Mathématiques des systèmes de vote

Séminaire des doctorant·es

Hugo Pourcelot

USPN

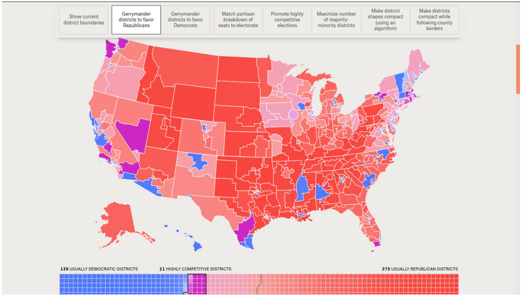
10 novembre 2020

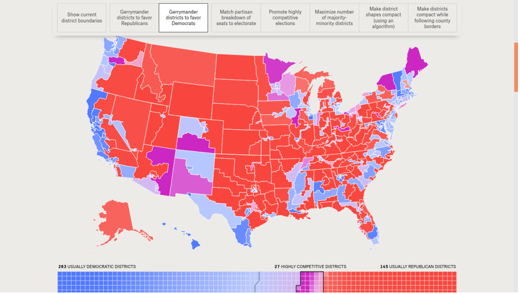
Introduction

Parmi les obstacles possibles à la démocratie :

1. système représentatif,
2. liberté académique,
3. faible indépendance des médias,
4. faible indépendance du système judiciaire,
5. limitation du champ possible des décisions,
6. influence du découpage des circonscriptions,
7. etc.

Découpage des circonscriptions





Introduction

Parmi les obstacles possibles à la démocratie :

1. système représentatif,
2. liberté académique,
3. faible indépendance des médias,
4. faible indépendance du système judiciaire,
5. limitation du champ possible des décisions,
6. influence du découpage des circonscriptions,
7. etc.

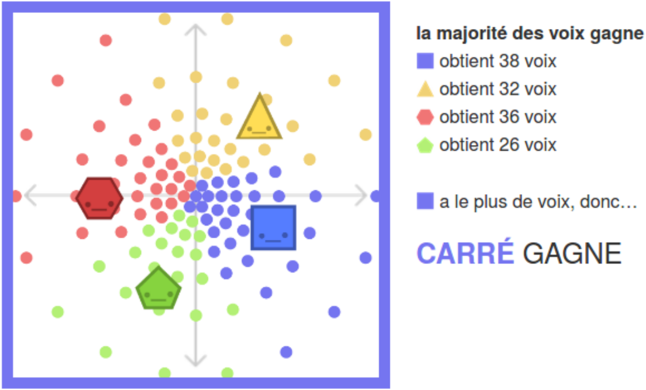
on va étudier un élément plus technique : le **mode de scrutin**.

Problèmes du système usuel

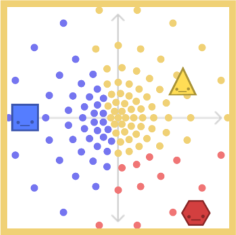
Méthode usuelle : scrutin uninominal majoritaire, à 1 ou 2 tours (SUM)
i.e. la majorité des voix l'emporte.

Problèmes du système usuel

Méthode usuelle : scrutin uninominal majoritaire, à 1 ou 2 tours (SUM) i.e. la majorité des voix l'emporte.



Problèmes du système usuel (SUM)



la majorité des voix gagne

■ obtient 49 voix

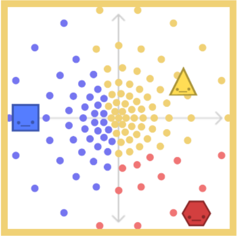
▲ obtient 66 voix

⬢ obtient 17 voix

▲ a le plus de voix, donc…

TRIANGLE GAGNE

Problèmes du système usuel (SUM)

