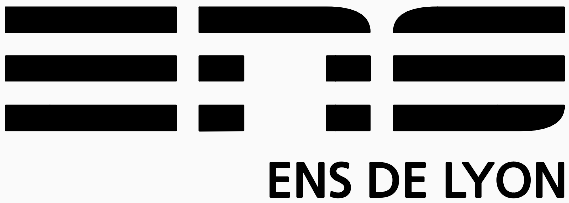
Introduction à la Théorie de Ramsey

Joseph Muller

6 Mars 2018

ENS de Lyon



Sommaire

Le Théorème de Ramsey

- Le Principe des Tiroirs (ou du Pigeonnier)
- Le Problème des Amis et des Inconnus
- Énoncé du Théorème
- Estimations de $R(k, l)$

Le Théorème de Schur

- Énoncé du Théorème
- Estimations de $s(r)$
- Le Grand Théorème de Fermat

Le Théorème de Van der Waerden

- Énoncé du Théorème
- Estimations de $W(k; r)$

Le Théorème de Ramsey

Le Principe des Tiroirs (ou du Pigeonnier)

Théorème

Soit n, m deux entiers naturels. Supposons que l'on souhaite ranger $nm + 1$ chaussettes parmi m tiroirs. Il existe alors un tiroir qui contient au moins $n + 1$ chaussettes.

Le Principe des Tiroirs (ou du Pigeonnier)

Théorème

Soit n, m deux entiers naturels. Supposons que l'on souhaite ranger $nm + 1$ chaussettes parmi m tiroirs. Il existe alors un tiroir qui contient au moins $n + 1$ chaussettes.

Démonstration.

Notons E l'ensemble des chaussettes. Le rangement revient à partitionner E en m parties $(I_k)_{k \in [\![1,m]\!]}$.

Le Principe des Tiroirs (ou du Pigeonnier)

Théorème

Soit n, m deux entiers naturels. Supposons que l'on souhaite ranger $nm + 1$ chaussettes parmi m tiroirs. Il existe alors un tiroir qui contient au moins $n + 1$ chaussettes.

Démonstration.

Notons E l'ensemble des chaussettes. Le rangement revient à partitionner E en m parties $(I_k)_{k \in [\![1,m]\!]}$.

Nous obtenons ainsi l'identité $E = \bigsqcup_{k=1}^{m} I_k$, ce qui implique $Card(E) = \sum_{k=1}^{m} Card(I_k)$.

Le Principe des Tiroirs (ou du Pigeonnier)

Théorème

Soit n, m deux entiers naturels. Supposons que l'on souhaite ranger $nm+1$ chaussettes parmi m tiroirs. Il existe alors un tiroir qui contient au moins $n+1$ chaussettes.

Démonstration.

Notons E l'ensemble des chaussettes. Le rangement revient à partitionner E en m parties $(I_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$.

Nous obtenons ainsi l'identité $E = \bigsqcup_{k=1}^{m} I_k$, ce qui implique $Card(E) = \sum_{k=1}^{m} Card(I_k)$.

Supposons, en vue d'une contradiction, que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $Card(I_k) \leq n$. Alors $nm+1 = Card(E) \leq \sum_{k=1}^{m} n = nm$, ce qui est absurde. □

Le Problème des Amis et des Inconnus

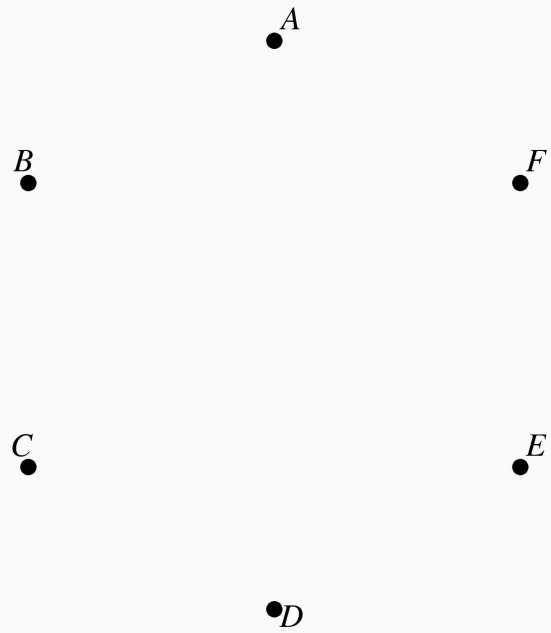
Théorème

Considérons une assemblée de six personnes. Alors trois d'entre-elles se connaissent deux-à-deux, ou trois d'entre-elles sont inconnues l'une de l'autre.

Le Problème des Amis et des Inconnus

Théorème

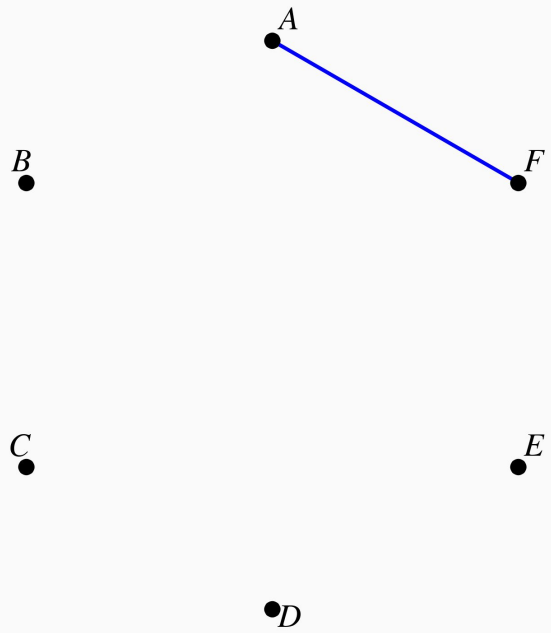
Considérons une assemblée de six personnes. Alors trois d'entre-elles se connaissent deux-à-deux, ou trois d'entre-elles sont inconnues l'une de l'autre.



