ champ des modules des représentations potentiellement cristallines avec poids de Hodge–Tate (parallel) $(0, 1, \dots, n-1)$, type inertiel τ;
- $\mathcal{FL}_\lambda$ est alors $\mathcal{C}_{F(\lambda)}$, la composante irréductible de $\mathcal{X}^\tau_{\mathbb{F}}$ parametrée par $F(\lambda)$;
- Langlands local inertiel : $\tau \rightsquigarrow \sigma(\tau)$, représentation de Deligne–Lusztig (génériquement irréductible) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_{p^f})$;
- $\sigma(\tau)$ a une decomposition standard, $|W|^f$ constituants "triviaux";
- Le–Le Hung–Levin–M. analysent $\mathcal{X}^\tau_{\mathbb{F}}$ en termes des sous-varietés de la varieté de drapeau affine.

Proposition

Supposons que $F(\lambda)$ est un constituant trivial de $\overline{\sigma(\tau)}$. Il y a une stratification naturelle sur $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}^{\tau}$ telle que :

- les strates contrôlent le nombre de poids modulaires dans $\overline{\sigma(\tau)}$;
- elle induit une translatée de la stratification de Schubert sur $\mathcal{FL}_{\lambda}$.

Ceci donne la prémière partie du théorème principal.

Algèbres de Hecke

- $\mathcal{H}(\sigma(\tau)) = \mathrm{End}(\text{c-ind}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^f})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{p^f})}(\sigma(\tau)))$: anneau de polynômes en $\leq n$ variables U_i ;
- $\mathcal{H}(\sigma(\tau))$ donne des fonctions sur $\mathcal{X}^{\tau,\,\mathrm{rig}}$, on a une loi de reciprocité pour les actions sur la cohomologie completée en caractiéristique zéro (Caraiani–Emerton–Geraghty–Gee–Paskunas–Shin)

Proposition

Supposons que $F(\lambda)$ est l'unique facteur de Jordan–Hoelder *modulaire* de $\overline{\sigma(\tau)}$. Alors

- $|U_i| = |p^{\kappa_i}|$ est constant;
- La valeur de U_i/p^{κ_i} s'extrait en appliquant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{p^f})}(\bullet, \widetilde{H}^0)$ à un diagramme de représentations lisses de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{p^f})$ à coefficients sur $\mathbb{F}$.

Phénomène : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{p^f})}(\bullet, \widetilde{H}^0)$ annule les $\text{c-ind}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^f})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{p^f})} F(\mu)$ pour $F(\mu)$ non-modulaire, et U_i/p^{κ_i} est un isomorphisme dans une categorie localisée.

Fonctions de Hecke pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_{p^f})$

- $w \in W$, $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, w-stable;
- $f_{x,S}(A) = \prod_{i \in S} \frac{\det(Aw)_{[k,n],[k,n]}}{\det(Aw)_{[k+1,n],[k+1,n]}}$