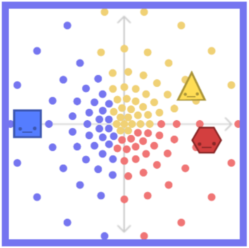


la majorité des voix gagne

- ■ obtient 49 voix
- ▲ obtient 66 voix
- ⬢ obtient 17 voix

▲ a le plus de voix, donc…

TRIANGLE GAGNE



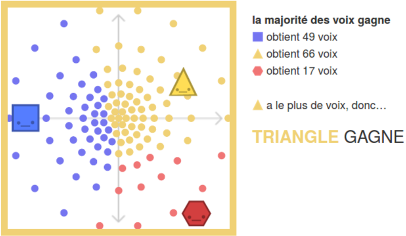
la majorité des voix gagne

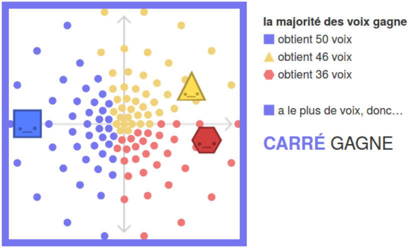
- ■ obtient 50 voix
- ▲ obtient 46 voix
- ⬢ obtient 36 voix

■ a le plus de voix, donc…

CARRÉ GAGNE

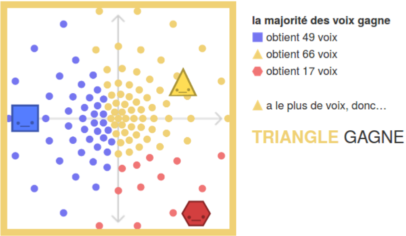
Problèmes du système usuel (SUM)

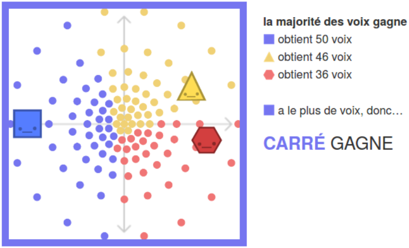




Dilution des voix $\rightsquigarrow$ dilemme du vote utile.

Problèmes du système usuel (SUM)

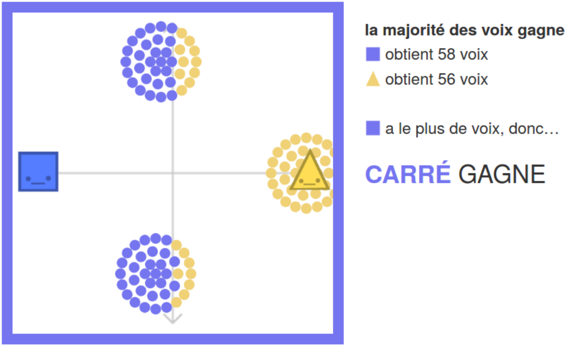




Dilution des voix $\rightsquigarrow$ dilemme du vote utile.

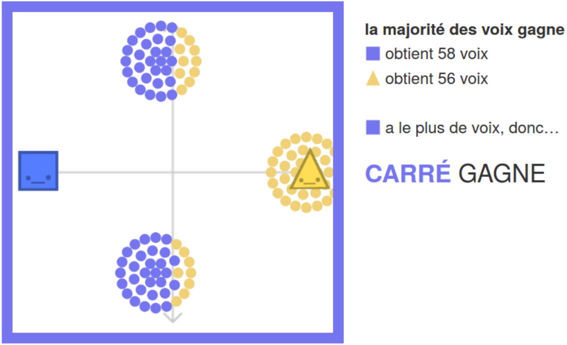
- Incite à avoir peu de candidates,
- Incite les électrices à manipuler le scrutin (voter contre leurs préférences),
- Sensibilité extrême à l'opinion sur une personne particulière.

Problèmes du système usuel (SUM)



Tyrannie de la majorité : les bleues sont moyennement contentes, mais les jaunes sont très déçues !

Problèmes du système usuel (SUM)



Tyrannie de la majorité : les bleues sont moyennement contentes, mais les jaunes sont très déçues !
Autre "problème" : scrutin à deux tours peut favoriser la bipolarisation.

Peut-on échapper au dilemme du vote utile ?

Theorem (Arrow, 1952)

- *X l'ensemble des candidates, E l'ensemble des votantes.*
- *$\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des ordres totaux (stricts) sur X.*
- *Le résultat d'un vote est donné par $v \in \mathcal{O}(X)^E$.*

Peut-on échapper au dilemme du vote utile ?

Theorem (Arrow, 1952)

- *X l'ensemble des candidates, E l'ensemble des votantes.*
- *$\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des ordres totaux (stricts) sur X.*
- *Le résultat d'un vote est donné par $v \in \mathcal{O}(X)^E$.*
- *Exemple : $X = \{x, y, z\},\ E = \{1, 2\}$*

$$v_1 = (x > z > y), \quad v_2 = (y > z > x) \quad \in \mathcal{O}(X).$$

Peut-on échapper au dilemme du vote utile ?