Le Problème des Amis et des Inconnus

Théorème

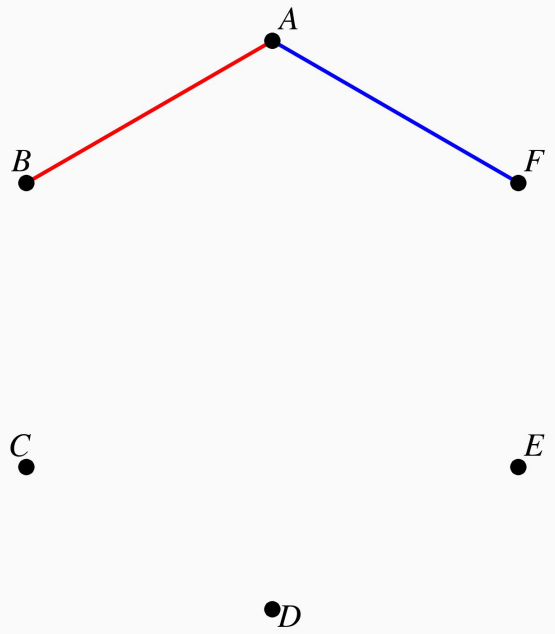
Considérons une assemblée de six personnes. Alors trois d'entre-elles se connaissent deux-à-deux, ou trois d'entre-elles sont inconnues l'une de l'autre.



Le Problème des Amis et des Inconnus

Théorème

Considérons une assemblée de six personnes. Alors trois d'entre-elles se connaissent deux-à-deux, ou trois d'entre-elles sont inconnues l'une de l'autre.



Le Problème des Amis et des Inconnus

Théorème

Considérons une assemblée de six personnes. Alors trois d'entre-elles se connaissent deux-à-deux, ou trois d'entre-elles sont inconnues l'une de l'autre.

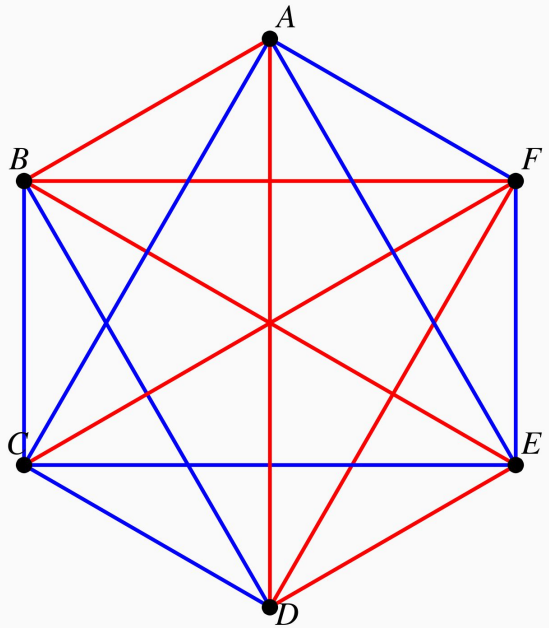


Figure 1 – Les triangles AEF, ACE, BCD sont monochromes.

Le Problème des Amis et des Inconnus

Démonstration.

A est en relation avec 5 autres personnes. Or, $5 = 2 \times 2 + 1$.

Le Problème des Amis et des Inconnus

Démonstration.

A est en relation avec 5 autres personnes. Or, $5 = 2 \times 2 + 1$. D'après le principe des tiroirs, il existe trois autres personnes, disons B, C et D, qui sont toutes des connaissances ou des inconnues pour A. SRLG, on suppose que ce sont des connaissances.

Le Problème des Amis et des Inconnus

Démonstration.

A est en relation avec 5 autres personnes. Or, $5 = 2 \times 2 + 1$.

D'après le principe des tiroirs, il existe trois autres personnes, disons B, C et D, qui sont toutes des connaissances ou des inconnues pour A. SRLG, on suppose que ce sont des connaissances.

Si parmi B, C et D, deux personnes se connaissent, alors elles forment avec A trois personnes qui se connaissent deux-à-deux.

Le Problème des Amis et des Inconnus

Démonstration.
A est en relation avec 5 autres personnes. Or, $5 = 2 \times 2 + 1$.
D'après le principe des tiroirs, il existe trois autres personnes, disons B, C et D, qui sont toutes des connaissances ou des inconnues pour A. SRLG, on suppose que ce sont des connaissances.
Si parmi B, C et D, deux personnes se connaissent, alors elles forment avec A trois personnes qui se connaissent deux-à-deux.
Sinon, B, C et D sont inconnues l'une de l'autre. □

