Note Title 09/03/2020

Intégrale d'Ito vs Skorohod ; Processus Stationnaires

Rappels:
Int gauss stoch
mesures gauss stoch
Intégrale Skorohod

$L^2(\mathfrak{M}, \mathcal{M}, \mu; \mathbb{R})$ qui induce H hilbert gaussien réel

$I : L^2(\mathfrak{M}, \mathcal{M}, \mu; \mathbb{R}/\mathbb{C}) \longrightarrow H(\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$

$$I_n(f_1 \odot \cdots \odot f_n) = n! : I(f_1) \cdots I(f_n) :$$

$$I_n(f_n) = \int_{\mathfrak{M}^n} f_n(t_1, \dots, t_n) \, dZ^n(t_1, \dots, t_n)$$

$$E(|I_n(f_n)|^2) \leq n! \int_{\mathfrak{M}^n} |f_n|^2 d\mu^n$$ égalité si f symétrique

$$F \in L^2(\Omega; \mathcal{G}(H), P; \mathbb{C}) \qquad F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}^n} f_n(t_1, \dots, t_n) \, dZ^n(t_1, \dots, t_n)$$

$$E(|F|^2) \leq \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{\mathfrak{M}^n} |f_n|^2 d\mu^n$$

Int de Skorohod $\quad X \in L^2(\mathbb{M}, \mathcal{M}, \mu ; L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P))$

$$\int_{\mathbb{M}} X_t \, dZ(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P)$$

$$E\left(\left|\int_{\mathbb{M}} X_t \, dZ(t)\right|^2\right) \leq \int_{\mathbb{M}} \langle X_t, \mathcal{N} X_t \rangle + \|X_t\|^2_{L^2(\Omega)} \, d\mu(t)$$

op de nombre

Intégrale d'Ito : $\quad \mathbb{M} = \mathbb{R}_+ \quad (\mathbb{R}) \quad \mu = dt.$

$(B_t)_{t \geq 0} \quad \mathrm{cov}(B_s, B_t) = \min(t, s)$

On sait intégrer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \, dB_t \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$

et $\bar{m}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \int_0^{t_n} \cdots \left[\int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) \, dB_{t_1}\right] dB_{t_2} \cdots dB_{t_n}$

$0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n < +\infty$ simplexe

on ne symétrise pas.

Intégral d'Itô : On veut intégrer $\int_{\mathbb{R}_+} X_t \, dB_t$

X_t aléatoire.

Un processus aléatoire prédictible élémentaire est de la forme

$$X_t = \sum_{i=1}^{N} Y_i \, \mathbb{1}_{]s_i, t_i]}(t)$$

cad lag

Y_i aléatoire mais ne dépend pas de t.

Pour un tel processus Y_i $\sigma(B_u, u \leq s_i)$ mesurable

$$\int_0^\infty X_t \, dB_t = \sum_{i=1}^{N} Y_i \, (\underbrace{B_{t_i} - B_{s_i}}_{\text{indépendant de } B_u \text{ pour } u \leq s_i})$$

On peut toujours se ramener au cas $]s_i, t_i]$ disjoints et calcul simple

$$E\left(\left|\int_0^\infty X_t \, dB_t\right|^2\right) = 2\sum_{1\leq i<j\leq N} E\left(Y_i (B_{t_i} - B_{s_i}) Y_j (B_{t_j} - B_{s_j})\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} E\left(Y_i^2 (B_{t_i} - B_{s_i})^2\right)$$

$$= 2\sum_{1\leq i<j\leq N} E\left(Y_i (B_{t_j} - B_{s_i}) Y_j\right) E\left(B_{t_i} - B_{s_i}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) \, E\left((B_{t_i} - B_{s_i})^2\right)$$

$$= 0 + \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) \, |t_i - s_i|$$

$$= \int_0^\infty E\left(|X_t|^2\right) dt$$

L'intégrale d'Itô se prolonge à $\Pi^2 \subset L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, dt\, d\mathbb{P})$

l'espace des processus prédictibles L^2 int sur $\mathbb{R}_+$

<u>prédictible</u> : pp $t \in \mathbb{R}_+$ X_t est B_u-mesurable pour $u \leq t$

$X \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$ $X_t \in$ tribu complétée ($\mathbb{P}$) de $\sigma(B_u, u \leq t)$.

