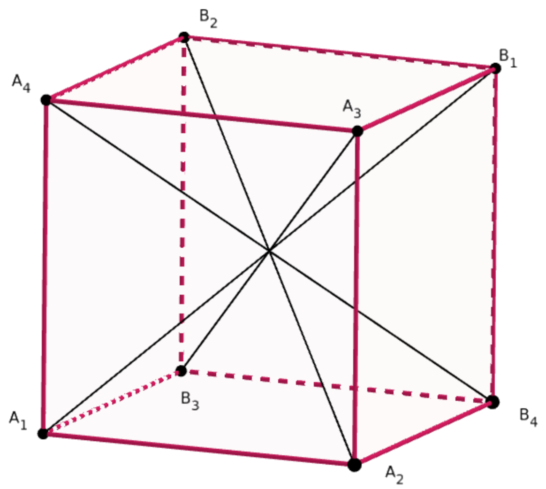
Feuille de TD 3 - Corrigé exercice 9

1. Groupe des isométries du cube

Soit C un cube de l'espace euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. On note $G = \mathrm{Is}(C)$ le sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ formé des isométries affines qui stabilisent C. On notera G^+ le sous-groupe de G constitué des isométries positives.



On nomme $A_1, \ldots, A_4, B_1, \ldots, B_4$ les 8 sommets du cube, de telle sorte que les points A_i et B_i soient opposés et que les points A_1 et A_3 ne soient pas reliés par une arête. On note D_i la droite (A_iB_i) et O l'isobarycentre du cube. Observons que les paires $\{A_i, B_i\}$ sont exactement les paires de points de C de distance maximale. Comme G agit par isométries sur C et que les isométries préservent les distances, on obtient une action de G sur l'ensemble $X = \{D_1, \ldots, D_4\}$ des grandes diagonales. La restriction de l'action au sous-groupe G^+ fournit un morphisme de groupes

$$\varphi \colon G^+ \to \mathrm{Bij}(X) \cong S_4.$$

On va montrer que φ est un isomorphisme.

Injectivité. Soit $g \in \ker(\varphi)$. L'isométrie g vérifie donc $g|_X = \mathrm{id}_X$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, 4\}$, g stabilise l'ensemble $\{A_i, B_i\}$. On raisonne par disjonction de cas.

(1) Supposons d'abord que $g(A_1) = A_1$. Comme g est bijective et stabilise $\{A_1, B_1\}$, on déduit que $g(B_1) = B_1$. Alors g n'envoie pas A_2 sur B_2, sinon on aurait $g(A_1A_2) = A_1B_2$ ce qui contredirait le fait que g préserve les distances. Cela force $g(A_2) = A_2$ et $g(B_2) = B_2$. De même, on montrer que $g(A_4) = A_4$ et $g(B_4) = B_4$. Ainsi g fixe le repère $A_1A_2A_4B_1$ et donc g est l'identité de $\mathcal{E}$.

(2) Supposons maintenant que g envoie A_1 sur B_1. Dans ce cas, en considérant la symétrie centrale s_O du cube (qui fixe donc O et dont la partie vectorielle est $-\mathrm{id}_E$), on a que s_Og fixe A_1 et donc par le raisonnement précédent $s_Og = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, ce qui implique $g = s_O$, contredisant le fait que g est une isométrie positive.

Surjectivité. Comme S_4 est engendré par ses transpositions, il suffit de montrer que chaque transposition $(D_iD_j) \in \mathrm{Bij}(X)$ est dans l'image de φ, pour $i \neq j$. Notons k et ℓ les indices tels que $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère le renservement g_{ij} du plan engendré par les points O, A_k et A_ℓ par rapport à O (donc g_{ij} fixe O et sa partie vectorielle a pour matrice $\mathrm{diag}(1, -1, -1)$ dans la base orthogonale $(\vec{OA_i} + \vec{OA_j}, \vec{OA_k}, \vec{OA_\ell})$). Ce renversement fixe les droites D_k et D_ℓ tout en permutant D_i et D_j ; on a donc $\varphi(g_{ij}) = (D_iD_j)$.

On a montré que $G^+ \cong S_4$. On sait que G est engendré par G^+ et la symétrie s_O ; de plus, cette symétrie est centrale (commute avec tout élément). Ainsi G est isomorphe à $S_4 \times C_2$ via l'application

$$G \to S_4 \times C_2, \quad g \mapsto \begin{cases} (g, 1) & \text{si } g \in G^+, \\ (gs_O, s_O) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici, on a identifié le sous-groupe $\langle s_O \rangle$ au groupe cyclique C_2.