Le Problème des Amis et des Inconnus

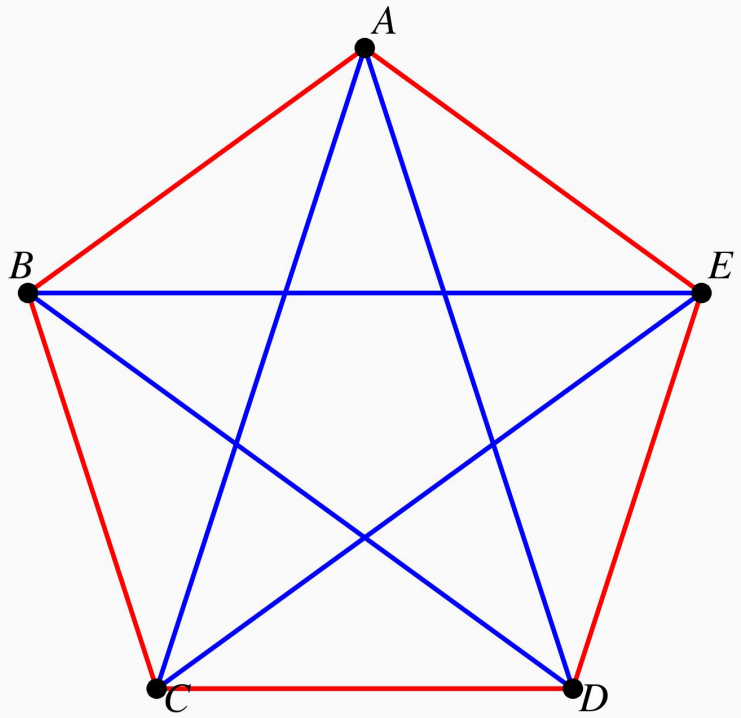


Figure 2 – Un contre-exemple dans le cas d'une assemblée de 5 personnes. Il n'y a aucun triangle monochrome.

Le Théorème de Ramsey

Définition

Soit n un entier naturel. On appelle **graphe complet d'ordre n**, et on note K_n, le graphe contenant n sommets, tous deux-à-deux reliés par une arête.

Définition

Soit n un entier naturel. On appelle **graphe complet d'ordre n**, et on note K_n, le graphe contenant n sommets, tous deux-à-deux reliés par une arête.

Exemples

Figure 3 – K_2

Définition

Soit n un entier naturel. On appelle **graphe complet d'ordre n**, et on note K_n, le graphe contenant n sommets, tous deux-à-deux reliés par une arête.

Exemples

Figure 3 – K_2

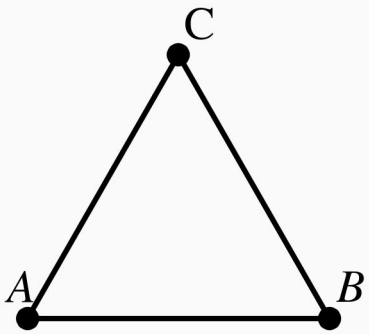


Figure 4 – K_3

Définition

Soit n un entier naturel. On appelle **graphe complet d'ordre n**, et on note K_n, le graphe contenant n sommets, tous deux-à-deux reliés par une arête.

Exemples

Figure 3 – K_2

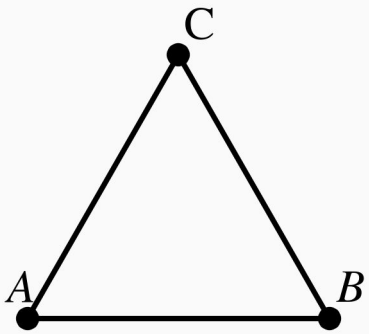


Figure 4 – K_3

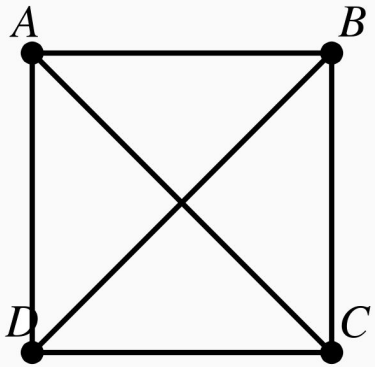


Figure 5 – K_4

Le Théorème de Ramsey

Théorème de Ramsey (1930)

Soient k, l deux entiers naturels ≥ 2. Il existe un plus petit entier naturel $R := R(k, l)$ tel que pour tout coloriage des arêtes de K_R en rouge et en bleu, il existe un sous-graphe K_k bleu ou un sous-graphe K_l rouge.

Les nombres $R(k, l)$ sont appelés les **nombres de Ramsey**.

Le Théorème de Ramsey

Théorème de Ramsey (1930)

Soient k, l deux entiers naturels ≥ 2. Il existe un plus petit entier naturel $R := R(k, l)$ tel que pour tout coloriage des arêtes de K_R en rouge et en bleu, il existe un sous-graphe K_k bleu ou un sous-graphe K_l rouge.

Les nombres $R(k, l)$ sont appelés les **nombres de Ramsey**.

Exemples

- $R(3, 3) = 6$

Le Théorème de Ramsey

Théorème de Ramsey (1930)

Soient k, l deux entiers naturels ≥ 2. Il existe un plus petit entier naturel $R := R(k, l)$ tel que pour tout coloriage des arêtes de K_R en rouge et en bleu, il existe un sous-graphe K_k bleu ou un sous-graphe K_l rouge.

Les nombres $R(k, l)$ sont appelés les **nombres de Ramsey**.

Exemples

- $R(3, 3) = 6$
- $R(2, k) = R(k, 2) = k$

Démonstration.

Nous raisonnons par récurrence sur $k + l \geq 4$.

L'initialisation a lieu pour $k = l = 2$. Nous avons vu que $R(2, 2)$ existe et vaut 2.

Démonstration.

Nous raisonnons par récurrence sur $k + l \geq 4$.

L'initialisation a lieu pour $k = l = 2$. Nous avons vu que $R(2, 2)$ existe et vaut 2.

Supposons désormais que $R(a, b)$ existe dès lors que $a + b = N$ où $N \geq 4$ est fixé.

Démonstration.

Nous raisonnons par récurrence sur $k + l \geq 4$.

L'initialisation a lieu pour $k = l = 2$. Nous avons vu que $R(2, 2)$ existe et vaut 2.

