



# **MASTER MATHÉMATIQUES**

**BILAN 2004 à 2007**

## 1- Finalité de la formation :

### 1.1 : le domaine scientifique

Mathématiques

### 1.2 : les spécialités de ce master

Mathématiques, spécialité recherche

### 1.3 : historique

Le master a pris la suite de la maîtrise Mathématiques et du DEA Mathématiques

## 2- Le cursus tel qu'il a été habilité :

### Description des semestres :

#### Année M1 - Semestre 1

Unité d'enseignement	Intitulé	Cours	TD	TP	Total	ECTS
UE fondamentales	Algèbre M1	39	39		78	8
	Topologie et analyse fonctionnelle	25,5	33		58,5	6
	Géométrie différentielle et systèmes dynamiques	25,5	33		58,5	6
	Modèles aléatoires	25,5	19,5	19,5	64,5	6
UE culturelles	Culture générale 1 (Anglais / Tech. d'expression et de comm.)	39			39	4

#### Année M1 - Semestre 2

Unité d'enseignement	Intitulé	Cours	TD	TP	Total	ECTS
UE fondamentales	Mémoire	25,5	33		58,5	8
3 UE de parcours au choix parmi la liste ci-contre	Algèbre M2	25,5	33		58,5	6
	Théorie des distributions	25,5	33		58,5	6
	Processus stochastiques	25,5	33		58,5	6
	Décisions statistiques	25,5	19,5	19,5	64,5	6
	Optimisation	25,5	33		58,5	6
UE culturelles	Culture générale 2 (Anglais / Tech. d'expression et de comm.)	39			39	4

#### Année M2 - Semestre 3

Unité d'enseignement	Intitulé	Cours	TD	TP	Total	ECTS
2 UE de parcours au choix parmi la liste ci-contre	Mathématiques approfondies 1 *	25,5	25,5		51	13
	Mathématiques approfondies 2 *	25,5	25,5		51	13
	Mathématiques approfondies 3 *	25,5	25,5		51	13
UE culturelles	Culture générale 3 (Anglais / Formations européennes)	39			39	4

\* Les cours porteront sur les thèmes suivants :

- Arithmétique et géométrie algébrique

- Modélisation et calcul scientifique
- Physique mathématique et équations aux dérivées partielles
- Probabilités, statistiques et traitement de l'image
- Systèmes dynamiques, théorie ergodique
- Topologie algébrique

### 3- Le cursus en fonctionnement

#### 3.1 : tableau des enseignements

##### SEM. 1 :

Algèbre M1 : c BRINON (MCF), td TIAN (Moniteur)  
 Topologie et analyse fonctionnelle : c PARREAU (PR), td BRINON (MCF)  
 Géométrie différentielle et systèmes dynamiques : c GRIGIS (PR), td RITTAUD (MCF)  
 Modèles aléatoires : c RUSSO (PR), td KRUK (Moniteur), tp ALLENBACH  
 (Ingénieur Université)

##### SEM. 2 :

Mémoires : GRIGIS (PR), RUSSO (PR), BALABANE (PR), LAFITTE (PR), HU (PR)  
 Algèbre M2 : c WILDESHAUS (PR), td CISINSKI (MCF)  
 Théorie des distributions : c BALABANE (PR), td ZERZERI (MCF)  
 Processus stochastiques : c HU (PR), td HU (PR)  
 Décisions statistiques : c HU (PR), td BEN ALAYA (MCF), tp ALLENBACH (Ingénieur Université)  
 Optimisation : c LAFITTE (PR), td AUDUSSE (MCF)

##### SEM. 3 :

Histoire des Mathématiques : c FRISCH (MCF)  
 Algèbre commutative : c WILDESHAUS (PR)  
 Equations d'onde non-linéaires : c DELORT (PR)  
 Homologie singulière des espaces topologiques : c SCHWARTZ (PR)  
 Théorie spectrale et analyse microlocale : c GRIGIS (PR)

##### SEM. 4 :

Stage : QUINT (CR), CROVISIER (CR), MOKRANE (PR)  
 Catégories et Cohomologie : c BREEN (PR)  
 Espaces classifiants : c OLIVER (PR)  
 Loi de réciprocité de Shimura et formes de Hilbert : c TILOUINE (PR)  
 Systèmes dynamiques : c QUINT (CR), CROVISIER (CR)

