

# Géométrie affine euclidienne

## Exercice 1. *Le théorème de la bissectrice*

Soit  $ABC$  un triangle non plat et soit  $D \in (BC)$  tel que  $(AD)$  est la bissectrice intérieure de  $\widehat{BAC}$ . On se propose de montrer que  $AB \cdot DC = AC \cdot BD$  de deux façons différentes.

1. Montrer le résultat en utilisant la loi de sinus .
2. Soit  $E \in (AC)$  tel que  $(BE)$  est parallèle à  $(AD)$ . Montrer que les triangles  $CAD$  et  $CEB$  sont semblables et en déduire le résultat annoncé.

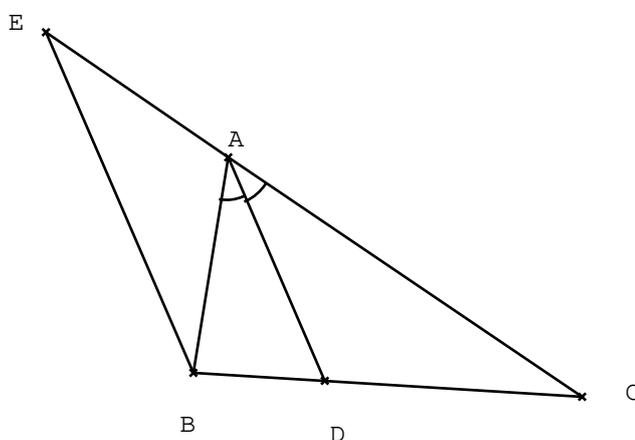


FIGURE 1 – Théorème de la bissectrice

**Exercice 2.** (a) Avec les notations de la figure 2, montrer que l'angle  $a$  est égal au triple de l'angle  $b$ .

(b) En vous inspirant de la question précédente, proposer, comme Archimède, une méthode pour trisecter les angles à l'aide d'un compas et d'une règle marquée, i.e. portant deux marques.

**Exercice 3.** 1) Dans le plan affine on note  $T$  la transformation qui à un triangle  $A_0B_0C_0$  associe le triangle de sommets  $A_1B_1C_1$  les milieux respectifs de  $[B_0C_0]$ ,  $[C_0A_0]$  et  $[A_0B_0]$ . Étudier la suite des triangles  $A_nB_nC_n$  obtenue en itérant  $T$ .

**Indication :** on donnera une application affine envoyant les  $A_n, B_n, C_n$  sur  $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ .

2) On considère à présent un polygone  $A_1A_2 \cdots A_n$  du plan affine et soit  $T$  la transformation qui lui associe le polygone de sommets  $A'_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  où  $A'_i$  est l'isobarycentre des  $A_j$  pour  $j \neq i$ . Étudier la suite des polygones obtenus en itérant  $T$ .

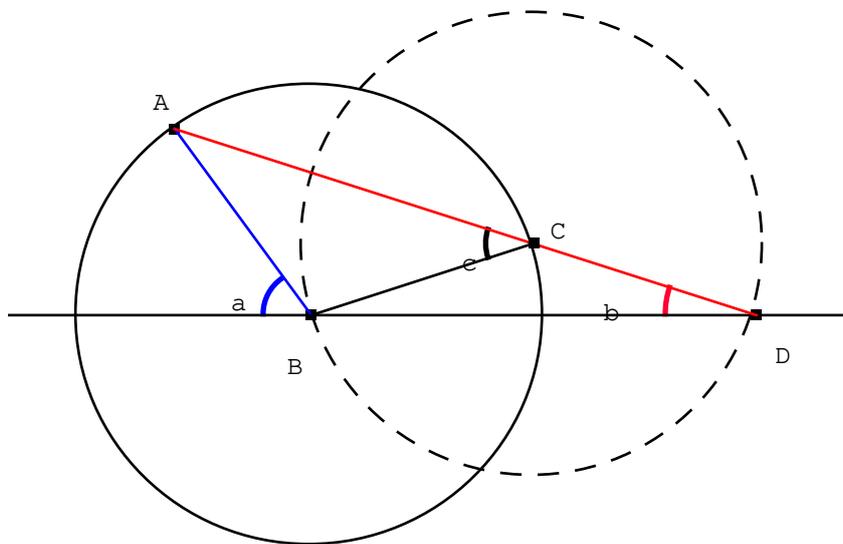


FIGURE 2 – Trisection de l'angle  $a$  à l'aide d'un compas et d'une règle marquée

**Indication** : comme dans la question précédente, on introduira une application affine passant d'un polygone au suivant.