Supposons désormais que $R(a, b)$ existe dès lors que $a + b = N$ où $N \geq 4$ est fixé. Soient k, l tels que $k + l = N + 1$. On peut supposer que $k, l \geq 3$.

Démonstration.

Nous raisonnons par récurrence sur $k + l \geq 4$.

L'initialisation a lieu pour $k = l = 2$. Nous avons vu que $R(2, 2)$ existe et vaut 2.

Supposons désormais que $R(a, b)$ existe dès lors que $a + b = N$ où $N \geq 4$ est fixé. Soient k, l tels que $k + l = N + 1$. On peut supposer que $k, l \geq 3$. Posons alors $R = R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$, et considérons un coloriage des arêtes de K_R en rouge et en bleu.

Démonstration.

Soit v un sommet du graphe. On note A (resp. B) le nombre de sommets reliés à v par une arête rouge (resp. bleue).

Démonstration.

Soit v un sommet du graphe. On note A (resp. B) le nombre de sommets reliés à v par une arête rouge (resp. bleue). Puisque $A + B = R - 1 = R(k-1, l) + R(k, l-1) - 1$, on sait que $A \geq R(k, l-1)$ ou $B \geq R(k-1, l)$. SRLG, supposons la première inégalité vraie.

Démonstration.

Soit v un sommet du graphe. On note A (resp. B) le nombre de sommets reliés à v par une arête rouge (resp. bleue). Puisque $A + B = R - 1 = R(k-1, l) + R(k, l-1) - 1$, on sait que $A \geq R(k, l-1)$ ou $B \geq R(k-1, l)$. SRLG, supposons la première inégalité vraie.

Nous savons donc que le graphe K_A formés par ces sommets contient un sous-graphe K_k bleu ou un sous-graphe K_{l-1} rouge.

Démonstration.

Soit v un sommet du graphe. On note A (resp. B) le nombre de sommets reliés à v par une arête rouge (resp. bleue). Puisque $A + B = R - 1 = R(k-1, l) + R(k, l-1) - 1$, on sait que $A \geq R(k, l-1)$ ou $B \geq R(k-1, l)$. SRLG, supposons la première inégalité vraie.

Nous savons donc que le graphe K_A formés par ces sommets contient un sous-graphe K_k bleu ou un sous-graphe K_{l-1} rouge. Dans le premier cas, c'est fini. Dans le second cas, en rajoutant v aux $l-1$ sommets, nous obtenons un sous-graphe K_l rouge.

Démonstration.

Soit v un sommet du graphe. On note A (resp. B) le nombre de sommets reliés à v par une arête rouge (resp. bleue). Puisque $A + B = R - 1 = R(k-1, l) + R(k, l-1) - 1$, on sait que $A \geq R(k, l-1)$ ou $B \geq R(k-1, l)$. SRLG, supposons la première inégalité vraie.

Nous savons donc que le graphe K_A formés par ces sommets contient un sous-graphe K_k bleu ou un sous-graphe K_{l-1} rouge. Dans le premier cas, c'est fini. Dans le second cas, en rajoutant v aux $l-1$ sommets, nous obtenons un sous-graphe K_l rouge.

Ainsi, $R(k, l)$ existe et $R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1)$ □

Le Théorème de Ramsey

Théorème de Ramsey (1930)

Soit $r \in \mathbf{N}^*$ et $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ des entiers. Il existe un plus petit entier $R := R(k_1, \ldots, k_r)$ tel que pour tout coloriage des arêtes de K_R en r couleurs $c_1, \ldots, c_r$, il existe un sous-graphe K_{k_i} de couleur c_i pour un certain $i \in [\![1, r]\!]$

Le Théorème de Ramsey

Théorème de Ramsey (1930)

Soit $r \in \mathbf{N}^*$ et $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ des entiers. Il existe un plus petit entier $R := R(k_1, \ldots, k_r)$ tel que pour tout coloriage des arêtes de K_R en r couleurs $c_1, \ldots, c_r$, il existe un sous-graphe K_{k_i} de couleur c_i pour un certain $i \in [\![1, r]\!]$

Démonstration.

Raisonnement par récurrence sur r, en exploitant le cas connu où $r = 2$. (Exercice laissé au lecteur). □

Le Théorème de Ramsey

Théorème de Ramsey (1930)

Soit $r \in \mathbf{N}^*$ et $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ des entiers. Il existe un plus petit entier $R := R(k_1, \ldots, k_r)$ tel que pour tout coloriage des arêtes de K_R en r couleurs $c_1, \ldots, c_r$, il existe un sous-graphe K_{k_i} de couleur c_i pour un certain $i \in [\![1, r]\!]$

Démonstration.

Raisonnement par récurrence sur r, en exploitant le cas connu où $r = 2$. (Exercice laissé au lecteur). □

Exemples

- $R(3, 4) = 9$
- $R(3, 5) = 14$
- $R(4, 4) = 18$
- $R(3, 3, 3) = 17$

Estimations de $R(k, l)$

Proposition

Pour tous entiers naturels $k, l \geq 2$, on a

$$R(k, l) \leq \binom{k + l - 2}{k - 1}$$

Démonstration.

C'est une conséquence de l'inégalité
$R(k, l) \leq R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$. □

Estimations de $R(k, l)$

Proposition

Pour tous entiers naturels $k, l \geq 2$, on a

$$R(k, l) \leq \binom{k + l - 2}{k - 1}$$

Démonstration.

C'est une conséquence de l'inégalité

$R(k, l) \leq R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$. □

Proposition

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$R(k, k) \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$$

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Soient $n \geq k$ deux entiers. On colore les arêtes de K_n aléatoirement en bleu et rouge.

