# SUR LE DÉVELOPPEMENT SPECTRAL DE LA FORMULE DES TRACES D'ARTHUR-SELBERG SUR LES CORPS DE FONCTIONS II

NGO DAC TUAN

Abstract. In this paper, we give the fine spectral expansion of the Arthur-Selberg trace formula on function fields for a reductive group over a finite field. It is analogue to the work of Arthur on number fields and extends the work of Lafforgue on function fields for general linear groups.

On établit le développement spectral de la formule des traces d'Arthur-Selberg sur les corps de fonctions pour un groupe réductif connexe sur un corps de fonctions en partant seulement du théorème de décomposition spectrale de Langlands. Notre preuve généralise la méthode de Lafforgue dans le cas des groupes linéaires $\mathrm{GL}(r)$.

## Introduction

La formule des traces joue un rôle très important dans la théorie des formes automorphes. Elle a été développé dans une séries d'articles par Arthur sur les corps de nombres. Rappelons brièvement de quoi il s'agit. Soit $G$ un groupe réductif connexe sur un corps de nombres $F$ dont l'anneau des adèles sera noté $\mathbb{A}$. Pour une fonction test convenable $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, on s'intéresse à l'opérateur de convolution $R(f)$ sur $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$:

$$(R(f)\phi)(g) = \int_{G(\mathbb{A})} f(h)\phi(gh)dh.$$

Il admet un noyau défini sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times G(F)\backslash G(\mathbb{A})$:

$$K(x,y) = \sum_{\gamma\in G(F)} f(x^{-1}\gamma y).$$

En général, ce noyau n'est pas intégrable sur la diagonale. Ainsi, Arthur a modifié ce noyau en ajoutant des termes correctifs pour qu'il converge. Le noyau tronqué $K^T$ qui dépend d'un paramètre de troncatures $T$ admet une expression géométrique et une expression spectrale, ce qui donne la première forme de la formule des traces - une égalité entre un côté dit *géométrique* et l'autre côté dit *spectral*. Puis, Arthur a raffiné ces expressions géométriques et spectrales pour obtenir une nouvelle formule plus explicite, donc plus facile à manipuler. Du côté géométrique, il s'agit d'exprimer les termes en fonctions des intégrales orbitales et des intégrales orbitales pondérées. Du côté spectral, il s'agit d'écrire les termes en fonctions des traces pondérées. On obtient ainsi une version plus fine de la formule des traces non-invariante. Pour

2000 *Mathematics Subject Classification.* 11F72, 11F70, 22E55.

*Key words and phrases.* Arthur-Selberg trace formula, function fields, Harder-Narasimhan filtration.

beaucoup d'applications, il faut rendre la formule des traces invariante puis stable, ce qui a été faite par Arthur. On renvoie le lecteur à l'article [8] pour une excellente introduction à la formule des traces sur les corps de nombres.

Désormais, on se place sur les corps de fonctions. Soient $F$ un corps de fontions sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ dont l'anneau des adèles est noté encore $\mathbb{A}$ et $G$ un groupe réductif connexe sur $F$. Dans les travaux de Drinfeld [11, 12], Laumon [17] et Lafforgue [16] sur la correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur les corps de fonctions, les auteurs ont besoin seulement d'une version fine de la formule des traces non-invariante. Dans la perspective de généraliser cette correspondance dans le cadre plus général, voir par exemple [13], il est naturel de transposer sur les corps de fonctions la version fine de la formule des traces d'Arthur-Selberg non-invariante pour $G$.

Désormais, nous nous intéressons au côté spectral, autrement dit nous souhaitons obtenir le développement spectral de la formule des traces similaire à celui sur un corps de nombres dû à Arthur [5]. Laumon [17] a démontré une partie du développement spectral pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}(n)$ en adaptant les arguments d'Arthur sur les corps de fonctions. Puis Lafforgue a démontré tout le développement spectral, toujours pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}(n)$. Sa preuve est plus directe que celle d'Arthur, et elle repose sur la décomposition spectrale de Langlands et sur la notion de filtration de Harder-Narasimhan associé à un élément dans $G(\mathbb{A})$. Dans l'article [22], nous considérons le cas où $G$ est déployé sur $\mathbb{F}_q$. Si l'on note $X$ la courbe algébrique projective lisse géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$ dont le corps de fonctions est $F$, à tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, on associe un $G$-fibré principal $E$ sur $X$ et définit la filtration de Harder-Narasimhan de $g$ comme la réduction canonique associé à $E$. Après avoir disposé d'une bonne définition de filtration de Harder-Narasimhan, nous étendons sans difficultés les arguments de Lafforgue pour obtenir le développement spectral de la formule des traces pour $G$.

Dans cet article, nous traitons le cas général. La seule difficulté technique réside dans le fait que l'on ne dipose pas d'une définition évidente de la filtration de Harder-Narasimhan associé à un élément dans $G(\mathbb{A})$. Pour la surmonter, il nous faut revenir à la façon que Behrend a démontré l'existence et l'unicité de la réduction canonique d'un schéma en groupes réductifs sur $X$ [9]. Elle repose sur la notion de polyèdre complémentaire qui n'est rien d'autres que celle de famille orthogonale positive au sens d'Arthur. Armé de cette définition, on peut énoncer le théorème principal de cet article:

**Théorème.** *Avec les notations ci-dessus, soient $J$ un sous-groupe discret cocompact de $A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A})$ où $A_G$ est le centre de $G$, $f$ une fonction test convenable et $p$ un paramètre de troncatures convenable. Alors, la trace tronqué d'Arthur $\mathrm{Tr}^{\leq p}(f)$ s'écrit comme*

$$\mathrm{Tr}^{\leq p}(f) = \sum_{(P,\pi)} \mathrm{Tr}^p_{(P,\pi)}(f)$$

*où la somme parcourt l'ensemble des paires discrètes $(P,\pi)$ avec $\pi$ unitaire.*

*De plus, pour une paire discrète $(P,\pi)$ avec $\pi$ unitaire, alors*

$$\mathrm{Tr}^p_{(P,\pi)}(f) = \frac{1}{|\,\mathrm{Fixe}(\pi)\,|}\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in\mathrm{Fixe}(\pi)}\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}}\mathrm{Tr}(M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma))\cdot d\lambda_{P_\sigma}$$

*où $M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma)$ est un opérateur tronqué sur $L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$.*

L'article est organisé ainsi. La première section introduit des notations dont on aura besoin. La deuxième section est la section clef de cet article où nous introduisons la notion de filtration de Harder-Narasimhan et vérifions ses propriétés usuelles. La troisième section rappelle la décomposition spectrale de Langlands, ce qui est bien connue par les experts. Enfin, la dernière section définit la trace tronquée d'Arthur et énonce le développement spectral de la formule des traces.

**Remerciements.** Je voudrais remercier Laurent Lafforgue et Ngo Bao Chau pour leurs encouragements et pour d'utiles discussions. Une partie de ce travail a été faite lorsque j'ai visité le Max-Planck Insitute for Mathematics à Bonn et l'Insitute for Advanced Study à Princeton. Je remercie ces institutions pour leur hospitalité et leur support.

## 1. Préliminaires

1.1. On fixe une fois pour toutes $F$ un corps de fonctions sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. On fixe aussi un groupe réductif connexe $G$ sur $F$. On note $X(G)$ le groupe des caractères sur $F$ de $G$; c'est un groupe abélien libre. Tous sous-groupes paraboliques ou sous-groupes de Lévi de $G$ seront définis sur $F$. Soit $M$ un sous-groupe de Lévi de $G$; on notera $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi de $G$ contenant $M$, $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $G$ contenant $M$, et $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $G$ admettant $M$ comme un sous-groupe de Lévi. Ces ensembles sont finis.

On choisit un sous-groupe parabolique minimal $P_0$ et $M_0$ un sous-groupe de Lévi de $P_0$. Par la suite, on utilisera $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$) à la place de $\mathcal{L}(M_0)$ (resp. $\mathcal{P}(M_0)$, $\mathcal{F}(M_0)$). On note $T_0$ le tore déployé maximal du centre de $M_0$, puis $\Delta_0$ l'ensemble de racines simples de $G$ par rapport à $(T_0,P_0)$ et $W$ le groupe de Weyl de $G$ qui peut s'identifier à un sous-groupe de $G(F)$. Pour tout sous-groupe parabolique $P\in\mathcal{F}$, on notera $W_P = W\cap M_P$. On désigne par $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard - ceux qui contiennent $P_0$. C'est un ensemble fini qui est en bijection avec les sous-ensembles de $\Delta_0$: $G$ correspond à l'ensemble vide, $P_0$ correspond à $\Delta_0$.

1.2. Soit $P\in\mathcal{F}$ un sous-groupe parabolique. Il admet une décomposition canonique de Lévi $P = M_PN_P$, avec $M_P\in\mathcal{L}$. On pose $\mathfrak{a}_P^* = X(M_P)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ et $\mathfrak{a}_P = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(M_P),\mathbb{R})$ l'espace vectoriel dual. Si on note $A_P$ le centre de $M_P$, alors il est bien connu que $\mathfrak{a}_P^* = X(A_P)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ et $\mathfrak{a}_P = X_*(A_P)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. On note $\Phi_P\subseteq\mathfrak{a}_P^{G*}\subseteq\mathfrak{a}_P^*$ l'ensemble des racines de $(P,A_P)$.