- 3) Généraliser le procédé précédent en dimension quelconque.
- 4) Dans le plan affine, étant donné un polygone de sommet  $A_1 \cdots A_n$ , on note  $T$  la transformation qui lui associe le polygone  $A'_1 \cdots A'_n$  où  $A'_i$  est le milieu de  $[A_i A_{i-1}]$  en posant  $A_{-1} = A_n$ . Cette transformation est-elle bijective ?

**Indication** : on pourra traduire matriciellement la transformation.

#### Exercice 4. (Point de Gergonne)

Notons  $D, E, F$  les points de contact du cercle inscrit d'un triangle  $ABC$  avec ses côtés, comme sur la figure ci-dessous.

- 1) Montrer, en utilisant le théorème de Ceva dont on rappellera l'énoncé, que les droites  $AE, BF$  et  $CD$  sont concourantes au point dit de Gergonne.
- 2) Montrer que les coordonnées barycentriques homogènes du point de Gergonne sont  $(\tan \frac{\alpha}{2} : \tan \frac{\beta}{2} : \tan \frac{\gamma}{2})$ .

**Exercice 5.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 2 muni d'une forme quadratique  $q$  de signature  $(1, 1)$ .

- Montrer qu'il existe une base  $(e_1, e_2)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $q$  y soit égale à  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

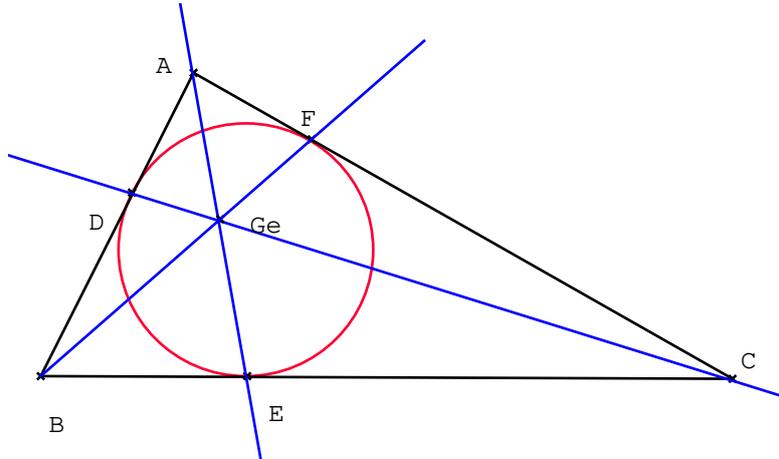


FIGURE 3 –

- Soit  $f$  un élément de  $O^+(q)$  (resp.  $O^-(q)$ ) montrer que sa matrice dans la base  $(e_1, e_2)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$  (resp.  $\begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k & 0 \end{pmatrix}$ ) pour  $k \in \mathbb{R}^*$ . On note  $O^{++}(q)$  la composante connexe de  $O^+(E)$ .
- On fait agir  $O(q)$  sur les droites de  $E$ . Décrire les orbites sous  $O(q)$ ,  $O^+(q)$  et  $O^{++}(q)$ . Définir alors la notion d'angle hyperbolique de "deux" droites ainsi que sa mesure.

1) D'après la loi des sinus dans le triangle  $ABD$  (resp.  $ADC$ ) on a :

$$\frac{\sin \widehat{BDA}}{AB} = \frac{\sin \widehat{BAD}}{BD} \text{ resp. } \frac{\sin \widehat{CDA}}{AC} = \frac{\sin \widehat{DAC}}{CD}$$

et comme  $\sin \widehat{BDA} = \sin \widehat{CDA}$  et  $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ , on en déduit

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

d'où le résultat.