#### 3.2 : contenu des enseignements

#### Descriptif des unités d'enseignement

Année M1 - Semestre 1

##### Algèbre M1

- Polynômes symétriques, séries formelles.
- Corps : extensions de corps, polynôme minimal, corps cyclotomiques, corps finis, applications à la cryptographie et aux codes correcteurs d'erreur.
- Correspondance de Galois, exemples. Applications : constructions à la règle et au compas, résolution de l'équation du troisième degré.
- Modules de type fini sur un anneau principal, applications au théorème de structure des groupes abéliens de type fini et à la réduction de Jordan des matrices

##### Topologie et analyse fonctionnelle

- Compléments de topologie : espaces topologiques, compacité dans les espaces topologiques.
- Espaces métriques complets, théorème de Baire, théorème de Banach-Steinhaus, théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé.
- Théorème de Hahn-Banach.
- Opérateurs auto-adjoints compacts.

##### Géométrie différentielle et systèmes dynamiques

- Propriétés affines et métriques des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , formes fondamentales, calculs d'aire.
- Sous variétés de  $\mathbb{R}^n$  : définitions, espaces tangents, exemples. Groupes classiques, application exponentielle.
- Champs de vecteurs sur une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$  : flots, tracés d'orbites, aspCrédits dynamiques. Exemples des champs de gradient et des champs hamiltoniens.
- Théorème du puits et description de la structure locale au voisinage d'une singularité non dégénérée.
- Exemples de champs de vecteurs tangents à une sous-variété.

### Modèles aléatoires

Chaînes de Markov : Exemples, chaîne à deux états, marches aléatoires, modèles d'Ehrenfest pour la diffusion, modèles génétiques, files d'attentes, chaînes de branchement, chaînes de naissance ou de mort. États transients, états récurrents. Temps et probabilité d'absorption. Lois invariantes, stationnarité; et lois limites.

Conditionnement : Espérance et probabilité conditionnelle dans le cadre général. Indépendance conditionnelle.

Éléments de la théorie des martingales : sur martingales, sous martingales. Temps d'arrêt. Théorèmes de convergence. Intégrabilité uniforme. Un exemple venant de la finance : le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

### Culture générale S1

#### Techniques d'expression et de communication

Le projet professionnel à court et long terme. La connaissance de l'entreprise (analyse des sites WEB des entreprises et des offres de stages). Le bilan des compétences et du stage d'exécution. La recherche du stage immersion et du stage de fin d'études : analyse des annonces, rédaction des lettres de motivation et CV, préparation et simulation d'entretien de recrutement. La négociation. La rédaction du rapport de stage

#### Anglais

Entraînement systématique à la compréhension orale et à la prise de parole en continu (exposé, analyse personnelle argumentée).

Traitement de l'information à partir de messages oraux et écrits de plus en plus complexes et orientés vers le domaine "sciences et technologie" (émissions de radio, de télévision, extraits de films, articles de presse).

Recherche documentaire dans la presse scientifique et sur internet.

Une approche interculturelle est développée dans une perspective d'ouverture à l'international.

## Année M1 - Semestre 2

### Algèbre M2

Le cours portera sur l'un ou l'autre des deux programmes suivants .

- Introduction à la géométrie algébrique : topologie de Zariski, Nullstellensatz, courbes algébriques planes, points singuliers, liens avec l'arithmétique.
- Introduction à la topologie algébrique : classification des surfaces, revêtements et groupe fondamental, analogies avec la théorie de Galois.

### Théorie des distributions

- Espaces de fonctions différentiables, partitions de l'unité, convolution, régularisation.
- Distributions sur une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$  : définitions, exemples, dérivation, opérations, convergence. Espace de distributions.
- Transformation de Fourier sur  $L^1$  et  $L^2$ . Distributions tempérées, transformation de Fourier des distributions tempérées.
- Espaces de Sobolev, exemple d'application à la résolution de certaines équations aux dérivées partielles.

### Processus stochastiques

- Processus de Poisson : Processus aléatoires à temps continu. Processus de comptage. Processus de Poisson et loi exponentielles. Processus de Poisson et loi uniforme. Nombre d'événements pendant un intervalle aléatoire. Processus de Bernoulli. Processus de Poisson composé.
- Phénomènes d'attente. Classification des systèmes d'attente. Le système d'attente M/M/1. Processus de naissance et de mort. Système à plusieurs stations M/M/s. M/M/infini. Croissance de populations.
- Processus markovien à saut  
Définition et construction par les temps interarrivées. Equation de Champman-Kolmogorov. Le générateur infinitésimal. Mesure invariante. Comportement asymptotique. Processus de naissance et de mort.  
Files d'attente.