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Soient $n \geq k$ deux entiers. On colore les arêtes de K_n aléatoirement en bleu et rouge.

Puisque le nombre d'arêtes de K_n est $\binom{n}{2}$, le nombre total de coloriages possibles est $2^{\binom{n}{2}}$.

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Soient $n \geq k$ deux entiers. On colore les arêtes de K_n aléatoirement en bleu et rouge.

Puisque le nombre d'arêtes de K_n est $\binom{n}{2}$, le nombre total de coloriages possibles est $2^{\binom{n}{2}}$.

Pour un ensemble fixé de k sommets, il existe $2 \times 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ coloriages tels que cet ensemble soit monochrome.

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Soient $n \geq k$ deux entiers. On colore les arêtes de K_n aléatoirement en bleu et rouge.

Puisque le nombre d'arêtes de K_n est $\binom{n}{2}$, le nombre total de coloriages possibles est $2^{\binom{n}{2}}$.

Pour un ensemble fixé de k sommets, il existe $2 \times 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ coloriages tels que cet ensemble soit monochrome.

Ainsi, la probabilité que cet ensemble de k sommets soit monochrome est $\frac{2}{2^{\binom{k}{2}}} = 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}}$.

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Notons p_k la probabilité qu'il existe un sous-graphe K_k monochrome.

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Notons p_k la probabilité qu'il existe un sous-graphe K_k monochrome.

Dans K_n, il existe $\binom{n}{k}$ sous-graphes K_k différents. Notons E l'ensemble de ces sous-graphes.

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Notons p_k la probabilité qu'il existe un sous-graphe K_k monochrome.

Dans K_n, il existe $\binom{n}{k}$ sous-graphes K_k différents. Notons E l'ensemble de ces sous-graphes. Alors

$$\begin{aligned} p_k &\leq \sum_{\Omega \in E} \mathbb{P}(\Omega \textit{ est monochrome}) \\ &\leq \sum_{\Omega \in E} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} \\ &\leq \binom{n}{k} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} \end{aligned}$$

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Or, par définition, $R(k, k)$ est plus petit entier n pour lequel $p_k = 1$.

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Or, par définition, $R(k, k)$ est plus petit entier n pour lequel $p_k = 1$. Ainsi, si $\binom{n}{k} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} < 1$ alors $R(k, k) > n$.

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Or, par définition, $R(k, k)$ est plus petit entier n pour lequel $p_k = 1$. Ainsi, si $\binom{n}{k} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} < 1$ alors $R(k, k) > n$.

Posons $n = \lfloor 2^{\frac{k-1}{2}} \rfloor$.

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Or, par définition, $R(k, k)$ est plus petit entier n pour lequel $p_k = 1$. Ainsi, si $\binom{n}{k} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} < 1$ alors $R(k, k) > n$.

Posons $n = \lfloor 2^{\frac{k-1}{2}} \rfloor$. On obtient alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2} \leq 2^{\frac{k(k-1)}{2}-1}$$

Estimations de $R(k, l)$

Démonstration.

Or, par définition, $R(k, k)$ est plus petit entier n pour lequel $p_k = 1$. Ainsi, si $\binom{n}{k} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} < 1$ alors $R(k, k) > n$.

Posons $n = \lfloor 2^{\frac{k-1}{2}} \rfloor$. On obtient alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2} \leq 2^{\frac{k(k-1)}{2}-1}$$

Par conséquent, $\binom{n}{k} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} < 1$ □

Estimations de $R(k, l)$

Remarque

Cette preuve implique en fait un résultat asymptotique plus fort.

Proposition

Pour k suffisamment grand,

$$R(k,k) \geq \frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{k/2}$$

Estimations de $R(k, l)$

Parmi les meilleures estimations connues de nos jours, nous pouvons donner l'encadrement suivant.

Théorème

Pour tout entier $k \geq 3$, il existe une constante C_k telle que pour tout entier l suffisamment grand,

$$C_k \frac{l^{\frac{k+1}{2}}}{(\log l)^{\frac{k+1}{2} - \frac{1}{k-2}}} \leq R(k, l) \leq C_k \frac{l^{k-1}}{(\log l)^{k-2}}$$

Le Théorème de Schur

Le Théorème de Schur

Tout au long de cette section, nous nous intéresserons à l'équation suivante

$$x + y = z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \tag{E}$$

Le Théorème de Schur

Tout au long de cette section, nous nous intéresserons à l'équation suivante

$$x + y = z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \tag{E}$$

Si n, r sont deux entiers naturels, **un coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs** est une application $\chi : [\![1, n]\!] \to \{c_1, \ldots, c_r\}$. Les c_i sont appelés les **couleurs**.

Le Théorème de Schur

Tout au long de cette section, nous nous intéresserons à l'équation suivante

$$x + y = z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \tag{E}$$

Si n, r sont deux entiers naturels, **un coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs** est une application $\chi : [\![1, n]\!] \to \{c_1, \ldots, c_r\}$. Les c_i sont appelés les **couleurs**.
Étant donné un coloriage χ, un triplet $(x, y, z) \in [\![1, n]\!]^3$ est une **solution monochrome de (E)** si $x + y = z$ et si $\chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$.

Le Théorème de Schur

Théorème de Schur (1916)

Soit r un entier naturel. Il existe un plus petit entier $s := s(r)$ tel que pour tout coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs, il existe une solution monochrome de (E).

Le Théorème de Schur

Théorème de Schur (1916)

Soit r un entier naturel. Il existe un plus petit entier $s := s(r)$ tel que pour tout coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs, il existe une solution monochrome de (E).