<u>Différence avec Skorohod</u> : Itô ordre sur $\mathbb{R}_+$

Skorohod plus général, pas d'ordre
symétrisation

<u>Itô</u> : $$E\left(\left|\int X_t \, dB_t\right|^2\right) = \int_0^{+\infty} E(|X_t|^2)\, dt$$

or pour Skorohod qui marche pour un proc non prédictif on peut avoir $<$.

exemple: $X_t = \begin{cases} B_2 - B_1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ B_0 - B_1 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$

$\int_0^{+\infty} X_t \, dB_t$ au sens de Skorohod

$$= \int_0^{+\infty} X_t \circ dB_t = (B_2 - B_1) \circ (B_1 - B_0) + (B_0 - B_1) \circ (B_2 - B_1) = 0$$

$$E\left(\left| \int_0^{+\infty} X_t \, dB_t \right|^2 \right) = E(0) = 0$$

$$\int_0^{\infty} E(|X_t|^2) \, dt = 1 \times (2-1) + 1 \times (1-0) = 2$$

Th : Tout élément $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(B), P)$ peut s'écrire

$$X = E(X) + \int_0^{+\infty} Y_t \, dB_t$$

avec $\underline{\underline{Y \in \Pi^2}}$.

Preuve : Si $X \in \mathcal{H}^n$: $X = I_n(F)$

$$X = \int_0^{+\infty} \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} F(t_1, \dots, t_n) \, dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}$$

$$= I\Big(\underbrace{I_{n-1}(F)}_{\text{prédictible}}\Big) \qquad n > 1$$

$$I_{n-1}(F)(t_n) = \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} F(t_1, \dots, t_n) \, dB_{t_1} \cdots dB_{t_{n-1}} \qquad \boxed{\Sigma}$$

Formule d'Itô: $\quad \xi_t = \int_0^t f(s)\,dB_s \qquad \eta_t = \int_0^t g(s)\,dB_s$

$$:\xi\eta: \;= I_2(f \odot g) = I_2\Big(f(s)g(t) + f(t)g(s)\Big)$$

$$= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(s)g(t) + g(s)f(t)\,dB_s\right]dB_t$$

$$= \int_0^{+\infty}\xi_t\, g(t)\,dB_t + \int_0^{\infty}\eta_t\, f(t)\,dB_t$$

$$= \int_0^{+\infty}\xi_t\,d\eta_t + \int_0^{\infty}\eta_t\,d\xi_t$$

$$\xi\eta = \;:\xi\eta: + E(\xi\eta)$$

$$= \int_0^{+\infty}\xi_t\,d\eta_t + \int_0^{\infty}\eta_t\,d\xi_t + \int_0^{\infty} f(s)g(s)\,ds$$

En remplaçant f par $f_t = f \times 1_{[0,t]}$ et $g_t = g \times 1_{[0,t]}$

$$\xi_t \eta_t = \int_0^t \xi_s \, d\eta_s + \int_0^t \eta_s \, d\xi_s + \int_0^t f(s) g(s) \, ds$$

$$d(\xi \eta) = \xi \, d\eta + \eta \, d\xi + \underbrace{f(t) g(t) \, dt}_{d\xi d\eta}$$

Rq : Si X ne dépend pas de t $\quad (B_u)_{u \leq a}$ mesurable

$$X \, \mathbb{1}_{]a,b]}(t) \quad \text{prédictible}$$

$$\int_a^b X \, dB_t = X (B_b - B_a) \quad \text{par Itô}$$

Pour Skorohod

$$\int_a^b X \, dB_t = X \circ (B_b - B_a)$$

$$= X(B_b - B_a) - \underbrace{E\left(X(B_b - B_a)\right)}_{=0}$$

$$= X(B_b - B_a)$$

m̄ chose que pour Ito

$$\boxed{\text{Mesure gaussienne complexe et processus stationnaire}}$$

Mesure gaussienne stochastique $H = L^2(M, \mu; \underline{\underline{\mathbb{R}}})$

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P; \mathbb{C}) = L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

$$\simeq \mathrm{Fock}_b(H_{\mathbb{C}})$$

$$H_{\mathbb{C}} = H \overset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$$

Si $\widetilde{H}$ est un espace de Hilbert complexe au départ, une façon de faire est d'écrire

$$\widetilde{H} = \underset{\text{partie réelle}}{H} \oplus \underset{\text{partie imaginaire}}{H}$$

avec la multiplication par $\sqrt{-1}$ $\quad J\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors 2 structures complexes distinctes sur $\widetilde{H}_{\mathbb{C}} = \widetilde{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

Il y a le cas où on veut utiliser la transformée de Fourier $\longrightarrow$ processus stationnaire.

$\rightarrow$ Naturel de travailler directement à valeurs complexes.

Déf : Une intégrale stochastique gaussienne complexe sur $L^2(M, \mathcal{M}, \mu; \mathbb{C})$ est une isométrie $\mathbb{C}$-linéaire

$$I : L^2(M, \mathcal{M}, \mu; \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

H hilbert gaussien réel.