Soit $Q\in\mathcal{F}$ un sous-groupe parabolique de $G$. On définit l'ensemble des homomorphismes $\mathrm{Hom}(P,Q)$ constitué des doubles classes $w\in W_P\backslash W/W_Q$ telles que

$wM_Pw^{-1} \subseteq M_Q$. Si $\sigma M_P \sigma^{-1} = M_Q$ pour un certain $\sigma \in \mathrm{Hom}(P,Q)$, il l'est pour tout $w \in \mathrm{Hom}(P,Q)$. Dans ce cas, on dit que $P$ et $Q$ sont associés, et on écrira $W(P,Q)$ au lieu de $\mathrm{Hom}(P,Q)$. Soient $P,Q \in \mathcal{P}_0$ deux sous-groupes paraboliques standard associés. On voit que $W(P,Q)$ est l'ensemble des isomorphismes linéaires $\mathfrak{a}_P \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_Q$ qui sont induits par un élément du groupe de Weyl $W$ de $G$.

On suppose de plus que $P \subseteq Q$. Les inclusions $A_Q \subset A_P \subset M_P \subset M_Q$ induisent une injection $\mathfrak{a}_Q \hookrightarrow \mathfrak{a}_P$ et une projection $\mathfrak{a}_P \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_Q$ telles que le composé $\mathfrak{a}_Q \hookrightarrow \mathfrak{a}_P \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_Q$ soit l'identité sur $\mathfrak{a}_Q$. Ainsi on a une décomposition canonique

$$\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_P^Q \oplus \mathfrak{a}_Q,$$

où $\mathfrak{a}_P^Q$ désigne le noyau de la projection $\mathfrak{a}_P \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_Q$. Par dualité, on a aussi une décomposition canonique $\mathfrak{a}_P^* = \mathfrak{a}_P^{Q*} \oplus \mathfrak{a}_Q^*$. Les espaces vectoriels $\mathfrak{a}_P^Q$ et $\mathfrak{a}_P^{Q*}$ sont duaux l'un de l'autre. On notera $[.]_P^Q$ et $[.]_Q$ les projections de $\mathfrak{a}_P$ (resp. $\mathfrak{a}_P^*$) sur $\mathfrak{a}_P^Q$ et $\mathfrak{a}_Q$, respectivement (resp. $\mathfrak{a}_P^{Q*}$ et $\mathfrak{a}_Q^*$, respectivement).

1.3. Lorsque $P = P_0$ (resp. $P \in \mathcal{P}$), $\Phi_0 = \Phi_{P_0}$ (resp. $\Phi_P$) est un système de racine et on notera $\Delta_0$ (resp. $\Delta_P$) l'ensemble des racines simples. Alors, $\Delta_0$ (resp. $\Delta_P$) forme une base de $\mathfrak{a}_{P_0}^{G*}$ (resp. $\mathfrak{a}_P^{G*}$) et l'ensemble des coracines simples $\Delta_0^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_0\}$(resp. $\Delta_P^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_P\}$) forme une base de $\mathfrak{a}_{P_0}^G$ (resp. $\mathfrak{a}_P^G$). On notera $\widehat{\Delta}_0 = \{\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta_0\}$ (resp. $\widehat{\Delta}_P = \{\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta_P\}$) l'ensemble des poids fondamentaux et $\widehat{\Delta}_0^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_0\}$ (resp. $\widehat{\Delta}_P^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_P\}$) l'ensemble des copoids fondamentaux. Par dualité, $\widehat{\Delta}_0$ (resp. $\widehat{\Delta}_P$) forme une base de $\mathfrak{a}_{P_0}^{G*}$ (resp. $\mathfrak{a}_P^{G*}$), et $\widehat{\Delta}_0^\vee$ (resp. $\widehat{\Delta}_P^\vee$) forme une base de $\mathfrak{a}_{P_0}^G$ (resp. $\mathfrak{a}_P^G$).

Tous sous-groupe parabolique $P$ contient un sous-groupe parabolique minimal $P_1 \in \mathcal{P}$ (1.1). On désigne par $\Delta_{P_1}^P$ le sous-ensemble de $\Delta_{P_1}$ qui correspond à $P$ (1.1). On sait que $\Phi_P$ n'est pas toujours un système de racines. Suivant Arthur [8, section 5], on désigne par $\Delta_P \subseteq \Phi_P^+$ l'ensemble des caractères non triviaux qui sont les restrictions à $A_P$ des racines simples de $\Delta_{P_1} - \Delta_{P_1}^P$. Alors, $\Delta_P$ forme une base de $\mathfrak{a}_P^{G*}$. Par dualité, pour tout élément $\alpha \in \Delta_P$, il y a un élément $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G$ appelé coracine simple, de telle sorte que $\Delta_P^\vee = \{\alpha^\vee\}_{\alpha\in\Delta_P}$ forme une base de $\mathfrak{a}_P^G$. Explicitement, si $\alpha \in \Delta_P$ est la restriction de $\beta \in \Delta_{P_1}$ à $A_P$, alors $\alpha^\vee$ est l'image de la projection de $\beta^\vee \in \mathfrak{a}_{P_1}^G$ dans $\mathfrak{a}_P^G$. Remarquons que $\widehat{\Delta}_P = \{\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{P_1} - \Delta_{P_1}^P\}$ (resp. $\widehat{\Delta}_P^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_{P_1} - \Delta_{P_1}^P\}$) forme une seconde base de $\mathfrak{a}_P^{G*}$ duale à $\Delta_P^\vee$ (resp. de $\mathfrak{a}_P^G$ duale à $\Delta_P$). On vérifie facilement que les bases ci-dessus $\Delta_P$, $\Delta_P^\vee$, $\widehat{\Delta}_P$ et $\widehat{\Delta}_P^\vee$ ne dépendent pas du choix de $P_1$.

Soit $Q$ un sous-groupe parabolique contenant $P$. Fixons comme précédemment $P_1 \in \mathcal{P}$, avec $P_1 \subseteq P$. On va définir de la même façon des bases $\Delta_P^Q$, $\widehat{\Delta}_P^Q$ de $\mathfrak{a}_P^{Q*}$, et $(\Delta_P^Q)^\vee$, $(\widehat{\Delta}_P^Q)^\vee$ de $\mathfrak{a}_P^Q$. Par définition, $\Delta_P^Q$ (resp. $\widehat{\Delta}_P^Q$) est l'ensemble des applications linéaires sur $\mathfrak{a}_P^Q$ de $\mathfrak{a}_P$ obtenues en restreignant les éléments de $\Delta_{P_1}^Q - \Delta_{P_1}^P$ (resp. $\widehat{\Delta}_P - \widehat{\Delta}_Q$). On sait que $P \cap M_Q$ est un sous-groupe parabolique standard de $M_Q$ par rapport au sous-groupe parabolique minimal $P_1 \cap M_Q$. Alors

$$\mathfrak{a}_{P\cap M_Q} = \mathfrak{a}_P, \quad \mathfrak{a}_{P\cap M_Q}^{M_Q} = \mathfrak{a}_P^Q, (\Delta_{P\cap M_Q}^{M_Q})^\vee = (\Delta_P^Q)^\vee, \quad (\widehat{\Delta}_{P\cap M_Q}^{M_Q})^\vee = (\widehat{\Delta}_P^Q)^\vee.$$

1.4. Étant donnée une place finie $x$ de $F$, on désignera $F_x$ le complété de $F$ en $x$, $\mathcal{O}_x$ son anneau des entiers, $\kappa(x)$ son corps résiduel, et $v_x$ sa valuation. On désigne par $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $F$, et $\mathcal{O}_{\mathbb{A}} = \prod_x \mathcal{O}_x$ son ouvert compact maximal. On choisit un sous-groupe compact maximal $K$ de $G(\mathbb{A})$ qui vérifie les conditions suivantes:

i) (décomposition d'Iwasawa) $G(\mathbb{A}) = P_0(\mathbb{A})K$,

ii) pour tout sous-groupe parabolique standard $P$ de $G$, on a l'égalité

$$P(\mathbb{A}) \cap K = (M(\mathbb{A}) \cap K)(N(\mathbb{A}) \cap K),$$

et $M(\mathbb{A}) \cap K$ est encore un sous-groupe compact maximal de $M(\mathbb{A})$.

On fixe une fois pour toutes un sous-groupe discret $J$ de $A_G(\mathbb{A})$ tel que l'application $J \hookrightarrow A_G(\mathbb{A}) \xrightarrow{\deg_G} \mathfrak{a}_G$ soit injective et de conoyau compact. Ainsi $J$ est un sous-groupe discret cocompact de $A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A})$.