2) Le triangle  $AEB$  étant isocèle en  $A$ , on en déduit que  $AE = AB$ . Les angles en  $E$  et  $B$  du triangle  $CEB$  sont respectivement égaux aux angles en  $A$  et  $D$  du triangle  $CAD$  et donc  $CEB$  et  $CAD$  sont semblables. On en déduit donc que  $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AC} = \frac{BD}{DC}$  d'où le résultat.

*Remarque :* le résultat est encore valable pour la bissectrice extérieure, la preuve étant strictement la même.

2) On trissecte un angle  $a$  en procédant comme sur la figure 2 :

- on trace un cercle de centre  $B$  et de rayon la distance  $r$  séparant les deux marques de la règle ;
- on dispose alors la règle de façon à ce qu'elle passe par  $A$ , que l'une des marques passe par le cercle et que l'autre soit sur  $(BD)$ .
- L'angle  $b$  est alors égal à  $a/3$ .

En effet le triangle  $BCD$  est isocèle en  $C$  et donc  $\widehat{CBD} = b$  de sorte que  $c = 2b$ . Or  $BCA$  étant isocèle en  $B$ , on a  $\widehat{BAC} = c$  et donc  $\widehat{ABC} = \pi - 2c = \pi - 4b$  et  $\widehat{ABD} = \pi - 3b = \pi - a$  soit  $a = 3b$ .

3) 1) Notons  $G$  l'isobarycentre de  $A_0B_0C_0$  et soit  $h$  l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$ . De l'associativité du barycentre, on obtient que  $A_1 = f(A_0)$  et de même pour  $B_1$  et  $C_1$ . Ainsi le triangle  $A_nB_nC_n$  s'obtient à partir de  $A_0B_0C_0$  en appliquant l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $(-\frac{1}{2})^n$ . Le triangle limite est le triangle dégénéré d'unique sommet  $G$ .

2) Comme précédemment, soit  $G$  l'isobarycentre des  $A_i$  et  $f$  l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-\frac{1}{n-1}$ . D'après l'associativité du barycentre on a  $A'_i = f(A_i)$  et donc  $A_i^{(r)}$  s'obtient comme l'image de  $A_i$  par l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $(-\frac{1}{n-1})^r$ . Le polygone limite est réduit à l'unique sommet  $G$ .

3) L'associativité du barycentre étant valide en toute dimension, la transformation  $T$  s'obtient toujours en appliquant l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-\frac{1}{n}$  où  $n$  est le nombre de sommets.

4) En notant  $z_i, z'_i$  les affixes de  $A_i$  et  $A'_i$ , on a la relation  $Z' = AZ$  avec

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad Z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{2}(I_n + J),$$

où  $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On vérifie aisément que  $I_n, J, \dots, J^{n-1}$  forme une famille

libre de sorte que le polynôme minimal de  $J$  est aussi son polynôme caractéristique et comme  $J^n = I_n$  on en déduit qu'il est égal à  $X^n - 1$ . Ainsi  $J$  est diagonalisable de valeur propre les  $\zeta_n^k$  avec  $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$  et  $k = 0, \dots, n-1$ . Ainsi  $A$  est diagonalisable de valeurs propres les  $\frac{\zeta_n^k + 1}{2}$ .

Pour  $n$  impair, on constate que 0 n'est pas une valeur propre de  $A$  et que donc la transformation est bijective. En revanche pour  $n$  pair,  $A$  n'est pas inversible et la réponse est donc clairement non.

**4** 1) On a  $AD = AF$ ,  $BD = BE$  et  $CE = CF$  de sorte que  $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = -1$  et l'existence du point de Gergonne découle du théorème de Ceva.

2) Dans le triangle rectangle  $BEI$  où  $I$  est le centre du cercle inscrit, on a  $BE \cdot \tan \frac{\beta}{2} = r$ ; de même  $CE \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = r$  de sorte que  $E$  a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(0 : \tan \frac{\beta}{2} : \tan \frac{\gamma}{2})$ . Par permutations circulaires,  $D$  (resp.  $F$ ) a pour coordonnées barycentriques homogènes  $(\tan \frac{\alpha}{2} : \tan \frac{\beta}{2} : 0)$  (resp.  $(\tan \frac{\alpha}{2} : 0 : \tan \frac{\gamma}{2})$ ) d'où le résultat.

**5**