Exemple

Montrons que $s(2) = 5$. Essayons de construire un coloriage de $[\![1, 5]\!]$ en rouge et bleu sans solution monochrome.

Le Théorème de Schur

Théorème de Schur (1916)

Soit r un entier naturel. Il existe un plus petit entier $s := s(r)$ tel que pour tout coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs, il existe une solution monochrome de (E).

Exemple

Montrons que $s(2) = 5$. Essayons de construire un coloriage de $[\![1, 5]\!]$ en rouge et bleu sans solution monochrome.

1

Le Théorème de Schur

Théorème de Schur (1916)

Soit r un entier naturel. Il existe un plus petit entier $s := s(r)$ tel que pour tout coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs, il existe une solution monochrome de (E).

Exemple

Montrons que $s(2) = 5$. Essayons de construire un coloriage de $[\![1, 5]\!]$ en rouge et bleu sans solution monochrome.

1 2

Le Théorème de Schur

Théorème de Schur (1916)

Soit r un entier naturel. Il existe un plus petit entier $s := s(r)$ tel que pour tout coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs, il existe une solution monochrome de (E).

Exemple

Montrons que $s(2) = 5$. Essayons de construire un coloriage de $[\![1, 5]\!]$ en rouge et bleu sans solution monochrome.

1 2 4

Le Théorème de Schur

Théorème de Schur (1916)

Soit r un entier naturel. Il existe un plus petit entier $s := s(r)$ tel que pour tout coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs, il existe une solution monochrome de (E).

Exemple

Montrons que $s(2) = 5$. Essayons de construire un coloriage de $[\![1, 5]\!]$ en rouge et bleu sans solution monochrome.

1 2 3 4

Le Théorème de Schur

Théorème de Schur (1916)

Soit r un entier naturel. Il existe un plus petit entier $s := s(r)$ tel que pour tout coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs, il existe une solution monochrome de (E).

Exemple

Montrons que $s(2) = 5$. Essayons de construire un coloriage de $[\![1, 5]\!]$ en rouge et bleu sans solution monochrome.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \begin{cases} 5\ ? \\ 5\ ? \end{cases}$$

Le Théorème de Schur

Démonstration.

Soit $r \geq 1$. Posons $R := R(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r \text{ fois}})$, et considérons un coloriage $\chi : [\![1, R-1]\!] \to \{c_1, \ldots, c_r\}$.

Démonstration.

Soit $r \geq 1$. Posons $R := R(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r \text{ fois}})$, et considérons un coloriage $\chi : [\![1, R-1]\!] \to \{c_1, \ldots, c_r\}$. Numérotons les sommets de K_R de 1 à R, et définissons un coloriage de ses arêtes de la façon suivante.

Démonstration.

Soit $r \geq 1$. Posons $R := R(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r \text{ fois}})$, et considérons un coloriage $\chi : [\![1, R-1]\!] \to \{c_1, \ldots, c_r\}$. Numérotons les sommets de K_R de 1 à R, et définissons un coloriage de ses arêtes de la façon suivante. L'arête reliant i à j est de couleur c_k si $\chi(|\, i - j \,|) = c_k$.

Démonstration.

Soit $r \geq 1$. Posons $R := R(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r \text{ fois}})$, et considérons un coloriage $\chi : [\![1, R-1]\!] \to \{c_1, \ldots, c_r\}$. Numérotons les sommets de K_R de 1 à R, et définissons un coloriage de ses arêtes de la façon suivante. L'arête reliant i à j est de couleur c_k si $\chi(|\, i - j \,|) = c_k$.
D'après la définition de R, il existe un triangle monochrome dans K_R, c'est-à-dire trois entiers $x < y < z$ reliés par des arêtes de même couleur.

Démonstration.

Soit $r \geq 1$. Posons $R := R(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r \text{ fois}})$, et considérons un coloriage $\chi : [\![1, R-1]\!] \to \{c_1, \ldots, c_r\}$. Numérotons les sommets de K_R de 1 à R, et définissons un coloriage de ses arêtes de la façon suivante. L'arête reliant i à j est de couleur c_k si $\chi(|\, i - j \,|) = c_k$.

D'après la définition de R, il existe un triangle monochrome dans K_R, c'est-à-dire trois entiers $x < y < z$ reliés par des arêtes de même couleur.

Posons $X := y - x$, $Y := z - y$ et $Z := z - x$. On a alors $X + Y = Z$ et $\chi(X) = \chi(Y) = \chi(Z)$.

Démonstration.

Soit $r \geq 1$. Posons $R := R(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r \text{ fois}})$, et considérons un coloriage $\chi : [\![1, R-1]\!] \to \{c_1, \ldots, c_r\}$. Numérotons les sommets de K_R de 1 à R, et définissons un coloriage de ses arêtes de la façon suivante. L'arête reliant i à j est de couleur c_k si $\chi(|\, i - j \,|) = c_k$.
D'après la définition de R, il existe un triangle monochrome dans K_R, c'est-à-dire trois entiers $x < y < z$ reliés par des arêtes de même couleur.
Posons $X := y - x$, $Y := z - y$ et $Z := z - x$. On a alors $X + Y = Z$ et $\chi(X) = \chi(Y) = \chi(Z)$.
Ainsi, $s(r)$ existe et $s(r) \leq R(3, \ldots, 3) - 1$. □

Estimations de $s(r)$

Petites valeurs

- $s(3) = 13$
- $s(4) = 44$
- $s(5)$ est quelque part entre 160 et 305

Estimations de $s(r)$

Petites valeurs

- $s(3) = 13$
- $s(4) = 44$
- $s(5)$ est quelque part entre 160 et 305

Proposition

Pour tout entier $r \geq 1$,

$$\frac{3^r + 1}{2} \leq s(r) \leq 3r! - 1$$

Nous omettons la preuve de cet encadrement.