1.5. Rappelons maintenant quelques résultats combinatoires qui seront bien utiles pour la suite. Soient $P, Q \in \mathcal{F}$ avec $P \subseteq Q$. On introduit deux fonctions caractéristiques de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{a}_P^Q$: $\tau_P^Q$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\mathfrak{a}_P^{Q+} = \{H \in \mathfrak{a}_P^Q \mid (\alpha, H) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta_P^Q\},$$

et $\widehat{\tau}_P^Q$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$${}^+\mathfrak{a}_P^Q = \{H \in \mathfrak{a}_P^Q \mid (\varpi, H) > 0 \text{ pour tout } \varpi \in \widehat{\Delta}_P^Q\}.$$

On rassemble ici les lemmes géométriques suivants sont dus à Arthur et Langlands, voir par exemple [14, lemme 3.1], [1, lemma 6.3] et [18, lemma 1.3].

**Lemme 1.6.**

i) *Soient $P, Q, R \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq Q \subseteq R$, et soit $H \in \mathfrak{a}_P^R$. On suppose que $(\alpha, H) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$, et $(\varpi, H) > 0$ pour tout $\varpi \in \widehat{\Delta}_Q^R$. Alors $(\varpi, H) > 0$ pour tout $\varpi \in \widehat{\Delta}_P^R$. En particulier, on a toujours $\mathfrak{a}_P^{Q+} \subseteq {}^+\mathfrak{a}_P^Q$.*

ii) *Soient $P, R \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq R$, et soit $H \in \mathfrak{a}_P^R$. Alors*

$$\sum_{P \subseteq Q \subseteq R} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^R} \cdot \tau_P^Q([H]_P^Q) \cdot \widehat{\tau}_Q^R([H]_Q^R) = \delta_P^R,$$

$$\sum_{P \subseteq Q \subseteq R} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^R} \cdot \widehat{\tau}_P^Q([H]_P^Q) \cdot \tau_Q^R([H]_Q^R) = \delta_P^R.$$

iii) *Soient $P, R \in \mathcal{F}$ avec $P \subseteq R$, et soient $H, T \in \mathfrak{a}_P^R$. On pose*

$$\Gamma_P^R(H, T) = \sum_{P \subseteq Q \subseteq R} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^R} \cdot \tau_P^Q([H]_P^Q) \cdot \widehat{\tau}_Q^R([H - T]_Q^R).$$

*Si $T \in \mathfrak{a}_P^{R+} \subseteq {}^+\mathfrak{a}_P^R$, la fonction $H \mapsto \Gamma_P^R(H, T)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{H \in \mathfrak{a}_P^R \mid (\alpha, H) > 0, (\varpi, H) \leq (\varpi, T)$ pour tous $\alpha \in \Delta_P^R, \varpi \in \widehat{\Delta}_P^R\}$ de $\mathfrak{a}_P^R$.*

Soit $p \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$, et soit $\mu \geq 0$ une constante. On dit que $p$ est *$\mu$-régulier* si $(\alpha, p) > \mu$ pour tout $\alpha \in \Delta_{P_0}^G$. On dit aussi que $p$ est *assez régulier* si $p$ est $\mu$-régulier pour $\mu$ suffisamment grand. Voici une conséquence immédiate du lemme ci-dessus:

**Corollaire 1.7.** *Avec les notations ci-dessus, soit $Q$ un sous-groupe parabolique standard de $G$. Alors la fonction qui associe à $H \in \mathfrak{a}_Q^G$ l'expression*

$$\sum_{Q \subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot \widehat{\tau}_P^G([H]_P^G - [p]_P^G) \cdot 1(\{(\alpha, [H]_Q^P) > \mu, \forall \alpha \in \Delta_Q^P\})$$

*est la fonction caractéristique de l'ensemble $H \in \mathfrak{a}_P^G$ qui vérifie les conditions suivantes:*

i) $(\alpha, [H]_Q^G) > \mu$ *pour tout* $\alpha \in \Delta_Q^G$,
ii) $(\varpi, [H]_Q^G) \leq (\varpi, [p]_Q^G)$ *pour tout* $\varpi \in \widehat{\Delta}_Q^G$.

## 2. Filtration de Harder-Narasimhan

Dans cette section, on introduit la notion clef de filtration de Harder-Narasimhan d'un élément de $G(\mathbb{A})$ et on démontre les propriétés de cette filtration dont on aura besoin par la suite. Si le groupe réductif $G$ est déployé sur $\mathbb{F}_q$, elle coincide avec la notion classique de filtration de Harder-Narasimhan associée aux $G$-fibrés principaux. Dans le cas général, elle résulte des résultats de Behrend [9].

2.1. Soit $P \in \mathcal{F}$ avec $P = MN$ où $M \in \mathcal{L}$; pour tout $m \in M(\mathbb{A})$, on lui associe un élément $H_M(m) \subseteq \mathfrak{a}_P$ comme suit: pour tout $\psi \in X(M)$, on a

$$(\psi, H_M(m)) = \mathrm{val}(\psi(m)).$$

On obtient ainsi une application $H_M : M(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathfrak{a}_P$. L'image de cette application est un réseau de $\mathfrak{a}_P$. La décomposition d'Iwasawa nous permet de prolonger cette application en une application $H_P : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathfrak{a}_P$ comme suit: soit $g \in G(\mathbb{A})$; on écrit la décomposition d'Iwasawa $g = nmk$, avec $n \in N(\mathbb{A})$, $m \in M(\mathbb{A})$, et $k \in K$, et on définit $H_P(g) = H_M(m)$. Remarquons que, pour tous $P, Q \in \mathcal{F}$ avec $P \subseteq Q$, et pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on a l'égalité $H_Q(g) = [H_P(g)]_Q$.

Pour tout $s \in W$, on choisit un relèvement $w_s$ de $s$ dans $G(F)$. Puis on choisit un relèvement $\tilde{w}_s$ de $s$ dans $K$, donc $w_s^{-1}\tilde{w}_s$ appartient à $M_0(\mathbb{A})$; en particulier, l'élément $H_P(w_s^{-1}) \in \mathfrak{a}_{M_0}$ ne dépend pas du choix de $P \in \mathcal{P}$. Arthur a prouvé, cf. [3, lemma 1.1] qu'il existe un unique point $T_0 \in \mathfrak{a}_{P_0}^G$, vu comme un point dans $\mathfrak{a}_{P_0}$ tel que, pour tout $s \in W$, on ait

$$H_{P_0}(w_s^{-1}) = T_0 - s^{-1}T_0.$$

On sait qu'il existe un sous-groupe parabolique $P_1 \in \mathcal{P}$ tel que $P_1 \subseteq P$ et on définit

$$R(P) := \{\beta \in \Phi_{P_1} : \beta = \sum_{\alpha \in \Delta_{P_1}} n_\alpha \alpha, \text{ avec } n_\alpha \geq 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta_{P_1}^Q\}.$$

On vérifie aisément que cet ensemble ne dépend pas du choix de $P_1$.

2.2. Soient $g$ un élément de $G(\mathbb{A})$, et $Q$ un sous-groupe parabolique de $G$. Il existe donc $\delta \in G(F)$ et $P \in \mathcal{P}$ tels que $P \subseteq Q' := \delta Q \delta^{-1}$. On définit l'application degré:

$$\deg_Q(g) := (\sum_{\alpha \in R(Q')} \alpha, [H_P(\delta g)]_P^G - T_0).$$

Le nombre $\deg_Q(g)$ ne dépend pas du choix de $(\delta, P)$. En effet, on peut supposer que $Q \in \mathcal{F}$. Soient $P, P' \in \mathcal{P}$ et $\delta \in G(F)$ tels que $P \subseteq Q$ et $P' \subseteq \delta Q \delta^{-1}$. Il nous faut vérifier l'égalité suivante:

$$(\sum_{\alpha \in R(Q)} \alpha, [H_P(g)]_P^G - T_0) = (\sum_{\alpha \in R(\delta Q \delta^{-1})} \alpha, [H_{P'}(\delta g)]_{P'}^G - T_0).$$

On choisit $s \in W$ tel que $w_s P' w_s^{-1} = P$; cela implique que $P \subseteq Q$, et $P \subseteq w_s \delta Q \delta^{-1} w_s^{-1}$. Ainsi $Q = w_s \delta Q \delta^{-1} w_s^{-1}$, donc $w_s \delta \in Q(F)$. Soit $y \in G(\mathbb{A})$; on écrit la décomposition $y = nmk$ avec $m \in M(\mathbb{A})$, $n \in N(\mathbb{A})$, $k \in K$. On écrit $w_s^{-1} y = (w_s^{-1} n w_s)(w_s^{-1} m w_s) w_s^{-1} k$, donc

$$H_{P'}(w_s^{-1} y) = H_{P'}(w_s^{-1} m w_s) + H_{P'}(w_s^{-1}) = s^{-1} H_P(y) + H_{P_0}(w_s^{-1}).$$

Appliqué à $y = w_s \delta g$, on obtient:

$$s[H_{P'}(\delta g)]_{P'}^G = [s H_{P'}(w_s^{-1} w_s \delta g)]_P^G = [H_P(w_s \delta g) + s H_{P_0}(w_s^{-1})]_P^G = [H_P(w_s \delta g)]_P^G + sT_0 - T_0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{\alpha \in R(\delta Q \delta^{-1})} \alpha, [H_{P'}(\delta g)]_{P'}^G - T_0\Big) &= \Big(s \sum_{\alpha \in R(\delta Q \delta^{-1})} \alpha, s[H_{P'}(\delta g)]_{P'}^G - sT_0\Big) \\ &= \Big(\sum_{\alpha \in R(Q)} \alpha, [H_P(w_s \delta g)]_P^G - T_0\Big).\end{aligned}$$

