Espaces gaussiens : Intégrale de Skorokhod (Int d'Ito)

Rappels :

- Espaces de Hilbert gaussiens (réels) indexés par un espace de Hilbert.

Décomposition en chaos $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}) = L^2(\ldots, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

$$\simeq \mathrm{Fock}_s(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{\mathbb{C}}^{\odot n} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\vee n}$$

$$H^{:n:} \sim H^{\odot n}$$

$$f_1 \odot \cdots \odot f_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}$$

$$f_1 \vee \cdots \vee f_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}$$

$$\|X\|_{H^{\odot n}} = \sqrt{n!}\, \|X\|_{H^{\vee n}}$$

Polynômes de Hermite (création, annihilation

Point de vue Bargmann

- Produit de Wick : $X \in H^{:m:}$ $Y \in H^{:n:}$

$$:XY: = \Pi_{m+n}(XY) \sim X \odot Y$$

$$\| X \odot Y \|_{H^{\odot m+n}} \leq \sqrt{\frac{(m+n)!}{m!\,n!}} \|X\|_{H^{\odot m}} \|Y\|_{H^{\odot n}}$$

- Différentes formules avec diagrammes de Feynmann

$$:e^{t\xi}: = e^{t\xi - t^2 E(\xi^2/2)} \qquad E(:e^{t\xi}:) = 1$$

$$\langle :e^{\xi}:, :e^{\eta}: \rangle = e^{\langle \xi, \eta \rangle} \qquad \xi, \eta \in H$$

$$\zeta = \xi + i\eta \qquad \| :e^{\zeta}: \|_{L^p} = e^{\frac{p-1}{2} E(\xi^2) + \frac{1}{2} E(\eta^2)} \qquad 0 \leq p < +\infty$$

$$:e^{\xi+\eta}: = e^{-E(\xi\eta)} :e^{\xi}: :e^{\eta}:$$

II Mesure stochastique gaussienne

Déf : Intégrale stochastique gaussienne = c'est une isométrie de $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ dans un espace de Hilbert gaussien H (réel ou tensorisé avec $\mathbb{C}$)

Autre terminologie : H est un espace de Hilb gaussien indexé par $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$

Déf : Une mesure gaussienne stochastique sur $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ est une famille de v.a. gaussiennes, $Z(A)$, A μ-mesurable, définie sur Ω tq :

- $Z(A) \sim \mathcal{N}(0, \mu(A))$
- Pour $A_1, \dots, A_n$ disjoints les $Z(A_i)$ sont indépendants

$$Z\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Z(A_i)$$

Rq : - La σ-additivité : $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ disjoints.

$$E\left(\left|Z(A) - \sum_{i=1}^{n} Z(A_i)\right|^2\right) = E\left(\left|Z\left(A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right|^2\right)$$

$$= \mu(A) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

σ-add de μ

- $\mathrm{Cov}(Z(A), Z(B)) = \mu(A \cap B)$

Th : $\left(I \text{ intégrale stochastique sur } L^2(M, \mathcal{M}, \mu) \right) \Longleftrightarrow \left(Z \text{ mes stoch gaussienne avec } Z(A) = I(\mathbb{1}_A) \right)$

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i} \qquad I(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i Z(A_i)$$

$$E(|I(f)|^2) = \int_M |f(t)|^2 d\mu(t) \qquad \operatorname{cov}(Z(A_i), Z(A_j)) = \mu(A_i \cap A_j)$$

$Z(A) \Rightarrow$ permet de définir $I(f)$ pour $f \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$.