Déf : Une mesure gaussienne stochastique complexe sur $(M, \mathcal{M}, \mu)$ est une famille de v.a jointement gaussiennes complexes $Z(A)$, $A \in \mathcal{M}$, $\vdash_q$

$$E\left(\overline{Z(A)}\, Z(B)\right) = \mu(A \cap B)$$

Rq : • Si $A \cap B = \emptyset$ $\qquad E\left(\overline{Z(A)}\, Z(B)\right) = \mu(\emptyset) = 0$

mais $Z(A)$ et $Z(B)$ ne sont pas forcément indépendantes $\quad E(Z(A)Z(B)) \neq 0$ en général

• $$E\left(\left| Z\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) - \sum_{i=1}^{N} Z(A_i) \right|^2 \right) = 0$$

A_i disjoints

vient de $E\left(\overline{Z(A)}\, Z(B)\right) = \mu(A \cap B)$.

$\Rightarrow$ additivité puis σ-additivité.

Thm : (1) $Z_A = I(1_A)$

donne une bijection entre int stochastique gaussienne et mesure gaussienne stochastique sur $(M, \mathcal{M}, \mu)$

② $\hat{I}_n(f_1 \odot \cdots \odot f_n) = :I(f_1) \cdots I(f_n):$

$$\hat{I}_n : L^2(M^n, \mathcal{M}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n}; \mathbb{C}) \longrightarrow H_{\mathbb{C}}^{:n:}$$

$$I_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = I_n\Big(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}\Big)$$

$$= \frac{1}{n!} I_n(f_1 \odot \cdots \odot f_n)$$

$$= \hat{I}_n(f_1 \odot \cdots \odot f_n)$$

Notation : $I_n(f) = \int_{M^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dZ(x_1) \cdots dZ(x_n)$

$$E(|I_n(f)|^2) \leq n! \int_{M^n} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 \, d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n)$$

égalité si f est symétrique

$$I_n(f) = \int_{M^n/\mathfrak{S}^n} \underbrace{n!\, f(x_1, \dots, x_n)} \, dZ(x_1) \dots dZ(x_n)$$

$$E(|I_n(f)|^2) = \int_{M^n/\mathfrak{S}^n} |n!\, f(x_1, \dots, x_n)|^2 \, d\mu^{\odot n}(x_1, \dots, x_n)$$

$\overline{m}$ ~~après que dans le cas réel si ce n'est que~~

contrairement au cas réel Z n'est pas déterminée canoniquement par μ.

Un cas particulier important est le cas des processus stationnaires.

Γ groupe localement compact $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ ou $\mathbb{R}^d$
abélien

$\widehat{\Gamma}$ groupe dual

λ mesure de Haar sur Γ

Caractère $x \longmapsto e^{i\xi.x}$ $\xi \in \widehat{\Gamma}$

$$\mathcal{F}g(\xi) = \int_\Gamma \overline{e^{+i\xi.x}}\, g(x)\, d\lambda(x) = \int_\Gamma e^{-i\xi.x} g(x)\, d\lambda(x)$$

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \overline{(\mathcal{F}g)(\xi)}\, (\mathcal{F}f)(\xi)\, d\hat{\lambda}(\xi) = \int_\Gamma \overline{g(x)}\, f(x)\, d\lambda(x)$$

- $\Gamma = \mathbb{T}^d$ $\quad \widehat{\Gamma} = \mathbb{Z}^d$ $\quad \int_\Gamma d\lambda(x) = 1$ $\quad \hat{\lambda}$ mesure de comptage
- $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ $\quad \widehat{\Gamma} = \mathbb{T}^d$
- $\Gamma = \mathbb{R}^d_x$ $\quad \widehat{\Gamma} = \mathbb{R}^d_\xi$ $\quad \lambda = dx$ $\quad \hat{\lambda} = \dfrac{d\xi}{(2\pi)^d}$

$(X_t)_{t \in \Gamma}$ va gaussienne jointes <u>réelles</u>

de covariance $E(X_t X_s) = r(t-s)$

$\leftarrow$ <u>continue</u> (réelle et symétrique)

C'est un cas particulier de

$E(X_t X_s) = \rho(t,s)$ ρ continue sur $\Gamma \times \Gamma$

$\Rightarrow \mathbb{R} \ni t \mapsto X_t$ $\left\{\begin{array}{l}\text{continue en loi} \\ \text{continue } L^2\end{array}\right.$

H = Espace de Hilbert gaussien engendré par $X_t, t \in \Gamma$

$\xi \in H$ $R(\xi)(t) = \langle \xi, X_t \rangle$

$R(H) = \{R(\xi), \xi \in H\}$ espace de Hilbert de fonctions continues muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{R(H)} = \langle R^{-1}(f), R^{-1}(g) \rangle_H$$

Espace de Hilbert à noyau reproduisant $\rho(t,s)$
(Théorème d'Aronsjan)