Remarquons que $\sum_{\alpha \in R(Q)} \alpha \in \mathfrak{a}_Q^{G*}$ (cf. [9, proposition 1.9]), ce qui implique

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{\alpha \in R(\delta Q \delta^{-1})} \alpha, [H_{P'}(\delta g)]_{P'}^G - T_0\Big) &= \Big(\sum_{\alpha \in R(Q)} \alpha, [H_P(w_s \delta g)]_P^G - T_0\Big) \\ &= \Big(\sum_{\alpha \in R(Q)} \alpha, [H_P(w_s \delta g)]_Q^G - [T_0]_Q^G\Big) \\ &= \Big(\sum_{\alpha \in R(Q)} \alpha, [H_Q(w_s \delta g)]_Q^G - [T_0]_Q^G\Big) \\ &= \Big(\sum_{\alpha \in R(Q)} \alpha, [H_Q(g)]_Q^G - [T_0]_Q^G\Big) \text{ (car } w_s \delta \in Q(F)) \\ &= \Big(\sum_{\alpha \in R(Q)} \alpha, [H_P(g)]_P^G - T_0\Big).\end{aligned}$$

La preuve est donc terminée.

2.3. Soit $M \in \mathcal{L}$ un sous-groupe de Lévi. Suivant la terminologie d'Arthur, une famille $\underline{\lambda} = (\lambda_P)_{P\in\mathcal{F}(M)}$ d'éléments de $\mathfrak{a}_P^G$ est dite $(G, M)$*-famille orthogonale* (resp. orthogonale positive) si, pour toute paire $(P, Q)$ de sous-groupes paraboliques adjacents dans $\mathcal{F}(M)$, il existe $x \in \mathbb{R}$ (resp. $x \in \mathbb{R}_+$) tel que $\lambda_P - \lambda_Q = x\alpha_{P,Q}^\vee$, où $\alpha_{P,Q}$ est l'unique racine simple de $P$ telle que $-\alpha_{P,Q}$ soit une racine simple de $Q$. Arthur a prouvé que, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, la famille $([H_P(g)]_P^G)_{P\in\mathcal{P}}$ est une famille $(G, M_0)$-orthogonale positive. En particulier, la famille $([H_P(g)]_P^G - T_0)_{P\in\mathcal{P}}$ l'est aussi. *Remarquons que la notion de $(G, M)$-famille orthogonale positive d'Arthur coincide avec celle de polyèdre orthogonal de Behrend* [9].

Soit $\underline{\lambda} = (\lambda_P)_{P\in\mathcal{P}}$ une famille $(G, M_0)$-orthogonale positive. Cette famille s'étend en une famille $(\lambda_Q)_{Q\in\mathcal{F}}$ de la manière suivante: pour tout sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{F}$, on choisit un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}$ contenu dans $Q$, et on définit $\lambda_Q = [\lambda_P]_Q^G$. C'est un élément dans $\mathfrak{a}_Q^G$ qui ne dépend pas du choix de $P$ car la famille $(\lambda_P)_{P\in\mathcal{P}}$ est $(G, M_0)$-orthogonale.

Suivant Behrend, pour tout sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{F}$, on choisit un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}$ tel que $P \subseteq Q$, et on définit

$$\deg_Q(\underline{\lambda}) := \Big(\sum_{\alpha\in R(Q)} \alpha, \lambda_P\Big).$$

Comme $(\lambda_P)_{P\in\mathcal{P}}$ est une famille $(G, M_0)$-orthogonale, $\deg_Q(\underline{\lambda})$ ne dépend pas du choix de $P$. Behrend [9] a prouvé qu'il existe un *unique* sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{F}$ qui vérifie les deux conditions suivantes:

i) Pour tout sous-groupe parabolique $P' \in \mathcal{F}$ tel que $P' \subseteq Q$, et $|\Delta_{P'}^Q| = 1$, on a l'inégalité

$$(\alpha, \lambda_Q) \leq 0,$$

où $\alpha$ est l'unique élément de $\Delta_{P'}^Q$.

ii) L'élément $\lambda_Q$ appartient à $\mathfrak{a}_Q^{G+}$.

Behrend a montré aussi que ce sous-groupe parabolique est l'élément le plus grand dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques dans $\mathcal{F}$ de degré maximal.

2.4. On est bien armé pour définir la notion de filtration de Harder-Narasimhan. Soit $g \in G(\mathbb{A})$. On considère l'ensemble des sous-groupes paraboliques $P$ de $G$ tels que $\deg_P(g) = \max_Q \deg_Q(g)$, où $Q$ parcourant tous les sous-groupes paraboliques de $G$. On affirme que, *parmi les sous-groupes paraboliques dans cet ensemble, il y a un unique sous-groupe parabolique qui est plus grand que tous les autres.* En effet, supposons que $P$ et $Q$ sont deux tels sous-groupes paraboliques de $G$. Comme $P \cap Q$ contient toujours un tore déployé maximal et son centralisateur dans $G$ (cf. [10, Corollaire 4.18]), il existe $\delta \in G(F)$ tel que $P' := \delta P\delta^{-1}$ et $Q' := \delta Q\delta^{-1}$ soient dans $\mathcal{F}$. Par définition, $\deg_P(g) = \deg_{P'}(\delta g)$, et $\deg_Q(g) = \deg_{Q'}(\delta g)$. Comme $([H_P(\delta g)]_P^G - T_0)_{P\in\mathcal{P}}$ est une $(G, M_0)$-famille orthogonale positive, d'après le résultat de Behrend cité ci-dessus, on en déduit que $P' = Q'$, donc $P = Q$.

On appelle une paire standard toute paire $(P, \delta)$ où $P$ est un sous-groupe parabolique standard de $G$, et $\delta$ est un élément de $P(F)\backslash G(F)$. Il est bien connu que l'ensemble des paires standards sont en bijection avec l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $G$. Pour toute paire standard $(P,\delta)$, on notera $p_P^{\delta g}=[H_P(\delta g)]_P^G-[T_0]_P^G$; c'est un élément de $\mathfrak{a}_P^G$. Voici une reformulation de ce qu'on vient de démontrer:

**Théorème 2.5.** *Soit $g\in G(\mathbb{A})$. Alors il existe une unique paire standard $(Q,\delta_Q)$ telle que les deux conditions suivantes soient vérifiées:*

i) *Pour tout sous-groupe parabolique standard $P'$ tel que $P'\subseteq Q$, et $|\Delta_{P'}^Q|=1$, et pour tout $\delta'\in P'(F)\backslash Q(F)$, on a l'inégalité*
$$(\alpha,p_Q^{\delta'\delta_Q g})\leq 0$$
*où $\alpha$ est l'unique élément de $\Delta_{P'}^Q$.*

ii) *L'élément $p_Q^{\delta_Q g}$ appartient à $\mathfrak{a}_Q^{G+}$.*

*La paire $(Q,\delta_Q)$ est appelée la filtration canonique de Harder-Narasimhan (ou la réduction canonique) de $g$.*

On a aussi une généralisation évidente du résultat ci-dessus:

**Théorème 2.6.** *Soit $g\in G(\mathbb{A})$, et soit $(P,\delta)$ une paire standard. Alors il existe une unique paire $(Q,\delta_Q)$ où $P_0\subseteq Q\subseteq P$, et $\delta_Q\in Q(F)\backslash P(F)\delta$ telle que les deux conditions suivantes soient vérifiées:*

i) *Pour tout sous-groupe parabolique standard $P'$ tel que $P'\subseteq Q$, et $|\Delta_{P'}^Q|=1$, et pour tout $\delta'\in P'(F)\backslash Q(F)$, on a l'inégalité*
$$(\alpha,p_Q^{\delta'\delta_Q g})\leq 0$$
*où $\alpha$ est l'unique élément de $\Delta_{P'}^Q$.*

ii) *L'élément $p_Q^{\delta_Q g}$ appartient à $\mathfrak{a}_Q^{P+}$.*

*La paire $(Q,\delta_Q)$ est appelée la réduction canonique associée à la paire standard $(P,\delta)$, et on la note $(P,\delta)^{\mathrm{rc}}=(Q,\delta_Q)$.*

On conserve les notations du théorème précédent. Suivant Lafforgue [15, section V.1.b], étant donnée une constante $\mu\geq 0$, il existe un unique sous-groupe parabolique standard $Q^\mu$, avec $Q\subseteq Q^\mu\subseteq P$ tel que
$$\Delta_{Q^\mu}^P=\{\alpha\in\Delta_Q^P:(\alpha,p_Q^{\delta_Q g})>\mu\}.$$

Avec ces notations, la $\mu$-réduction canonique de $(g,P,\delta)$ est définie par la paire standard $(Q^\mu,\delta_Q)$, et on la note $(P,\delta)^\mu=(Q^\mu,\delta_Q)$.