- Processus régénératifs. Définition. Lemme de Wald. File d'attente G/G/1.

### Décisions statistiques

Problèmes d'estimation. Estimation empirique de la moyenne d'un n-échantillon, intervalle de confiance. Construction d'un estimateur : Méthode empirique, maximum de vraisemblance, exemples simples de contrastes. Modèle exponentiel. Modèle statistique dominé et estimation, information de Fisher et inégalité de Cramer-Rao. Tests d'hypothèses . Exemples classiques : lois binomiales, lois normales. Lemme de Neyman-Pearson et tests optimaux. Familles à rapport de vraisemblance monotone. Quelques procédures non paramétriques : tests du  $\chi^2$ , tests basés sur les statistiques de rang, test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov. Modèles linéaires, théorème de Cochran et de Gauss-Markov, tests de sous-modèles, analyse de la variance. Statistique séquentielle  
On s'efforcera de traiter quelques études de cas: recueil des données, organisations des expériences, définitions des tests adéquats, analyse des résultats. Enfin, le cours pourra s'ouvrir sur des applications plus avancées en apprentissage statistique ou en reconnaissance des formes.

### Optimisation

Minimisation d'une fonctionnelle sur une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}^d$ , minimisation sur une partie compacte d'un espace de Hilbert.

Dérivées au sens de Fréchet et au sens de Gâteaux, dérivées secondes

Condition d'Euler, condition suffisante de Legendre, condition forte de Legendre

Minimisation d'une fonctionnelle sous contrainte égalité ou inégalité,

contraintes régulières, contraintes admissibles, théorème des

multiplicateurs de Lagrange

Théorème de Kuhn et Tucker,

Problème dual

Méthodes numériques de recherche d'un minimum: relaxation, algorithmes

de descente, (pas de Wolfe). Méthodes de gradient, de gradient conjugué, de gradient réduit

Introduction à la méthodes des éléments finis

Algorithmes d'Uzawa

### Culture générale S2

#### Techniques d'expression et de communication

La communication dans l'équipe de projet: le management d'une équipe, la motivation et la délégation, la conduite de réunions, la gestion des conflits.

Simulation d'entretien en français et en anglais avec un consultant spécialisé dans le recrutement

#### Anglais

Les supports oraux et écrits sont orientés autour de deux axes :

- le champ d'étude large de l'étudiant (documentation scientifique, conférences)
- le domaine professionnel (introduction au monde de l'entreprise)

La compréhension et l'expression orales sont privilégiées par des mises en situation visant à tester la capacité à interagir (l'anglais au téléphone, résolution de problèmes, participation à un projet). A partir de scénario "réalistes" les étudiants seront fortement incités à la prise de parole et à la production d'écrits (comptes-rendus, courriers divers présentation de travaux).

## Année M2 - Semestre 3

### Mathématiques approfondies 1, 2, 3

Ces enseignements dont le contenu sera élaboré chaque année nécessiteront un travail personnel important. Il s'agira de cours devant permettre à l'étudiant d'acquérir des outils sophistiqués des mathématiques portant sur les thèmes suivants :

Arithmétique et géométrie algébrique

Modélisation et calcul scientifique

Physique mathématique et équations aux dérivées partielles

Probabilités, statistiques et traitement de l'image

Systèmes dynamiques, théorie ergodique

Topologie algébrique

### Culture générale S3

#### Formations européennes

- Les formations universitaires européennes
- Les systèmes de recherches scientifiques
- Les technopôles liées à la recherche au niveau européen.

### Anglais

Les supports oraux et écrits sont orientés autour de trois axes :

- Les compétences de communication liées à l'emploi : savoir-faire et compétences répondant à la recherche de stage (CV, lettre de motivation, simulations d'entretiens d'embauche)

- Les compétences de communication liées à la vie universitaire et la recherche : production d'écrits et de présentations orales (résumés de conférences, rédactions d'articles courts, "abstracts", présentations orales de travaux)

- Une approche interculturelle sensibilise l'étudiant à une perspective d'échanges et d'insertion professionnelle dans des équipes multilingues.