Theorem (Arrow, 1952)

- *X l'ensemble des candidates, E l'ensemble des votantes.*
- *$\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des ordres totaux (stricts) sur X.*
- *Le résultat d'un vote est donné par $v \in \mathcal{O}(X)^E$.*
- *Exemple :* $X = \{x, y, z\},\ E = \{1, 2\}$

$$v_1 = (x > z > y), \quad v_2 = (y > z > x) \quad \in \mathcal{O}(X).$$

- *Soit $C \colon \mathcal{O}(X)^E \to \mathcal{O}(X)$ une fonction de choix, vérifiant :*

Peut-on échapper au dilemme du vote utile ?

Theorem (Arrow, 1952)

- *X l'ensemble des candidates, E l'ensemble des votantes.*
- *$\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des ordres totaux (stricts) sur X.*
- *Le résultat d'un vote est donné par $v \in \mathcal{O}(X)^E$.*
- *Exemple : $X = \{x, y, z\},\ E = \{1, 2\}$*

$$v_1 = (x > z > y), \quad v_2 = (y > z > x) \quad \in \mathcal{O}(X).$$

- *Soit $C \colon \mathcal{O}(X)^E \to \mathcal{O}(X)$ une fonction de choix, vérifiant :*
  - *(Unanimité) si v est tel que $v_e \colon x > y$ pour tout $e \in E$, alors $C(v)$ préfère x à y.*

Peut-on échapper au dilemme du vote utile ?

Theorem (Arrow, 1952)

- *X l'ensemble des candidates, E l'ensemble des votantes.*
- *$\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des ordres totaux (stricts) sur X.*
- *Le résultat d'un vote est donné par $v \in \mathcal{O}(X)^E$.*
- *Exemple : $X = \{x, y, z\}$, $E = \{1, 2\}$*

$$v_1 = (x > z > y), \quad v_2 = (y > z > x) \quad \in \mathcal{O}(X).$$

- *Soit $C \colon \mathcal{O}(X)^E \to \mathcal{O}(X)$ une fonction de choix, vérifiant :*
  - *(Unanimité) si v est tel que $v_e \colon x > y$ pour tout $e \in E$, alors $C(v)$ préfère x à y.*
  - *(Indépendance aux alternatives non-pertinentes) si pour tout $e \in E$, v_e et v'_e classent x et y de la même façon, alors $C(v)$ et $C(v')$ classent x et y de la même façon. (exemple)*

Peut-on échapper au dilemme du vote utile ?

Theorem (Arrow, 1952)

- *X l'ensemble des candidates, E l'ensemble des votantes.*
- *$\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des ordres totaux (stricts) sur X.*
- *Le résultat d'un vote est donné par $v \in \mathcal{O}(X)^E$.*
- *Exemple :* $X = \{x, y, z\}, \ E = \{1, 2\}$

$$v_1 = (x > z > y), \quad v_2 = (y > z > x) \quad \in \mathcal{O}(X).$$

- *Soit $C \colon \mathcal{O}(X)^E \to \mathcal{O}(X)$ une fonction de choix, vérifiant :*
  - *(Unanimité) si v est tel que $v_e \colon x > y$ pour tout $e \in E$, alors $C(v)$ préfère x à y.*
  - *(Indépendance aux alternatives non-pertinentes) si pour tout $e \in E$, v_e et v'_e classent x et y de la même façon, alors $C(v)$ et $C(v')$ classent x et y de la même façon. (exemple)*
- *Si $|X| \geq 3$, alors C est un choix dictatorial, i.e. il existe $e^* \in E$ tel que pour tout v, $C(v) = v_{e^*}$.*

Eléments de preuve

Definition

Un sous-ensemble $D \subseteq E$ est dit *décisif* si lorsque toutes les électrices de D votent un même ordre $O \in \mathcal{O}(X)$, alors O est choisi par C.

Eléments de preuve

Definition

Un sous-ensemble $D \subseteq E$ est dit *décisif* si lorsque toutes les électrices de D votent un même ordre $O \in \mathcal{O}(X)$, alors O est choisi par C.

- Par l'axiome d'unanimité, E est décisif.