$R(H)$ = espace de Cameron-Martin
esp de Hilb de fonctions continues

<u>Ex</u>: Cas du brownien sur $[0,1]$ $\quad \rho(t,s) = \min(t,s)$

$$R(H) = \left\{ t \mapsto \int_0^t f(s)\, ds \ , \ f \in L^2([0,1], \mathbb{R}) \right\}$$

$$= \left\{ u \in H^1([0,1]) \ , \ u(0) = 0 \right\}$$

Revenons sur $(X_t)_{t\in\Gamma}$ stationnaire $E(X_t X_s) = r(t-s)$

$r(-s) = r(s)$ réelle continue

$$\sum_{0\leq m,n\leq N} \overline{a_m}\, a_n\, r(t_m - t_n) = E\left(\left|\sum_{n=0}^{N} a_n X_{t_n}\right|^2\right) \geq 0$$

Bochner $\Longrightarrow$ $r(t) = \int_{\hat{\Gamma}} e^{it\xi}\, d\mu(\xi)$

μ mesure finie ≥ 0 réelle

symétrique (r est réel)

Terminologie probabiliste : mesure "spectrale" de $(X_t)_{t\in\Gamma}$

$f \in L^1 \cap L^2(\Gamma, d\lambda)$ on définit

$$f(t) = \int e^{it\xi} \hat{f}(\xi)\, d\hat{\lambda}(\xi)$$

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i\xi t} f(t)\, d\lambda(t)$$

$$I\Big(\underbrace{\int_\Gamma e^{-i\xi t} f(t)\, d\lambda(t)}_{\text{fonction sur } \hat{\Gamma}}\Big) \overset{\text{def}}{=} \int_\Gamma f(t)\, X(t)\, d\lambda(t)$$

$$\| \text{déf}$$

$$\int_{\hat{\Gamma}} \hat{f}(\xi)\, dZ(\xi)$$

On applique cela à $\hat{f}(\xi) = 1_A(\xi)$

et cela une mesure gaussienne stochastique complexe sur $L^2(\Gamma, \mathrm{bor}, \mu; \mathbb{C})$

Th: $\left.\begin{array}{l}(X_t)_{t\in\Gamma} \text{ proc stationnaire} \\ \text{réel continue}\end{array}\right) \Longrightarrow \mu \quad r(t) = \int_{\hat\Gamma} e^{-it\xi}\, d\mu(\xi)$

$\longrightarrow \quad Z(A) \qquad E\left(\overline{Z(A)}\cdot Z(B)\right) = \mu(A\cap B)$

$$X_t = \int_{\hat\Gamma} e^{-it\xi}\, dZ(\xi)$$

$$\overline{\int_{\hat\Gamma} f(\xi)\, dZ(\xi)} = \int_{\hat\Gamma} \bar f(-\xi)\, dZ(\xi)$$

$$\overline{Z}(-A) = Z(A)$$

$$E\left(Z(A)\, Z(B)\right) = \mu\left((-A)\cap B\right)$$

Cela donne un exemple de mesure gaussienne complexe où $Z(A)$ et $Z(B)$ ne sont pas indépendants $\bar{m}$ si $A \cap B = \emptyset$

Inversement

$\underline{\overline{\text{Th}}}$: Si μ est une mesure ≥ 0 finie symétrique sur $\hat{\Gamma}$

1) Alors il existe une mesure gaussienne stochastique complexe Z tq $E(\overline{Z(A)}\, Z(B)) = \mu(A \cap B)$

2) μ et Z donnés comme précédemment définissent un proc stationnaire continu/t L^2

$$X_t = \int_{\hat{\Gamma}} e^{-it\xi}\, d\mu(\xi)$$

Thm! $(X_t)_{t\in\Gamma}$ proc stationnaire L^2-continue

$\longrightarrow \mu$ et Z

1) $f \longmapsto \int_{\hat{\Gamma}^n} f(\xi_1,\dots,\xi_n)\, dZ^n(\xi_1,\dots,\xi_n)$

est défini comme ds le cas réel

Elle vérifie

$$E\left(\left|\int f\, dZ^n\right|^2\right) \leq n! \int_{\hat{\Gamma}^n} |f|^2\, d\mu^{\otimes n}_{(\xi_1,\dots,\xi_n)}$$

2) $$\overline{\int_{\hat{\Gamma}^n} f(\xi)\, dZ^n(\xi)} = \int_{\hat{\Gamma}^n} f(-\xi)\, dZ^n(\xi)$$

3) Tout $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(X_t, t\in T), P; \mathbb{C})$ s'écrit

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\widehat{\Gamma}^n} f_n \, dZ^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{\widehat{\Gamma}^n} |f_n|^2 \, d\mu^n \underbrace{=}_{\text{si } f_n \text{ symétrique}} E(|X|^2)$$