2. Coloriages du cube

On cherche à déterminer le nombre de coloriages du cube avec $n = 5$ couleurs. On se donne Y un ensemble à n éléments correspondant aux différentes couleurs et on note Φ l'ensemble des faces du cube. Un coloriage de C est obtenu en attribuant une couleur à chaque face du cube, ce qui définit une fonction de Φ dans Y. On note $\mathcal{F}(\Phi, Y)$ l'ensemble de ces fonctions. Plusieurs telles fonctions peuvent induire le même coloriage : c'est le cas si et seulement si une rotation de l'espace permet de passer d'une fonction à l'autre. Plus précisément, l'action du groupe G^+ sur le cube induit une action sur Φ et donc sur $\mathcal{F}(\Phi, Y)$ donné pour $g \in G^+$ et $f \in \mathcal{F}(\Phi, Y)$ par

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}(x)).$$

La présence de l'inverse de g dans la formule assure d'obtenir une action à gauche (et non à droite). Ainsi l'ensemble des coloriages est donné par l'ensemble des orbites de cette action, soit $\mathcal{F}(\Phi, Y)/G^+$.

Pour déterminer le nombre d'orbite, on utilise le théorème de Burnside : on obtient que le nombre de coloriages est égal à la quantité

$$|\mathcal{F}(\Phi, Y)/G^+| = \frac{1}{|G^+|} \sum_{g \in G^+} |\mathrm{Fix}_g|, \tag{1}$$

où Fix_g est le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\Phi, Y)$ formé des éléments fixés par g. On observe facilement que Fix_g est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{F}(\Phi/\langle g \rangle, Y)$ des fonctions à valeurs dans Y ayant pour domaine l'espace quotient de Φ par l'action du sous-groupe généré par g. Le cardinal de cet ensemble est $|\mathcal{F}(\Phi/\langle g \rangle, Y)| = n^{|\Phi/\langle g \rangle|}$. On remarque que $|\Phi/\langle g \rangle|$ ne dépend que de la classe de conjugaison dans G^+ de l'élément g. Pour calculer le membre de droite de (1), il suffit de considérer un représentant de chaque classe de conjugaison.

En utilisant l'identification $G^+ \cong S_4$, on trouve facilement les 5 classes de conjugaison : ce sont l'identité, les 6 transpositions, les 8 3-cycles, les 6 4-cycles et les 3 produits de paires de transpositions à supports disjoints. Il faut maintenant comprendre l'action des éléments de chacune de ces classes sur les faces. Pour M et N deux points opposés d'une même face de C, on notera $C(MN)$ la face en question.

(1) ($g = \mathrm{id}$) Dans ce cas, $|\Phi/\langle g \rangle| = 6$.

(2) ($g = (12)$) Dans ce cas, g est donné par le renversement du plan contenant D_3 et D_4. On voit qu'alors les faces $C(A_3B_4)$ et $C(A_4B_3)$ sont permutées, de même que les 2 faces adjacentes à (A_1A_2), ainsi que les deux faces adjacentes à (B_1B_2). On a donc 3 orbites sous cette action, d'où $|\Phi/\langle g \rangle| = 3$.

(3) ($g = (123)$) Ici, g est la rotation fixant O, d'axe OA_4 et d'angle $2\pi/3$. Cette isométrie permute cycliquement les 3 faces adjacentes au point A_4, et de même pour les faces adjacentes à B_4. Ainsi le nombre d'orbites est ici $|\Phi/\langle g \rangle| = 2$.

(4) ($g = (1234)$) Dans ce cas, g est la rotation fixant O, d'axe orthogonal à la face $A_1A_2A_3A_4$ et d'angle $\pi/2$. Cette isométrie fixe les faces opposées $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$ et permute cycliquement les 4 faces restantes. Ainsi le nombre d'orbites est $|\Phi/\langle g \rangle| = 3$.

(5) ($g = (12)(34)$) En utilisant la description de l'action des transpositions, on voit facilement que g envoie les faces $C(A_1A_3)$ et $C(A_1B_4)$ vers leur opposée et fixe les 2 faces restantes, donc le nombre d'orbites vaut ici $|\Phi/\langle g \rangle| = 4$.

On conclut le calcul : le nombre de coloriages du cube avec 5 couleurs est

$$|\mathcal{F}(\Phi, Y)/G^+| = \frac{1}{24}\left(1 \cdot n^6 + 6 \cdot n^3 + 8 \cdot n^2 + 6 \cdot n^3 + 3 \cdot n^4\right) = \frac{19200}{24} = 800.$$