Eléments de preuve

Definition

Un sous-ensemble $D \subseteq E$ est dit *décisif* si lorsque toutes les électrices de D votent un même ordre $O \in \mathcal{O}(X)$, alors O est choisi par C.

- Par l'axiome d'unanimité, E est décisif.
- **Point clé :**
  l'ensemble $\mathcal{F} = \{D \subseteq E \mid D \text{ est décisif } \}$ est un ultrafiltre sur E.

Eléments de preuve

Definition

Un sous-ensemble $D \subseteq E$ est dit *décisif* si lorsque toutes les électrices de D votent un même ordre $O \in \mathcal{O}(X)$, alors O est choisi par C.

- Par l'axiome d'unanimité, E est décisif.
- **Point clé :**
  l'ensemble $\mathcal{F} = \{D \subseteq E \mid D \text{ est décisif } \}$ est un ultrafiltre sur E.
- Comme E est fini, $\mathcal{F}$ doit être de la forme $\{D \subseteq E \mid e^* \in D\}$ pour un certain $e^* \in E$.

Peut-on échapper à la manipulation ?

Theorem (Gibbard–Satterthwaite, 1973)

- *Soit* $\mathcal{P}(X)$ *l'ensemble des partitions ordonnées de* X.

Peut-on échapper à la manipulation ?

Theorem (Gibbard–Satterthwaite, 1973)

- *Soit* $\mathcal{P}(X)$ *l'ensemble des partitions ordonnées de* X.
- *Soit* $C\colon \mathcal{P}(X)^E \to X$ *une fonction.*

Peut-on échapper à la manipulation ?

Theorem (Gibbard–Satterthwaite, 1973)

- *Soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des partitions ordonnées de X.*
- *Soit $C\colon \mathcal{P}(X)^E \to X$ une fonction.*
- *C est dite manipulable s'il existe $v \in \mathcal{P}(X)$, $e^{\mathrm{mnp}} \in E$ et v^{mnp} tels que*
  - *$v_e^{\mathrm{mnp}} = v_e$ si $e \neq e^{\mathrm{mnp}}$, et*
  - *la manipulatrice e^{mnp} préfère $C(v^{\mathrm{mnp}})$ à $C(v)$.*

Peut-on échapper à la manipulation ?

Theorem (Gibbard–Satterthwaite, 1973)

- *Soit* $\mathcal{P}(X)$ *l'ensemble des partitions ordonnées de* X.
- *Soit* $C\colon \mathcal{P}(X)^E \to X$ *une fonction.*
- C *est dite manipulable s'il existe* $v \in \mathcal{P}(X)$, $e^{\mathrm{mnp}} \in E$ *et* v^{mnp} *tels que*
  - $v_e^{\mathrm{mnp}} = v_e$ *si* $e \neq e^{\mathrm{mnp}}$, *et*
  - *la manipulatrice* e^{mnp} *préfère* $C(v^{\mathrm{mnp}})$ *à* $C(v)$.
- *Si* $|\operatorname{im}(C)| \geq 3$, *alors* C *est soit manipulable, soit dictatoriale.*

Peut-on échapper à la manipulation ?

En autorisant d'éventuels tirages au sort :

Theorem (Gibbard, 1977)

Si $|\operatorname{im}(C)| \geq 3$*, que* C *est non-manipulable et vérifie le principe d'unanimité, alors* C *est une dictature aléatoire.*

Peut-on échapper à la manipulation ?

En autorisant d'éventuels tirages au sort :

Theorem (Gibbard, 1977)

Si $|\operatorname{im}(C)| \geq 3$, *que* C *est non-manipulable et vérifie le principe d'unanimité, alors* C *est une dictature aléatoire.*

Theorem (Cas d'un référendum)

Si $|X| = \{x, y\}$ *et que les votes sont* $(x < y)$ *et* $(y < x)$, *alors la méthode majoritaire est résistante à la manipulation (et est unique avec cette propriété).*

Peut-on échapper à la manipulation ?

En autorisant d'éventuels tirages au sort :

Theorem (Gibbard, 1977)

Si $|\operatorname{im}(C)| \geq 3$*, que* C *est non-manipulable et vérifie le principe d'unanimité, alors* C *est une dictature aléatoire.*

Theorem (Cas d'un référendum)

Si $|X| = \{x, y\}$ *et que les votes sont* $(x < y)$ *et* $(y < x)$*, alors la méthode majoritaire est résistante à la manipulation (et est unique avec cette propriété).*

- Même si aucun système n'est parfait, tous ne se valent pas.
- Les théorèmes précédents s'appliquent seulement aux scrutins basés sur un *ordre* des candidates.