2.7. On fixe un élément $p\in\mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$ qui jouera le rôle de paramètre de troncatures. Soit $g\in G(\mathbb{A})$; on notera $(P,\delta)$ la réduction canonique de $g$. On dit que $p(g)\leq p$ si $(\omega,p_P^{\delta g})\leq(\omega,p)$ pour tout $\omega\in\widehat{\Delta}_{P_0}^G$. La théorie de réduction implique le résultat fondamental suivant, cf. [8, section 8]:

**Proposition 2.8.** *Le sous-ensemble de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J$ des éléments $g$ tels que $p(g)\leq p$ est compact.*

Soit $P$ un sous-groupe parabolique standard de $G$, et soit $g \in G(\mathbb{A})$. Étant donné $\delta \in P(F)\backslash G(F)$, rappelons que $p_P^{\delta g} >_P p$ si $p_P^{\delta g} - [p]_P^G \in {}^+\mathfrak{a}_P^G$. D'après [1, lemma 5.1], la somme $\sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} 1(p_P^{\delta g} >_P p)$ est toujours finie.

**Proposition 2.9.** *Pour tout élément $p \in \mathfrak{a}_P^{G+}$ et pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on a l'identité suivante:*

$$1(p(g) \leq p) = \sum_{P \in \mathcal{P}_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} 1(p_P^{\delta g} >_P p). \tag{2.9.1}$$

*Proof.* Fixons $g \in G(\mathbb{A})$. Compte tenu de la discussion précédente, seulement un nombre fini de termes dans la somme à droite est non nul. En particulier, la somme est donc bien définie. On va regrouper les termes à droite de l'expression (2.9.1) suivant leur réduction canonique:

$$\begin{aligned}&\sum_{P \in \mathcal{P}_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} 1(p_P^{\delta g} >_P p)\\ =&\sum_{(Q,\delta_Q)} \sum_{Q \subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot 1((P, \delta_Q)^{\mathrm{rc}} = (Q, \delta_Q)) \cdot 1(p_P^{\delta_Q g} >_P p).\end{aligned}$$

Fixons une paire standard $(Q, \delta_Q)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}1((P, \delta_Q)^{\mathrm{rc}} = (Q, \delta_Q)) &= \tau_Q^P([p_Q^{\delta_Q g}]_Q^P),\\ 1(p_P^{\delta_Q g} >_P p) &= \widehat{\tau}_P^G([p_Q^{\delta_Q g}]_P^G - [p]_P^G).\end{aligned}$$

Ainsi compte tenu du fait que $[p]_Q^G \in \mathfrak{a}_Q^{G+}$, le lemme 1.6 implique

$$\begin{aligned}&\sum_{Q \subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot 1((P, \delta_Q)^{\mathrm{rc}} = (Q, \delta_Q)) \cdot 1(p_P^{\delta_Q g} >_P p)\\ =&\sum_{Q \subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot \tau_Q^P([p_Q^{\delta_Q g}]_Q^P) \cdot \widehat{\tau}_P^G([p_Q^{\delta_Q g}]_P^G - [p]_P^G)\\ =&1(\{(\alpha, p_Q^{\delta_Q g}) > 0,\ \forall \alpha \in \Delta_Q^G;\ (\omega, p_Q^{\delta_Q g}) \leq (\omega, [p]_Q^G),\ \forall \omega \in \widehat{\Delta}_Q^G\}).\end{aligned}$$

Si cette somme vaut 1, alors $(\alpha, p_Q^{\delta_Q g}) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_Q^G$, ce qui entraîne que $(Q, \delta_Q)$ est la réduction canonique de $g$. Ainsi, si l'on note $(P, \delta)$ la réduction canonique de $g$, le somme du départ vaut $1(\{(\omega, p_P^{\delta g}) \leq (\omega, [p]_P^G),\ \forall \omega \in \widehat{\Delta}_P^G\})$. Compte tenu du fait que $p \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$, donc $(\alpha, [p]_{P_0}^P) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{P_0}^P$, et du lemme 1.6, on obtient

$$1(\{(\omega, p_P^{\delta g}) \leq (\omega, [p]_P^G),\ \forall \omega \in \widehat{\Delta}_P^G\}) = 1(p(g) \leq p).$$

La preuve est donc terminée. □

On termine cette section en rappelant une reformulation de [21, lemme I.2.7]:

**Lemme 2.10.** *Soit $K'$ un sous-groupe ouvert de $K = G(\mathcal{O})$. Alors il existe une constante $\mu > 0$ qui ne dépend que de $K'$ telle que:*

*Pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, pour tout $P \in \mathcal{P}$ dont réduction canonique (resp. $\mu$-réduction canonique) de $\mathcal{E}_P^g$ est notée $\mathcal{E}_Q^{\delta g}$ (resp. la $\mathcal{E}_{Q^\mu}^{\delta g}$), avec $Q, Q^\mu \in \mathcal{P}$, $Q \subseteq$*

*$Q^\mu \subseteq P$ et $\delta \in Q(F)\backslash P(F)$, pour tout $R \in \mathcal{P}$, avec $Q^\mu \subseteq R \subseteq P$, et pour toute fonction $\varphi : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ invariante à droite par $G(F)$, et à gauche par $K'$, on a*

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} \varphi(n_P\delta g)\cdot dn_P = \int_{N_R(F)\backslash N_R(\mathbb{A})} \varphi(n_R\delta g)\cdot dn_R.$$

## 3. Décomposition spectrale de Langlands

On rassemble dans cette section un rappel de la décomposition spectrale de Langlands due à Langlands et Morris [19, 20].

3.1. Soit $P \in \mathcal{F}$ de Lévi $M_P \in \mathcal{L}$. Rappelons que $J$ est un sous-groupe discret et cocompact de $A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A})$, cf. section 1.4. On définit $\Lambda_P$ comme le tore des caractères complexes $M_P(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}^*$ qui se factorise à travers l'homomorphisme $H_{M_P} : M_P(\mathbb{A}) \longrightarrow \Gamma_P$; son rang est égal à $\dim \mathfrak{a}_P^G$. On note $\operatorname{Im}\Lambda_P$ le sous-groupe réel compact de $\Lambda_P$ constitué des caractères unitaires; c'est un produit des cercles unités, en particulier il est compact. Puis, on note $\operatorname{Re}\Lambda_P$ le sous-groupe réel linéaire de $\Lambda_P$ constitué des caractères à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$. Alors on a une décomposition canonique

$$\Lambda_P = \operatorname{Re}\Lambda_P \cdot \operatorname{Im}\Lambda_P.$$

Soit $\lambda \in \Lambda_P$, on désigne $|\lambda|$ le caractère dans $\operatorname{Re}\Lambda_P$ associé à $\lambda$. On l'appelle le module de $\lambda$. Puis on note $d\lambda_P$ la mesure de Haar sur le groupe réel compact $\operatorname{Im}\Lambda_P$ qui lui attribue le volume 1.

**Proposition 3.2.** *La flèche naturelle $\mathfrak{a}_P^{G*} \longrightarrow \operatorname{Re}\Lambda_P$ qui envoie $\lambda$ au caractère $m \mapsto q^{\lambda(H_{M_P}(m))}$ est une bijection.*

*Proof.* cf. [21, section I.1.4]. □

On notera $\rho_P \in \operatorname{Re}\Lambda_P$ la racine carrée du caractère modulaire de $M_P(\mathbb{A})$ par lequel $M_P(\mathbb{A})$ agit sur les mesures de Haar $dn_P$ de $N_P(\mathbb{A})$, autrement dit

$$m_P \cdot dn_P \cdot m_P^{-1} = \rho_P^2(m_P)\cdot dn_P \qquad \forall m_P \in M_P(\mathbb{A}). \tag{3.2.1}$$

Plus généralement, soient $P, Q \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq Q$. L'inclusion $P \subseteq Q$ implique $M_P(\mathbb{A}) \subseteq M_Q(\mathbb{A})$ qui induit à son tour une flèche injective $\Lambda_Q \hookrightarrow \Lambda_P$. On notera $\operatorname{Re}\Lambda_P^Q$ le sous-groupe réel de $\operatorname{Re}\Lambda_P$ constitué des caractères qui sont triviaux sur $Z_Q(\mathbb{A})$. On voit facilement $\operatorname{Re}\Lambda_P = \operatorname{Re}\Lambda_Q \cdot \operatorname{Re}\Lambda_P^Q$. Puis on notera $\Lambda_P^Q$ le sous-groupe complexe de $\Lambda_P$ engendré par $\operatorname{Re}\Lambda_P^Q$. Il se décompose naturellement en $\Lambda_P^Q = \operatorname{Re}\Lambda_P^Q \cdot \operatorname{Im}\Lambda_P^Q$ où $\operatorname{Im}\Lambda_P^Q$ est un sous-groupe réel compact de $\operatorname{Im}\Lambda_P$ qui vérifie $\operatorname{Im}\Lambda_P = \operatorname{Im}\Lambda_Q \cdot \operatorname{Im}\Lambda_P^Q$. De plus, $\operatorname{Im}\Lambda_Q \cap \operatorname{Im}\Lambda_P^Q$ est fini et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a}_Q^{G*} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Re}\Lambda_Q \arrow[d] \\ \mathfrak{a}_P^{G*} \arrow[r] & \operatorname{Re}\Lambda_P \end{tikzcd}$$

Ainsi on a une bijection $\mathfrak{a}_P^{Q*} \longrightarrow \operatorname{Re}\Lambda_P^Q$.