## Année M2 - Semestre 4

### Mathématiques approfondies 4, 5, 6

Ces enseignements dont le contenu sera élaboré chaque année nécessiteront un travail personnel très important. Il s'agira de cours portant sur des sujets de recherche actuels autour des thèmes suivants :

Arithmétique et géométrie algébrique

Modélisation et calcul scientifique

Physique mathématique et équations aux dérivées partielles

Probabilités, statistiques et traitement de l'image

Systèmes dynamiques, théorie ergodique

Topologie algébrique

### 4- Flux étudiants

#### 4.1 : flux global pour la mention Mathématiques

	2004 / 2005	2005 / 2006	2006 / 2007	2007 / 2008
Inscrits M1	25	13	9	5
Diplômés M1	6	6	2	
Inscrits M2		7	2	5
Diplômés M2		6	2	

#### 4.2 : flux pour la spécialité mathématiques

	2004 / 2005	2005 / 2006	2006 / 2007	2007 / 2008
Inscrits M2		7	2	5
Diplômés M2		6	2	

### 5- Dotations en moyen

5.1 : nombre total d'heures d'enseignement en M1 : 284 (éq. TD) pour le SEM. 1. et 288 (éq. TD) + 5 mémoires pour le SEM. 2.- dont 0 en heures supplémentaires.

5.2 : nombre total d'heures d'enseignement en M2 de la spécialité mathématiques : 270 (éq. TD) pour le SEM. 3, dont 0 en heures supplémentaires.

137 (éq. TD) + 2 stages, dont 39 heures + 1 stage en heures supplémentaires. pour le SEM. 4.

5.4 : budget de fonctionnement du M1 : 900 euros

5.5 : budget de fonctionnement du M2 de la spécialité Mathématiques : 1290 euros

## **6- Insertion professionnelle des diplômés 2006**

6.1.1 : diplômés M2 dans la spécialité Mathématiques : 6

6.1.2 : nombre de diplômés sondés : 3

6.1.3 : ventiler le nombre des sondés entre les catégories professionnelles (en poste dans l'enseignement supérieur, en thèse, ingénieurs en précisant le domaine, ...) les 3 diplômés sondés sont en thèse au LAGA.

## **7- Insertion professionnelle des diplômés 2007**

7.1.1 : diplômés M2 dans la spécialité Mathématiques : 2

7.1.2 : nombre de diplômés sondés : 2

7.1.3 : ventiler le nombre des sondés entre les catégories professionnelles (en poste dans l'enseignement supérieur, en thèse, ingénieurs en précisant le domaine, ...) l'un des diplômés est en thèse et l'autre prépare l'agrégation de mathématiques.

## **8- Investissement du(es) laboratoire(s) dans la formation (rédiger par Daniel BARSKY, directeur du LAGA)**

Une des missions d'un laboratoire, universitaire et CNRS, de recherche en mathématiques comme le LAGA est de valoriser et transmettre son savoir-faire, ses connaissances et ses contributions scientifiques. Cette valorisation et cette transmission peuvent avoir lieu au niveau recherche ou au niveau professionnel.

Au niveau recherche la transmission a lieu par des thèses, des post-doc, des invitations, des conférences, des séminaires. Au niveau professionnel elle a lieu par des masters, des thèses, des contrats. Un master adossé au laboratoire est un point de passage obligé pour au moins une partie des doctorants du laboratoire, une autre partie des doctorants proviendra d'étudiants formés ailleurs, inversement le master forme des étudiants qui seront doctorants ailleurs. Un master adossé à un laboratoire est aussi un enseignement professionnel pour des cadres dans l'industrie et les services. Dans tous les cas le master est le marche-pied pour former des étudiants aux techniques développées dans le laboratoire.

Il est donc indispensable pour un laboratoire comme le LAGA tourné à la fois vers les mathématiques fondamentales et les applications de s'adosser à un ou plusieurs masters afin de disposer d'un vivier de doctorants, et de former des cadres l'industrie et les services formés au contact de chercheurs actifs.

Doctorats en cours au LAGA issus du master Math

Benjamin Mussat (promo 2007, agrégé 2006), Allocataire-Moniteur, directeur de thèse François Parreau

Abdelaziz Marjane (promo 2006, agrégé 2007), Allocataire-Moniteur, directeur de thèse Farid Mokrane

Nguyen Dang Ho Hai (promo 2006), Allocataire-Moniteur, directeur de thèse Lionel Schwartz

Sylvain Rairat (promo 2006), Allocataire-Moniteur, directeur de thèse Geoffrey Powell

Andrej Neugebauer (promo 2005), Allocataire-Moniteur, directeur de thèse Jacques Tilouisne

Zakaria Hachemaoui (promo 2004), Allocataire-Moniteur, directeur de thèse Fabrice Planchon

