Feuille de TD 2

Géométrie affine et barycentres

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Exercice 1 (Groupe affine). Soit a un point de $\mathcal{E}$.

(1) Montrer que l'application $f \mapsto \vec{f}$ induit une bijection de l'ensemble $GA_a(\mathcal{E})$ des bijections affines de $\mathcal{E}$ qui fixent le point a vers $GL(E)$.

(2) En déduire que le groupe affine $GA(\mathcal{E})$ s'écrit comme un produit semi-direct $E \rtimes_{\psi_a} GL(E)$, pour une action $\psi_a\colon GL(E) \to \mathrm{Aut}(E,+)$ que l'on précisera.

(3) Supposons que $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$. Déterminer le centre de $GA(\mathcal{E})$.

Exercice 2 (Associativité du barycentre). On considère deux systèmes de points pondérés $A = ((a_1,\alpha_1),\ldots,(a_n,\alpha_n))$ et $B = ((b_1,\beta_1),\ldots,(b_m,\beta_m))$ tels que $\sum_i \alpha_i$ et $\sum_j \beta_j$ sont non nuls et soit b le barycentre de B. Montrer que les systèmes $A \cup B$ et $A \cup \{(b, \sum_j \beta_j)\}$ ont le même barycentre.

Exercice 3.

(1) Soit g la barycentre de $((a,\alpha),(b,\beta),(c,\gamma))$, où l'on suppose que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $\beta+\gamma \neq 0$. Montrer que le point d'intersection de (ag) et de (bc) coïncide avec le barycentre de $((b,\beta),(c,\gamma))$.

(2) En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes au centre de gravité du triangle, situé au tiers de chaque médiane.

Exercice 4. On considère $a,b,c \in \mathcal{E}$ trois points distincts et $\sigma = (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\alpha+\beta+\gamma \neq -1$. On note f_σ l'application qui à $m \in \mathcal{E}$ associe le barycentre m' de $((a,\alpha),(b,\beta),(c,\gamma),(m,1))$.

(1) Montrer que f_σ est affine.

(2) Soit $\vec{a} \in E$. Existe-t-il σ tel que f_σ soit la translation $t_{\vec{a}}$?

(3) Soit $d \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Existe-t-il σ tel que f_σ soit l'homothétie $h_{d,\lambda}$?

Exercice 5. Soit $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application entre deux espaces affines. Montrer que f est affine si, et seulement si, f préserve les barycentres.

Exercice 6. Donner une preuve barycentrique du théorème de Desargues.