<u>Notation</u>: $$I(f) = \int_M \underbrace{f(t)}_{\text{déterministe}} dZ_t = \int_M f\, dZ = \underbrace{\int_M f(t)\, dZ(t)}_{\in H}$$

<u>Thm</u>: Hyp: $I : L^2(M, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow H$ intégrale stochastique

Alors $\hat{I}_n : L^2(M^n, \mathcal{M}^{\odot n}, \mu^{\odot n}) \longrightarrow H^{\text{ini}}$ isométrie

$\uparrow$ tribu $\quad M^n / \mathbb{Z}^n \quad$ fonction mesurable $\Rightarrow$ symétrique

$$\mu^{\odot n} = \frac{1}{n!}\,\mu^{\otimes n}$$

$$\hat{I}_n(f_1 \odot \cdots \odot f_n) = :I(f_1)\,I(f_2)\cdots I(f_n):$$

$$f_1 \odot \cdots \odot f_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}$$

On peut étendre $\hat{I}_n$ a des fonctions non symétriques en posant

$$\hat{I}_n(f) = \hat{I}_n\Big(\overbrace{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^n} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})}^{\text{partie symétrique de } f}\Big)$$

$$E(|\hat{I}_n(f)|^2) = \frac{1}{n!}\int_{M^n} |f|^2\, d\mu^n \quad \text{pour } f \text{ symétrique.}$$

Le résultat vient du résultat sur le produit de Wick
et de $L^2(m, \mathcal{m}, \mu)^{\otimes n} = L^2(m^n, \mathcal{m}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$
$L^2(m, \mathcal{m}, \mu)^{\odot n} = L^2(m^n, \mathcal{m}^{\odot n}, n!\,\mu^{\odot n})$

$$I_n(f) = n!\, \hat{I}_n(f)$$

$$:I(f_1)\cdots I(f_n): \; = \hat{I}_n(f_1 \odot \cdots \odot f_n)$$
$$= \frac{1}{n!} I_n\Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}\Big)$$
$$= I_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n).$$

$$\boxed{I_n(f) = \int_{M^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dZ(x_1) \cdots dZ(x_n)}$$

$\hat{I}_n$ intégrale sur $\underbrace{M^n / \mathfrak{S}^n}$ (Cf Guichardet $\bigcup_{n=0}^{\infty} (M^n / \mathfrak{S}^n)$ version classique de Fock)

$$\boxed{E(|I_n(f)|^2) \leq n! \int_{M^n} |f|^2 \, d\mu^n \quad \text{égalité si } f \text{ est symétrique}}$$

Prop : H esp. de Hilbert engendré par $Z(A)$, A μ-mesurable
Alors pour tout $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P)$ on peut écrire :

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{M^n} f_n \, dZ^n \qquad f_n \text{ symétrique}$$

$$E(|X|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{M^n} |f_n(x)|^2 \, d\mu^n(x)$$

Rq : $$X = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{M^n/\mathfrak{S}^n} n! \, f_n \, dZ^n$$

$$E(|X|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 \int_{M^n/\mathcal{G}^n} |f_n(x)|^2 \, d\mu^{\otimes n}(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{M^n/\mathcal{G}^n} |n!\, f_n(x)|^2 \, d\mu^{\otimes n}(x)$$

Exemples : I. Mvt brownien B_t $t \geq 0$ v.a gaussienne réelle

$$\mathrm{cov}(B_s, B_t) = \min(s,t)$$

$B_0 = 0$ $B_t - B_s \sim N(0, |t-s|)$

$f \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ $\qquad \int_0^\infty f(t)\, dB_t$

$$H = \left\{ \int_0^\infty f(t)\, dB_t, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+, dt) \right\}$$

$$= \left\{ \int_0^\infty \varphi'(t)\, dB_t, \quad \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}_+) \right\}$$

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P; \mathbb{C}) := \mathrm{Fock}_b\left(L^2(\mathbb{R}_+, dt; \mathbb{C}) \right) \qquad \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_0^{+\infty} \overline{f} g\, dt$$

$$= \mathrm{Fock}_b\left(H_0^1(\mathbb{R}_+) \right) \qquad \langle f, g \rangle_{H_0^1} = \int_0^{+\infty} \overline{f'(t)}\, g'(t)\, dt$$

$X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P; \mathbb{C})$

$$X = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f_n(t_1, t_2, \dots, t_n)\, dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}$$

On intègre sur $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < \infty$

$\mathbb{R}_+^n / \mathfrak{S}^n$

$$E(|X|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} |f_n(t_1, \dots, t_n)|^2 \, dt_1 \cdots dt_{n-1} \right] dt_n$$