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Grand Théorème de Fermat

Soit $n > 2$ un entier. Il n'existe pas d'entiers naturels x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$ avec $xyz \neq 0$.

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Grand Théorème de Fermat

Soit $n > 2$ un entier. Il n'existe pas d'entiers naturels x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$ avec $xyz \neq 0$.

Le théorème de Schur permet de montrer que le grand théorème de Fermat devient faux lorsqu'on remplace $=$ par $\equiv$.

Théorème

Soit $n \geq 1$ un entier. Il existe un nombre premier q tel que pour tout nombre premier $p \geq q$, l'équation $x^n + y^n \equiv z^n (mod\ p)$ admet une solution entière avec $xyz \not\equiv 0 (mod\ p)$

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Fixons $n \geq 1$ et $p > s(n)$ un nombre premier.

Si x est un entier, nous noterons $\overline{x}$ sa classe dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Fixons $n \geq 1$ et $p > s(n)$ un nombre premier.

Si x est un entier, nous noterons $\overline{x}$ sa classe dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Posons $A_n := \{\overline{a^n} \mid a \in [\![1, p-1]\!]\} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Fixons $n \geq 1$ et $p > s(n)$ un nombre premier.

Si x est un entier, nous noterons $\overline{x}$ sa classe dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Posons $A_n := \{\overline{a^n} \mid a \in [\![1, p-1]\!]\} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Définissons une relation d'équivalence sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ par :

$$\overline{x} \sim \overline{y} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} \mid \overline{x} \equiv \overline{ya^n}$$

C'est bien une relation d'équivalence car p est premier.

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Fixons $n \geq 1$ et $p > s(n)$ un nombre premier.

Si x est un entier, nous noterons $\overline{x}$ sa classe dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Posons $A_n := \{\overline{a^n} \mid a \in [\![1, p-1]\!]\} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Définissons une relation d'équivalence sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ par :

$$\overline{x} \sim \overline{y} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} \mid \overline{x} \equiv \overline{ya^n}$$

C'est bien une relation d'équivalence car p est premier.

Les classes d'équivalence sont de la forme

$$\overline{a_i}A_n := \{\overline{a_i}t \mid t \in A_n\}$$

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Les classes d'équivalence forment une partition de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

Autrement dit, on peut trouver $a_1, \ldots, a_k \in [\![1, p-1]\!]$ tels que

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \overline{a_1}A_n \sqcup \ldots \sqcup \overline{a_k}A_n$$

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Les classes d'équivalence forment une partition de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

Autrement dit, on peut trouver $a_1, \ldots, a_k \in [\![1, p-1]\!]$ tels que

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \overline{a_1}A_n \sqcup \ldots \sqcup \overline{a_k}A_n$$

Nous admettons que l'entier k est égal à $pgcd(n, p-1)$.

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Les classes d'équivalence forment une partition de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

Autrement dit, on peut trouver $a_1, \ldots, a_k \in [\![1, p-1]\!]$ tels que

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \overline{a_1}A_n \sqcup \ldots \sqcup \overline{a_k}A_n$$

Nous admettons que l'entier k est égal à $pgcd(n, p-1)$.

On définit le coloriage $\chi : [\![1, p-1]\!] \to \{c_1, \ldots, c_k\}$ par $\chi(x) = c_i \Leftrightarrow \overline{x} \in \overline{a_i}A_n$.

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Les classes d'équivalence forment une partition de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
Autrement dit, on peut trouver $a_1, \ldots, a_k \in [\![1, p-1]\!]$ tels que

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \overline{a_1}A_n \sqcup \ldots \sqcup \overline{a_k}A_n$$

Nous admettons que l'entier k est égal à $pgcd(n, p-1)$.
On définit le coloriage $\chi : [\![1, p-1]\!] \to \{c_1, \ldots, c_k\}$ par
$\chi(x) = c_i \Leftrightarrow \overline{x} \in \overline{a_i}A_n$.
Puisque $p - 1 \geq s(n)$ et $k \leq n$, d'après le théorème de Schur, il existe trois entiers x, y, z dans $[\![1, p-1]\!]$ tels que $x + y = z$ et $\chi(x) = \chi(y) = \chi(z) = c_i$.

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Cela signifie que $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ sont dans la même classe d'équivalence $\overline{a_i}A_n$, ie il existe α, β, γ dans $[\![1, p-1]\!]$ tels que

$$x \equiv a_i\alpha^n (mod\ p)\ ;\ y \equiv a_i\beta^n (mod\ p)\ ;\ z \equiv a_i\gamma^n (mod\ p)$$

Lien avec le Grand Théorème de Fermat

Démonstration.

Cela signifie que $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ sont dans la même classe d'équivalence $\overline{a_i}A_n$, ie il existe α, β, γ dans $[\![1, p-1]\!]$ tels que

$$x \equiv a_i\alpha^n (mod\ p)\ ;\ y \equiv a_i\beta^n (mod\ p)\ ;\ z \equiv a_i\gamma^n (mod\ p)$$

L'égalité $x + y = z$ implique alors

$$a_i\alpha^n + a_i\beta^n \equiv a_i\gamma^n (mod\ p)$$

$$\alpha^n + \beta^n \equiv \gamma^n (mod\ p)$$

□

Le Théorème de Van der Waerden

Le Théorème de Van der Waerden

Soit $k \geq 2$ un entier. Une **progression arithmétique de longueur** k est une séquence d'entiers de la forme

$$a\ ,\ a+r\ ,\ a+2r\ \ldots\ a+(k-1)r$$

Le Théorème de Van der Waerden

Soit $k \geq 2$ un entier. Une **progression arithmétique de longueur** k est une séquence d'entiers de la forme

$$a\ ,\ a+r\ ,\ a+2r\ \ldots\ a+(k-1)r$$

Théorème de Van der Waerden (1927)

Soient $k \geq 2, r \geq 1$ deux entiers. Il existe un plus petit entier $W := W(k;r)$ tel que pour tout coloriage de $[\![1, W]\!]$ en r couleurs, il existe une progression arithmétique monochrome de longueur k.