**Définition 3.3.** *Avec les notations ci-dessus, soient* $\lambda, \lambda' \in \Lambda_P^Q$ *considérés comme des éléments de* $\mathfrak{a}_P^{Q*}$. *On dit que*

*i)* $\lambda_P \gg \lambda'_P$ *s'il existe un caractère* $\lambda_Q \in \Lambda_Q$ *tel que* $(\alpha^\vee, \lambda_Q(\lambda_P - \lambda'_P)) > 0$ *pour tout* $\alpha^\vee \in (\Delta_P^G)^\vee$.

*ii)* $\lambda_P \geq \lambda'_P$ *si* $|\lambda_P| - |\lambda'_P|$ *est dans le cône positif engendré par* $\Delta_P^Q$.

*iii)* $\lambda_P > \lambda'_P$ *si* $|\lambda_P| - |\lambda'_P|$ *est dans l'intérieur du cône positif engendré par* $\Delta_P^Q$.

3.4. Soient $M$ un Lévi dans $\mathcal{L}$, $\chi : A_M(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère central de $M(\mathbb{A})/J$, et $K'$ un sous-groupe ouvert de $K$. On notera

$$|\chi| : M(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$$

l'unique caractère qui prolonge le module du caractère $\chi : A_M(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

On définit $L^2_{K'}(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J, \chi)$ comme l'espace des fonctions

$$\varphi : M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions suivantes:

i) $\varphi(zm) = \chi(z)\varphi(m)$, pour tout $z \in A_M(\mathbb{A})$, et pour tout $m \in M(\mathbb{A})$.
ii) $\varphi$ est invariante à droite par le sous-groupe $K' \cap M(\mathbb{A})$.
iii) La norme $\|\varphi\|$ définie par

$$\|\varphi\|^2 := \int_{A_M(\mathbb{A})M(F)\backslash M(\mathbb{A})} \frac{|\varphi(m)|^2}{|\chi|^2(m)} \cdot dm$$

est finie.

Puis on note $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J, \chi)$ la réunion de $L^2_{K'}(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J, \chi)$ lorsque $K'$ décrit tous les sous-groupes ouverts $K'$ de $K$. Le théorème suivant est dû à Langlands.

**Théorème 3.5** (Langlands)**.** *La représentation* $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J, \chi)_{\mathrm{disc}}$ *de* $M(\mathbb{A})$ *est admissible, c'est-à-dire pour tout sous-groupe ouvert* $K'$ *de* $K$, *le sous-espace de* $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J, \chi)_{\mathrm{disc}}$ *formé des formes invariantes par* $K' \cap M(\mathbb{A})$ *est de dimension finie.*

*Proof.* cf. [15, Théorème 1, chapitre V.1.c]. □

Par définition, une paire discrète est la donnée d'un couple $(P, \pi)$ où $P \in \mathcal{F}$ dont le Lévi sera noté $M_P \in \mathcal{L}$, et $\pi$ est une représentation admissible isotypique de $M_P(\mathbb{A})$ qui est une composante discrète de $L^2_\infty(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/J, \chi_\pi)$ si $\chi_\pi$ désigne le caractère central de $\pi$.

Soit $(P, \pi)$ une paire discrète. Soient $P' \in \mathcal{F}$ qui est associé à $P$, et $\sigma \in W(P, P')$. Alors la représentation $\{\varphi(\sigma^{-1} \cdot \sigma, \varphi \in \pi)\}$ s'inscrit dans une paire discrète $(P', \pi')$. On notera $\pi' = \sigma(\pi)$. Deux paires discrètes $(P, \pi)$ et $(P', \pi')$ sont dites équivalentes s'il existe $\lambda_P \in \Lambda_P$, et un isomorphisme $\sigma \in W(P, P')$ tels que

$$\pi' = \sigma(\pi) \otimes \sigma(\lambda_P).$$

**Définition 3.6.** *i) Étant donnée une paire discrète $(P, \pi)$, les groupes de fixateurs* $\mathrm{Fixe}(\pi)$ *(resp.* $\mathrm{Fixe}_P(\pi)$*) sont constitués des couples $(\sigma, \lambda_P) \in W(P,P) \times \Lambda_P$ (resp. des éléments $\lambda_P \in \mathrm{Im}\,\Lambda_P$) tels que*

$$\pi = \sigma(\pi) \otimes \sigma(\lambda_P) \qquad (\textit{resp. } \pi = \pi \otimes \lambda_P).$$

*ii) Étant donnés une paire discrète $(P, \pi)$ et un homomorphisme $\sigma \in \mathrm{Hom}(P, P')$, avec $P' \in \mathcal{F}$, le groupe de fixateurs* $\mathrm{Fixe}_\sigma(\pi)$ *est constitué des couples $(\tau, \lambda_P) \in W(P,P) \times \Lambda_P$ tels que*

$$\pi = \tau(\pi) \otimes \tau(\lambda_P) \ \textit{et}\ \sigma\tau = \sigma.$$

On voit bien que si $(P, \pi)$ est une paire discrète, avec $\pi$ unitaire, pour tout couple $(\sigma, \lambda_\pi) \in \mathrm{Fixe}(\pi)$, on a automatiquement $\lambda_\pi \in \mathrm{Im}\,\Lambda_P$.

3.7. Soit $(P, \pi)$ une paire discrète; $M_P$ désignera le sous-groupe de Lévi de $P$, $N_P$ son sous-groupe unipotent, et $\chi_\pi$ le caractère central de $\pi$. Soit $K'$ un sous-groupe ouvert de $K$. On définit $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ comme l'espace des fonctions

$$\varphi : M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes:

i) $\varphi$ est invariante à droite par $K'$.

ii) Pour tout $k \in K$, la fonction

$$\varphi_k : M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$m \mapsto \rho_P^{-1}(m)\varphi(mk)$$

est dans le sous-espace $\pi$ de $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J, \chi_\pi)$.

iii) La norme $\|\varphi\|$ définie par $\|\varphi\|^2 := \int_K dk\ \|\varphi_k\|^2$ est finie.

Puis on note $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ la réunion filtrante de tels espaces $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ lorsque $K'$ décrit tous les sous-groupes ouverts de $K$. Il est un espace hilbertien muni de la norme $\|\varphi\|^2 := \int_K dk\ \|\varphi_k\|^2$.

Soit $\varphi \in L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ et soit $\lambda_P \in \Lambda_P$. On introduit la série d'Eisenstein définie comme

$$E_P(\varphi, \lambda_P)(g) = \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} (\varphi\lambda_P)(\delta g), \quad \forall g \in M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J.$$

Plus généralement, soit $P' \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq P'$. On introduit une nouvelle série d'Eisenstein

$$E_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)(g) = \sum_{\delta \in P(F)\backslash P'(F)} (\varphi\lambda_P)(\delta g), \quad \forall g \in M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J.$$

Langlands a montré que les séries d'Eisenstein $E_P(\varphi, \lambda_P)$ et $E_P^{P'}(\varphi, \lambda_P)$ sont convergentes pour $|\lambda_P| \gg \frac{\rho_P}{|\chi_\pi|}$ et admettent un prolongement méromorphe à $\Lambda_P$ tout entier.

Soient $P, P' \in \mathcal{F}$ qui sont associés, et soit $w$ un élément de $W(P,P')$. Soit $\varphi \in L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ et soit $\lambda_P \in \Lambda_P$. On introduit l'opérateur d'entrelacement défini comme

$$\begin{aligned} M^{P'}_{P,w}(\varphi,\lambda_P) :& M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C} \\ & g \mapsto \int_{N_{P'}(\mathbb{A})\cap wN_P(\mathbb{A})w^{-1}\backslash N_{P'}(\mathbb{A})} (\varphi\lambda_P)(w^{-1}n_{P'}g)\frac{dn_{P'}}{dn_{P,P'}} \cdot w\lambda_P^{-1}(g) \end{aligned}$$

où $dn_{P,P'}$ est la mesure de Haar sur $N_{P'}(\mathbb{A}) \cap wN_P(\mathbb{A})w^{-1}$ telle que le quotient $N_{P'}(F) \cap wN_P(F)w^{-1}\backslash N_{P'}(\mathbb{A}) \cap wN_P(\mathbb{A})w^{-1}$ soit de volume 1.

Langlands a montré que l'intégrale $M^{P'}_{P,w}(\varphi,\lambda_P)$ converge pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ et tout $\lambda_P \in \Lambda_P$ avec $|\lambda_P| \gg \frac{\rho_P}{|\chi_\pi|}$. De plus, elle admet un prolongement méromorphe à $\Lambda_P$ tout entier, et prend ses valeurs dans $L^2_\infty(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi')$ où $(P', \pi')$ est la paire discrète transformée de $(P, \pi)$ par $w$.