2) $L^2(\mathbb{R}^d, \rho(x)\,dx) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$B_\rho(f,g) = \int f(x)\, g(x)\, \rho(x)\, dx$$ fermable sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

Th de Minlos $L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), P_\rho; \mathbb{C}) \sim \mathrm{Fock}_b(\underbrace{L^2(\mathbb{R}^d, \rho(x)\,dx)}_{H})$

$X \in L^2(S'(\mathbb{R}^d), P_{\rho}; \mathbb{C})$ a une décomposition en chaos

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{dn}} f_n(x_1, \dots, x_n) \, dZ(x_1) \dots dZ(x_n)}_{\in H^{:n:}}$$

$$E(|X|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{\mathbb{R}^{dn}} |f_n(x_1, \dots, x_n)|^2 \rho(x_1) \dots \rho(x_n) \, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho \, dx)^{\odot n}}$$

$$= \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n!} \, f_n) \Big\|^2_{\mathrm{Fock}_b(L^2(\mathbb{R}^d, \rho \, dx))}$$

III] Intégrale de Skorohod

$I : L^2(M, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow H$ int stochastique

Z mesure gaussienne stochastique associée.

$$X \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu ; L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P))$$

$$\int_M E(|X_t|^2) \, d\mu(t) < +\infty$$

$X(t, \omega)$

$\omega \longmapsto X(\cdot, \omega)$

$t \longrightarrow X(t, \cdot)$

On veut définir $\displaystyle\int_M X_t \, dZ_t$:

On se place d'abord dans le cas $X_t \in H^{:n:}$

$$X_t = \hat{I}_n(f_t) = I_n\left(\frac{1}{n!} f_t\right) \qquad f_t \in L^2(M^n, \mathcal{M}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$$

$$F(t_1, \dots, t_{n+1}) = \frac{1}{n!} f_{t_{n+1}}(t_1, \dots, t_n)$$

F mesurable sur M^{n+1} car $\hat{I}_n^{-1}$ est continue

$$\int |F(t_1, \dots, t_{n+1})|^2 d\mu^{n+1} = \int_M \left[\int_{M^n} \left|\frac{1}{n!} f_{t_{n+1}}(t_1, \dots, t_n)\right|^2 d\mu(t_1) \dots d\mu(t_n)\right] d\mu(t_{n+1})$$

$$\leq \int_M \frac{1}{n!} E(|X_{t_{n+1}}|^2)\, d\mu(t_{n+1})$$

F appartient à $L^2(\mathfrak{M}^{n+1}, \mathfrak{m}^{\otimes n+1}, \mu^{\otimes n+1})$

On pose $\displaystyle\int_{\mathfrak{M}} X_t \, dZ_t = \underbrace{\int_{\mathfrak{M}^{n+1}} F(t_1, \dots, t_{n+1}) \, dZ(t_1) \dots dZ(t_{n+1})}_{\in H^{:n+1:}}$

$$E\left(\left| \int X_t \, dZ_t \right|^2 \right) \leq (n+1)! \int_{\mathfrak{M}^{n+1}} |F(t_1, \dots, t_{n+1})|^2 \, d\mu(t_1) \dots d\mu(t_n) \, d\mu(t_{n+1})$$

$$= (n+1) \int_{\mathfrak{M}} E\left(|X_t|^2 \right) d\mu(t)$$

Plus généralement si $X \in L^2(\mathfrak{M}, \mathfrak{m}, \mu ; L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P))$

$$\int_M X_t \, dZ_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_M \underbrace{\Pi_n(X_t)}_{\in H^{:n:}} dZ_t$$

Prop : L'application $\mathcal{L}^2(M, \mathcal{M}, \mu ; L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P)) \supset D \to L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P)$

donnée par $\int X_t \, dZ_t$ est définie

sur un sous-ensemble dense D

comme une application linéaire

$$D = \left\{ X \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu ; L^2(\Omega, \mathcal{F}(H), P)), \int_M \langle X_t, N X_t \rangle + \| X_t \|^2 \, d\mu(t) < \infty \right\}$$

$$\langle X_t, N X_t \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \, E\left(\| \Pi_n(X_t) \|^2 \right)$$

