FEUILLE DE TD 1

ACTIONS DE GROUPES

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Exercice 1 (Généralités). (1) Rappeler la définition d'une action d'un groupe G sur un ensemble X . Rappeler les notions d'*orbite*, de *stabilisateurs*. Quand dit-on qu'une action est *transitive* (resp. *libre*, resp. *simplement transitive*) ?

- (2) Expliquer comment identifier l'orbite de $x \in X$ au quotient $G/\text{Stab}_G(x)$. Qu'obtient-on dans le cas d'une action simplement transitive ?
- (3) Quel est le lien entre les stabilisateurs des différents points d'une orbite ?
- (4) Montrer que la donnée d'une action de G sur X équivaut à celle d'un morphisme de groupes $G \rightarrow \text{Bij}(X)$.

Exercice 2 (Exemples d'actions de groupes). Pour chacune des actions suivantes, décrire les orbites, les stabilisateurs et l'espace quotient.

- (1) $\mathbb{R}_+^*$ opérant sur $\mathbb{C}$ par multiplication,
- (2) $SO(2)$ opérant sur l'ensemble S^1 des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de norme 1,
- (3) $SO(2)$ opérant diagonalement sur $S^1 \times S^1$,
- (4) $GL_n(\mathbb{K})$ opérant sur les vecteurs de $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$,
- (5) $GL_n(\mathbb{K})$ opérant sur les bases de $\mathbb{K}^n$,
- (6) $GL_n(\mathbb{K})$ opérant sur les droites de $\mathbb{K}^n$,
- (7) $GL_n(\mathbb{K})$ opérant sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$,
- (8) Un groupe G opérant sur lui-même par translation,
- (9) Un groupe G opérant sur lui-même par conjugaison.

Exercice 3. Montrer les isomorphismes de groupes suivants :

- (1) $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$,
- (2) $O(n)/SO(n) \cong C_2$.

ISOMÉTRIES EN DIMENSION 2 ET HOMOGRAPHIES

Exercice 4 (Classification des isométries du plan). (1) Montrer que $O(2)$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$, avec a et b des réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

- (2) En déduire une description $SO(2)$ et $O^-(2)$ en termes de matrices en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, puis en termes d'automorphismes du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. Décrire géométriquement l'action.
- (3) Quels sont les matrices diagonalisables de $O(2)$?
- (4) Démontrer que les groupes $SO(2)$, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$ et $U(1)$ sont isomorphes.
- (5) Montrer que toute isométrie de $\mathbb{R}^2$ est la composée d'au plus 2 réflexions.
- (6) Est-ce que le groupe $O(2)$ est isomorphe à $SO(2) \times C_2$?

Exercice 5 (Droite projective, homographies et birapport). On considère la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$, que l'on définit comme l'ensemble des droites de $\mathbb{K}^2$, ou de manière équivalente comme le quotient de $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ pour l'action par homothéties de $\mathbb{K}^*$. La droite engendrée par un vecteur non nul $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ sera notée $[x, y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

- (1) Montrer que l'application $\varphi: \mathbb{K} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ envoyant $s \in \mathbb{K}$ sur $[s, 1]$ et ∞ sur $[1, 0]$ est une bijection. Donner son inverse.
- (2) Montrer que l'action de $GL_2(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ induit une action sur la droite projective, de noyau $\mathbb{K}^*$. On note $PGL_2(\mathbb{K})$ le groupe quotient $GL_2(\mathbb{K})/\mathbb{K}^*$.
- (3) Montrer que l'action de $PGL_2(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ induite par l'identification φ est donnée par la formule suivante : pour un élément $[g] \in PGL_2(\mathbb{K})$ représenté par une matrice $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $GL_2(\mathbb{K})$, on a

$$[g] \cdot t = \frac{at + b}{ct + d} \quad \text{pour } t \notin \{-d/c, \infty\} \text{ et } c \neq 0.$$

Étendre la formule au cas général. On appelle *homographie* une telle bijection de la droite projective dans elle-même.

- (4) Montrer que cette action est *trois fois simplement transitive*, c'est-à-dire que si (D_1, D_2, D_3) et (D'_1, D'_2, D'_3) sont deux triplets de points distincts dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, alors il existe une unique homographie $[g] \in PGL_2(\mathbb{K})$ envoyant D_i sur D'_i pour $i = 1, 2, 3$. En déduire que l'action est fidèle et donc que l'ensemble des homographies s'identifie au groupe $PGL_2(\mathbb{K})$.

Soit X le sous-ensemble de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})^4$ formés des quadruplets de points deux à deux distincts et soit $(a, b, c, d) \in X$. Par la question précédente, il existe une unique homographie envoyant a sur ∞ , b sur 0 et c sur 1 ; on la note h . L'élément $h(d) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ est appelé *birapport des points a, b, c, d* et est noté $[a, b, c, d]$.

- (5) Montrer que le birapport est invariant par homographies et qu'il est donné par la formule

$$[a, b, c, d] = \frac{c - a}{c - b} \cdot \frac{d - b}{d - a}.$$

- (6) En déduire que le birapport réalise une bijection

$$X/PGL_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

- (7) Montrer que le groupe des similitudes directes du plan complexe s'identifie au sous-groupe de $PGL_2(\mathbb{C})$ formé des homographies fixant ∞ .
- (8) Montrer que $PGL_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et l'inversion $\sigma: z \mapsto 1/z$.
- (9) Montrer que l'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie est un cercle ou une droite. On pourra se ramener au cas de l'inversion.
- (10) Montrer que a, b, c et d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport $[a, b, c, d]$ est réel.