Les séries d'Eiseinstein et les opérateurs d'entrelacement vérifient les propriétés de fonctorialités suivantes:

i) Soit $P''$ un autre sous-groupe parabolique avec $W(P',P'') \neq \emptyset$, et soit $w'$ un élément de $W(P',P'')$. Alors, on a:

$$M^{P''}_{P,w'w}(\varphi,\lambda_P) = M^{P''}_{P',w'}(M^{P'}_{P,w}(\varphi,\lambda_P), w\lambda_P).$$

ii) Soit $Q \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq Q$ et $P' \subseteq Q$. Alors, on a:

$$E^Q_{P'}(M^{P'}_{P,w}(\varphi,\lambda_P), w\lambda_P) = E^Q_P(\varphi,\lambda_P).$$

Plus généralement, soient $P, P' \in \mathcal{F}$ avec $\mathrm{Hom}(P,P') \neq \emptyset$. Soit $\sigma \in \mathrm{Hom}(P,P')$. Il existe certainement un sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{F}$, avec $Q \subseteq P'$ et un élément $w \in W(P,Q)$ tels que $\sigma$ soit le composé de $w$ avec l'inclusion $Q \subseteq P'$. Pour toute fonction $\varphi : M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$, et tout caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$, on définit la série d'Eisenstein généralisée comme

$$E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi,\lambda_P) = E^{P'}_Q(M^Q_{P,w}(\varphi,\lambda_P), w\lambda_P).$$

Compte tenu des propriétés de fonctorialités, on voit bien que cette série ne dépend pas du choix de $Q$, et de $w$. Les propriétés de fonctorialité se généralisent de manière évidente.

Langlands a montré aussi:

**Proposition 3.8** (Langlands). *Soit $(P,\pi)$ une paire discrète, avec $\pi$ unitaire, et soit $\varphi$ une fonction dans $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$. Alors*

*i) Pour tout sous-groupe parabolique $P' \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq P'$, la fonction méromorphe sur $\Lambda_P$*

$$\lambda_P \mapsto E^{P'}_P(\varphi,\lambda_P)$$

*est régulière sur le tore imaginaire $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$.*

*ii) Pour tout sous-groupe parabolique $P' \in \mathcal{F}$ associé à $P$, et tout élément $w \in W(P,P')$, la fonction mémorphe sur $\Lambda_P$*

$$\lambda_P \mapsto M^{P'}_{P,w}(\varphi,\lambda_P)$$

*est régulière sur le tore imaginaire* $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$*. De plus, pour tout* $\lambda_P \in \mathrm{Im}\,\Lambda_P$*, on a*

$$\|M_{P,w}^{P'}(\varphi, \lambda_P)\| = \|\varphi\|.$$

3.9. Soit $(P, \pi)$ une paire discrète, et soit $K'$ un sous-groupe ouvert de $K$ (resp. et $\sigma \in \mathrm{Hom}(P, P')$). On introduit $L^2_{K'}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ (resp. $L^2_{K',\sigma}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$) comme l'espace des fonctions

$$\Phi : \mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$$

telles que la fonction $\lambda_P \in \mathrm{Im}\,\Lambda_P \mapsto \Phi(\lambda_P, .)$ soit une combinaison linéaire finie à coefficients dans $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ de caractères du tore $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$ (resp. et, pour tout $(\tau, \mu_P) \in \mathrm{Fixe}_\sigma(\pi)$), on ait:

$$M_{P,\tau}^P(\Phi(\lambda_P\mu_P, .), \lambda_P\mu_P) \cdot \tau(\mu_P)(.) = \Phi(\tau(\lambda_P), .)).$$

On notera $L^2_\infty(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ (resp. $L^2_{\infty,\sigma}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$) la réunion filtrante de $L^2_{K'}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ (resp. $L^2_{K',\sigma}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$) lorsque $K'$ décrit tous les sous-groupes ouverts de $K$. C'est un espace hilbertien muni de la norme

$$\|\Phi\|^2 := \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} \|\Phi(\lambda_P)\|^2 \cdot d\lambda_P.$$

Son complété pour cette norme sera noté $L^2(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ (resp. $L^2_\sigma(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$).

On peut énoncer le théorème de la décomposition spectrale de Langlands, cf. [21, section VI.2].

**Théorème 3.10** (Langlands)**.** *Soit* $P' \in \mathcal{F}$*. Pour toute paire discrète* $(P, \pi)$ *avec* $\pi$ *unitaire, et pour tout homomorphisme* $\sigma : P \longrightarrow P'$*, l'application définie sur* $L^2_\infty(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ *par la formule*

$$\Phi \mapsto |\,\mathrm{Fixe}_\sigma(\pi)|^{-1/2} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} E_{P,\sigma}^{P'}(\Phi(\lambda_P, .), \lambda_P) \cdot d\lambda_P$$

*induit une isométrie du sous-espace* $L^2_{\infty,\sigma}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ *sur un sous-espace de* $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J)$*, et elle est nulle sur le supplémentaire orthogonal de ce sous-espace dans* $L^2_\infty(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$*. Elle induit par suite une isométrie du sous-espace complété* $L^2_{\infty,\sigma}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ *sur un sous-espace fermé de* $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J)$*.*

*Enfin* $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J)$ *est la somme directe hilbertienne de ces sous-espaces fermés lorsque* $(P, \pi)$ *décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires dicrètes avec* $\pi$ *unitaire, et* $\sigma$ *décrit un ensemble des représentants des orbites de* $\mathrm{Hom}(P, P')$ *sous l'action de* $\mathrm{Fixe}(\pi)$*.*

## 4. Développement spectral de la formule des traces

Dans cette section, on définit la trace tronquée d'Arthur et donne son développement spectrale. Comme on dispose déjà d'une bonne notion de filtration de Harder-Narasimhan, la preuve est identique à celle du cas déployé [22]. Par conséquent, on esquisse seulement les étapes de la preuve et omet toutes les démonstrations.

4.1. On fixe une fonction $f : G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$ à support compact invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert $K'$ de $K$. Pour tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{F}$, l'opérateur de convolution $\varphi \mapsto \varphi * f$ dans l'espace des fonctions localement intégrables de $M_P(F)N_P(F)\backslash G(F)/J$ dans $\mathbb{C}$ admet l'expression suivante pour noyau

$$K_{f,P}(g',g) = \sum_{\gamma \in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma n_P g') \cdot dn_P.$$

Pour tout caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$, on obtient un opérateur composé

$$\varphi \mapsto f(\varphi, \lambda_P) := ((\varphi\lambda_P) * f)\lambda_P^{-1}.$$

Soit $(P,\pi)$ une paire discrète. Comme la fonction $h$ est invariante à droite et à gauche par le sous-groupe ouvert $K'$ de $K$, l'opérateur de convolution à droite par $f$ ainsi que les opérateurs $f(\varphi,\lambda_P)$ ($\lambda_P \in \Lambda_P$) envoient l'espace $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ dans le sous-espace de dimension finie $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$. Or il y a un nombre fini de classes d'équivalences de paires discrètes $(P,\pi)$ telles que le sous-espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ ne soit pas nul. Combinée avec le théorème de décomposition spectrale de Langlands 3.10, la discussion précédente implique:

**Proposition 4.2.** *On garde les notations précédentes. Pour tout $P' \in \mathcal{F}$, le noyau de l'opérateur de convolution à droite par $f$ dans $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J)$ admet une expresssion spectrale*

$$K_{f,P'}(g',g) = \sum_{(P,\pi)} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{K'}(P,\pi)} \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}(P,P')} \frac{1}{|\,\mathrm{Fixe}(\pi)\,|}$$
$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} E^{P'}_{P,\sigma}(f(\varphi,\lambda_P),\lambda_P)(g') \cdot \overline{E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi,\lambda_P)(g)} \cdot d\lambda_P$$

*où $(P,\pi)$ décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires dicrètes avec $\pi$ unitaire, et $\mathcal{B}_{K'}(P,\pi)$ décrit une base orthonormée finie de chaque espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$.*

Puis, on introduit la trace tronquée d'Arthur:

**Définition 4.3** (Trace tronquée d'Arthur)**.** *Avec les notations ci-dessus, on appelle trace tronquée d'Arthur de $f$ par un polygone $p \in \mathfrak{a}^{G+}_{P_0}$ l'intégrale*

(4.3.1)
$$\mathrm{Tr}^{\leq p}(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} \sum_{P_0 \subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}^G_{P'}} \sum_{\delta \in P'(F)\backslash G(F)} 1(p^{\delta g}_{P'} >_{P'} p) \cdot K_{f,P'}(\delta g, \delta g) \cdot dg.$$

4.4. On vérifie d'abord que l'intégrale dans la définition précédente est bien définie. On a un énoncé plus général, voir [22, section 9]:

**Proposition 4.5.** *Soient $(P,\pi)$ une paire discrète avec $\pi$ unitaire, $K'$ un sous-groupe ouvert de $K$, $\lambda_P \mapsto \varphi(\lambda_P)$ une fonction analytique sur $\Lambda_P$ à valeurs dans l'espace de dimension finie $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$, $\psi$ un élément de ce même espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$, et $p$ un élément assez régulier dans $\mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$.*