Si $f \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ $\quad \int f \, dZ = I(f)$

$F \in L^2(M^n, \mathcal{M}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$

$$\int_M \underbrace{\left[\int_{M^{n-1}} F(t_1, \dots, t_n)\, dZ(t_1) \cdots dZ(t_{n-1})\right]}_{X_{n-1}(t)} dZ(t_n) = \int_{M^n} F \, dZ^n$$

$$E\left(\left|\int X_t \, dZ_t\right|^2\right) \leq \int_M \left[\langle X_t, \mathcal{N} X_t \rangle + \|X_t\|^2\right] d\mu_t$$

Thm : $\underset{\text{cte}/t}{\underbrace{X}} \in \overline{P_*}(H) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}^{\text{alg}} H^{\vee n}$ $\quad f \in L^2(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_\mu)$

$$\int_{\mathfrak{m}} X f(t)\, dZ_t = X \odot \int_{\mathfrak{m}} f(t)\, dZ_t$$

produit de Wick

Preuve : $X = :\xi_1 \cdots \xi_n: = \int_{\mathfrak{m}^n} f_1(t_1) \cdots f_n(t_n)\, dZ(t_1) \cdots dZ(t_n)$

$$\xi = \int_{\mathfrak{m}} f(t)\, dZ_t$$

$$\int f(t)\, X \, dZ_t = \int_{M^{n+1}} f(t)\, f_1(t_1) \cdots f_n(t_n)\, dZ(t_1) \cdots dZ(t_n)\, dZ(t)$$

$$= :\xi_1 \cdots \xi_n \xi: \overset{\text{Wick}}{=} X \odot \xi$$

$\blacksquare$

Traduction de l'intégrale de Skorohod en terme d'espace de Fock.

$$\mathrm{Fock}_b(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\vee n}$$

$$X \in H^{\odot n} \longrightarrow \xi \odot X \in H^{\odot n+1} \quad \text{op algébrique}$$

$$X \in H^{:n:} \longrightarrow :\xi X: \in H^{:n+1:} \quad \text{produit de Wick}$$

$$
\begin{tikzcd}
X \in H^{\odot n} \arrow[r, "\xi\odot"] \arrow[d, "\times \frac{1}{\sqrt{n!}}"'] & (n+1)\,\xi \vee X = \xi \odot X \\
\frac{1}{\sqrt{n!}} X \in H^{\vee n} \arrow[r, "a^*(\xi)"] & \sqrt{n+1}\ \xi \vee \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} X\right) \in H^{\vee n+1} \arrow[u, "\times \sqrt{(n+1)!}"']
\end{tikzcd}
$$

$$\int X\, f_t \, dZ(t) = a^*(f)\, X$$

Rq <u>sur le pb d'évolution en milieu aléatoire.</u>

$$i \partial_t \psi = -\Delta \psi + \mathcal{V}(x,\omega)\,\psi$$

$$\psi = \psi(x, \omega, t) = \psi_t(x,\omega) \quad \psi_t \in L^2(\mathbb{R}^d, dx\,;\, L^2(\Omega, \mathcal{F}(\mathcal{V}), P))$$

On peut considérer

$$\Psi_t = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_t(x,\omega)\, dZ(x) \in \underset{\underset{\mathrm{Fock}_b(L^2(\mathbb{R}^d \ldots ?)}{\wr}}{L^2(\Omega, \mathcal{F}(\mathcal{V}), P)}$$

On traduit le pb d'évolution d'un processus aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ comme un problème d'évolution dans $\mathrm{Fock}_b(L^2(\mathbb{R}^d))$.

Reste : 1) à bien traduire la dynamique hamiltonienne de ψ_t à Ψ_t

2) à bien comprendre les observables pertinentes (quantification, paramètre, et traduction dans $\mathcal{L}(\mathrm{Fock}_b(L^2(\mathbb{R}^d)))$.