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2;r) = r+1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r+1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3;2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2; r) = r + 1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r + 1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3; 2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemple

Montrons que $W(2;r) = r+1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r+1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3;2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

$$\begin{cases} 1\ ? \\ 1\ ? \end{cases} \quad 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \qquad\qquad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

Exemple

Montrons que $W(2;r) = r+1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r+1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3;2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

$$\begin{cases} 1\ ? \\ 1\ ? \end{cases} \quad 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \qquad\qquad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

Exemple

Montrons que $W(2;r) = r+1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r+1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3;2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

$$\begin{cases} 1\ ? \\ 1\ ? \end{cases} \quad 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \qquad\qquad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

Exemple

Montrons que $W(2;r) = r+1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r+1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3;2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

$$\begin{cases} 1\ ? \\ 1\ ? \end{cases} \quad 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \qquad\qquad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

Exemple

Montrons que $W(2;r) = r+1$.

En effet, dans tout coloriage des entiers de 1 à $r+1$ en r couleurs, il y a une progression arithmétique monochrome de longueur 2.

Exemple

Montrons que $W(3;2) = 9$.

Essayons de colorer les entiers de 1 à 9 en rouge et bleu, sans progression arithmétique monochrome de longueur 3.

$$\begin{cases} 1\ ? \\ 1\ ? \end{cases} \quad 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \qquad\qquad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \quad \begin{cases} 9\ ? \\ 9\ ? \end{cases}$$

Estimations de $W(k;r)$

Petites valeurs

- $W(3;2) = 9$
- $W(3;3) = 27$
- $W(3;4) = 76$
- $W(4;2) = 35$
- $W(5;2) = 178$

Estimations de $W(k;r)$

Petites valeurs

- $W(3;2) = 9$
- $W(3;3) = 27$
- $W(3;4) = 76$
- $W(4;2) = 35$
- $W(5;2) = 178$

Proposition (Van der Waerden)

Soit $k \geq 2$ un entier. Alors $W(k;2) \leq ack(k)$.

Estimations de $W(k;r)$

Petites valeurs

- $W(3;2) = 9$
- $W(3;3) = 27$
- $W(3;4) = 76$
- $W(4;2) = 35$
- $W(5;2) = 178$

Proposition (Van der Waerden)

Soit $k \geq 2$ un entier. Alors $W(k;2) \leq ack(k)$.

$$ack(0) = 1 \quad ack(1) = 3 \quad ack(2) = 7 \quad ack(3) = 61$$

Estimations de $W(k;r)$

Petites valeurs

- $W(3;2) = 9$
- $W(3;3) = 27$
- $W(3;4) = 76$
- $W(4;2) = 35$
- $W(5;2) = 178$

Proposition (Van der Waerden)

Soit $k \geq 2$ un entier. Alors $W(k;2) \leq ack(k)$.

$$ack(0) = 1 \quad ack(1) = 3 \quad ack(2) = 7 \quad ack(3) = 61$$

$$ack(4) = 2^{2^{65536}} - 3 \ \ldots$$

Estimations de $W(k;r)$

Pendant de longues années, le mathématicien Ronald Graham offrait un prix de 1000 dollars à celui qui montrerait

$$W(k;2) \leq \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k \text{ fois } 2}$$

Estimations de $W(k;r)$

Pendant de longues années, le mathématicien Ronald Graham offrait un prix de 1000 dollars à celui qui montrerait

$$W(k;2) \leq \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k \text{ fois } 2}$$

Proposition (Gowers)

Soit $k \geq 2$ un entier. Alors $W(k;2) \leq 2^{2^{2^{2^{2^{k+9}}}}}$

Plus généralement, si $r \geq 2$, $W(k;r) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}$

Estimations de $W(k;r)$

De nos jours, Graham offre toujours 1000 dollars à celui qui montrerait

$$W(k;2) \leq 2^{k^2}$$

Estimations de $W(k;r)$

De nos jours, Graham offre toujours 1000 dollars à celui qui montrerait

$$W(k;2) \leq 2^{k^2}$$

Proposition

Pour tout $r \geq 2$ et k suffisamment grand,

$$W(k;r) > \frac{r^k}{ekr}(1+o(1))$$

Bibliographie

- Landman, Bruce M. and Robertson, Aaron. *Ramsey Theory on the Integers*. American Mathematical Society, 2004.
- Delahaye, Jean-Paul, *Le désordre total n'existe pas*. Pour la Science, n° 376 (février 2009), p. 86-91.
- Chomette, Thomas. *Jeux sur les graphes et théorème de Ramsey*. ENS, 2003. 9p. `http://culturemath.ens.fr/maths/pdf/jeux/ramsey.pdf`
- Guillopé, Laurent. *Graphes*. Université de Nantes, 2010-2011. p. 20-26. `http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~guillope/l3-gr/gr_pub.pdf`
- Gasarch William et Parrish Andy. *Purely Combinatorial Proofs of Van der Waerden-Type theorems*. University of Maryland, 2009. `http://www.cs.umd.edu/~gasarch/BLOGPAPERS/GPbook.pdf`