*Alors il existe sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J$ une fonction positive intégrable qui majore en modules toutes les fonctions*

$$g \mapsto K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g) = \sum_{P_0\subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}^G_{P'}} \sum_{\sigma\in \mathrm{Hom}(P,P')} \sum_{\delta\in P'(F)\backslash G(F)} \tag{4.5.1}$$
$$1(p^{\delta g}_{P'} >_{P'} p) \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} d\lambda_P \cdot E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi(\lambda_1\lambda_P),\lambda_1\lambda_P)(\delta g)\cdot \overline{E^{P'}_{P,\sigma}(\psi,\lambda_2\lambda_P)(\delta g)}$$

*lorsque $\lambda_1$, $\lambda_2$ décrivent un certain voisinage de $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$ dans $\Lambda_P$.*

D'après cette proposition, la fonction

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times \mathrm{Im}\,\Lambda_P &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (\lambda_1,\lambda_2) &\mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g)\cdot dg\end{aligned}$$

est bien définie et analytique. On veut calculer la valeur de cette fonction en $(1,1)$, autrement dit

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K^p_{\varphi(.),\psi}(1,1,g)\cdot dg.$$

Pour le faire, on a recours à la théorie de Fourier. Elle dit que le terme à calculer est la somme des coefficients de Fourier de la fonction $(\lambda_1,\lambda_2)\mapsto K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g)$. D'après la définition de la fonction $(\lambda_1,\lambda_2)\mapsto K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g)$ (4.5.1), on voit bien que cette fonction est invariante par le plongement diagonal de $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$ dans $\mathrm{Im}\,\Lambda_P\times \mathrm{Im}\,\Lambda_P$:

$$K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g) = K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda\lambda_1,\lambda\lambda_2,g), \quad \forall\lambda\in \mathrm{Im}\,\Lambda_P.$$

Cela entraîne que, pour tous caractères $\chi_1\neq\chi_2$ de $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$, le coefficient de Fourier associé à $(\chi_1,\chi_2)$ vaut 0. Par conséquent, on a l'égalité:

$$\begin{aligned}&\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K^p_{\varphi(.),\psi}(1,1,g)\cdot dg\\ &= \sum_\chi \underbrace{\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_1)} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} \chi(\lambda_2) \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g)\cdot dg\cdot d\lambda_2\cdot d\lambda_1}_{I(\chi)}\end{aligned}$$

où la somme parcourt tout caractère $\chi$ de $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$.

Pour calculer le coefficient de Fourier $I(\chi)$, on écrit d'abord la fonction de troncatures $1(p_{P'} >_{P'} p)$ qui apparaît dans l'expression de $K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g)$ comme une intégrale en les caractères de $\mathrm{Im}\,\Lambda_{P'}$. Cela revient à calculer les transformées de Fourier de telles fonctions, ce qui a été fait dans [22, section 10]. Soulignons que dans cette étape, l'expression intégrale dépend de certains choix auxiliaires. Ensuite, on utilise le théorème de décomposition spectrale de Langlands pour calculer les différents produits hermitiens qui apparaissent dans $I(\chi)$. Finalement, grâce à la notion de $(G,M)$-famille, on montre que le résultat final ne dépend pas des choix auxiliaires choisis.

**Théorème 4.6.** *On utilise les notations des sections 9-11 de* [22]*. Alors, l'intégrale*

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K_{\varphi(.),\psi}(1,1,g)\cdot dg$$

*est égale à*

$$\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}} \sum_{\lambda_\pi^\sigma} \lim_{\substack{\mu_\sigma\to 1\\ \mu_\sigma\in\Lambda_\sigma}} \sum_{Q\in\mathcal{P}(M_\sigma)} \widehat{1}^p_{P_\sigma,Q}(\tau_\sigma(\sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma\sigma(\lambda_\pi))\mu_\sigma)$$
$$\left\langle M^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}_{P,s_\sigma\tau_\sigma}(\varphi\big(\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma\big),\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma), M^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}(\psi,\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma)\lambda_\pi^\sigma)s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi^\sigma)\right\rangle\cdot d\lambda_\sigma$$

*où, pour tout* $(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)\subseteq W(P,P)\times \mathrm{Im}\,\Lambda_P$*, les* $\lambda_\pi^\sigma$ *décrivent un ensemble d'antécédents par l'application* $\lambda_P\mapsto \tau_\sigma(\sigma(\lambda_P)/\lambda_P\sigma(\lambda_\pi))$ *de l'intersection finie de son image avec* $\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}$ *dans* $\mathrm{Im}\,\Lambda_{\tau_\sigma(P)}$.

4.7. On applique le théorème précédent à la formule des traces. On définit l'opérateur tronqué $M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma)$ sur l'espace $L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ par la formule:

$$\sum_{\lambda_\pi^\sigma} \lim_{\substack{\mu_\sigma\to 1\\ \mu_\sigma\in\Lambda_\sigma}} \sum_{Q\in\mathcal{P}(M_\sigma)} \widehat{1}^p_{P_\sigma,Q}(\tau_\sigma(\sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma\sigma(\lambda_\pi))\mu_\sigma)\cdot$$
$$\left(M^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}(\cdot,\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma)\lambda_\pi^\sigma)s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi^\sigma)\right)^{-1}\circ M^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}_{P,s_\sigma\tau_\sigma}(\cdot,\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma)\circ f(.,\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma).$$

**Théorème 4.8.** *Avec les notations précédentes, on a l'égalité:*

$$\mathrm{Tr}^p_{(P,\pi)}(f)=\frac{1}{|\,\mathrm{Fixe}(\pi)\,|}\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in\mathrm{Fixe}(\pi)}\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}}\mathrm{Tr}(M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma))\cdot d\lambda_\sigma.$$

*La trace tronqué d'Arthur* $\mathrm{Tr}^{\leq p}(f)$ *s'écrit comme*

$$\mathrm{Tr}^{\leq p}(f)=\sum_{(P,\pi)}\mathrm{Tr}^p_{(P,\pi)}(f)$$

*où la somme parcourt l'ensemble des paires discrètes* $(P,\pi)$ *avec* $\pi$ *unitaire.*

## References


[1] J. Arthur, *A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in* $G(\mathbb{Q})$, Duke Math. J. **45**(4) (1978), 911-952.

[2] J. Arthur, *A trace formula for reductive groups. II. Applications of a truncation operator*, Compositio Math. **40**(1) (1980), 87-121.

[3] J. Arthur, *The trace formula in invariant form*, Ann. of Math. (2) **114**(1) (1981), 1-74.

[4] J. Arthur, *On a family of distributions obtained from Eisenstein series. I. Application of the Paley-Wiener theorem*, Amer. J. Math. **104**(6) (1982), 1243-1288.

[5] J. Arthur, *On a family of distributions obtained from Eisenstein series. II. Explicit formulas*, Amer. J. Math. **104**(6) (1982), 1289-1336.

[6] J. Arthur, *A local trace formula*, Publications IHES., **73** (1991), 5-96.

[7] J. Arthur, *On the inner-product of truncated Eisenstein series*, Duke Math. J., **49** (1982), 35-70.

[8] J. Arthur, *An introduction to the trace formula*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., **4** (2005), 1-263.

[9] K. Behrend, *Semi-stability of reductive group schemes over curves*, Math. Ann. **301**(2) (1995), 281-305.

[10] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Publications IHES, **27** (1965), 55-151.

[11] V. Drinfeld, *Varieties of modules of $F$-sheaves*, Functional Analysis and its Applications, **21** (1987), 107-122.

[12] V. Drinfeld, *Cohomology of compactified manifolds of modules of $F$-sheaves of rank 2*, Journal of Soviet Mathematics, **46** (1989), 1789-1821.

[13] D. Kazhdan, Y. Varshavsky, en préparation.

[14] J-P. Labesse, *La formule des traces d'Arthur-Selberg*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1984/85, Astérisque **133-134** (1986), 73-88.

[15] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*, Astérisque **243** (1997).

[16] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math., **147** (2002), 1-241.

[17] G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties*, Cambridge University Press, Cambridge, tome I (1995), tome II (1997).

[18] G. Laumon, M. Rapoport, *The Langlands lemma and the Betti numbers of stacks of $G$-bundles on a curve*, Internat. J. Math. **7**(1) (1996), 29-45.

[19] L. E. Morris, *Eisenstein series for reductive groups over global function fields I*, Can. J. Math. **34** (1982).

[20] L. E. Morris, *Eisenstein series for reductive groups over global function fields II*, Can. J. Math. **34** (1982).

[21] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein. Une paraphrase de l'Écriture*, Progress in Mathematics, **113** (1994), Birkhauser Verlag, Basel.

[22] T. Ngo Dac, *Sur le développement spectral de la formule des traces d'Arthur-Selberg sur les corps de fonctions*, à paraître dans Bull SMF, disponible sur www.math.univ-paris13.fr/∼ngodac/traceformula.pdf .

CNRS - Université de Paris Nord (Paris 13), LAGA - Département de Mathématiques, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

*E-mail address*: `ngodac@math.univ-paris13.fr`