Quelques modes de scrutin évitant la dilution des votes

Vote alternatif (ou vote à second tour instantané)

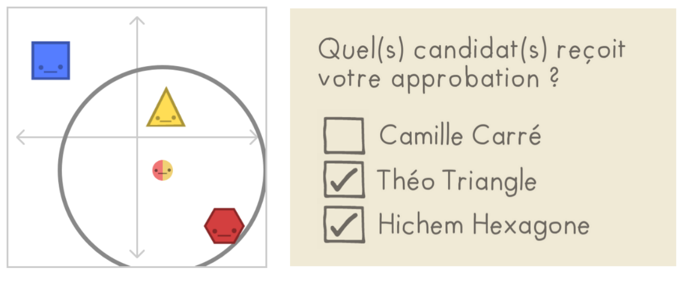
A partir de $v \in \mathcal{O}(X)^E$, on élimine la candidate $x \in X$ qui est la moins souvent mise en préférence maximale. On répète l'opération avec l'ordre induit $v' \in \mathcal{O}(X \setminus \{x\})^E$, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une candidate.

Quelques modes de scrutin évitant la dilution des votes

Vote alternatif (ou vote à second tour instantané)

A partir de $v \in \mathcal{O}(X)^E$, on élimine la candidate $x \in X$ qui est la moins souvent mise en préférence maximale. On répète l'opération avec l'ordre induit $v' \in \mathcal{O}(X \setminus \{x\})^E$, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une candidate.

Vote par approbation



Quelques modes de scrutin évitant la dilution des votes

Condorcet

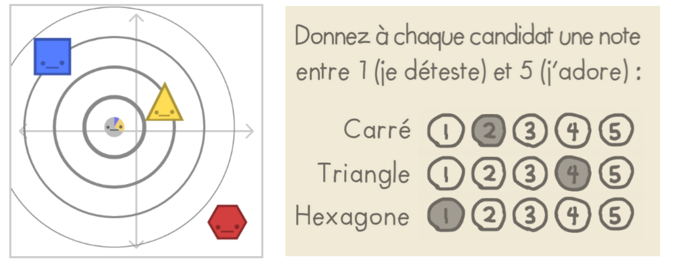
On vote pour chaque duel x vs y.
La candidate $x \in X$ est dite *vainqueuse de Condorcet* si pour tout $y \neq x$, une majorité d'électrices préfère x à y.

Quelques modes de scrutin évitant la dilution des votes

Condorcet

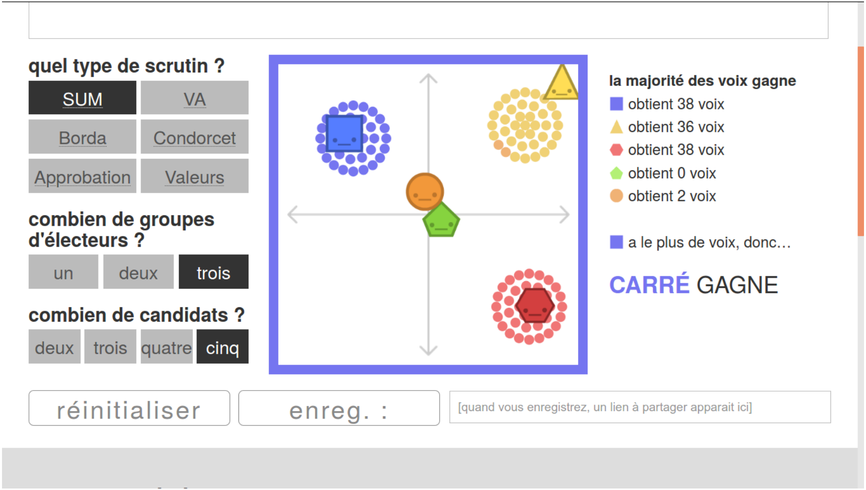
On vote pour chaque duel x vs y.
La candidate $x \in X$ est dite *vainqueuse de Condorcet* si pour tout $y \neq x$, une majorité d'électrices préfère x à y.

Vote par notes

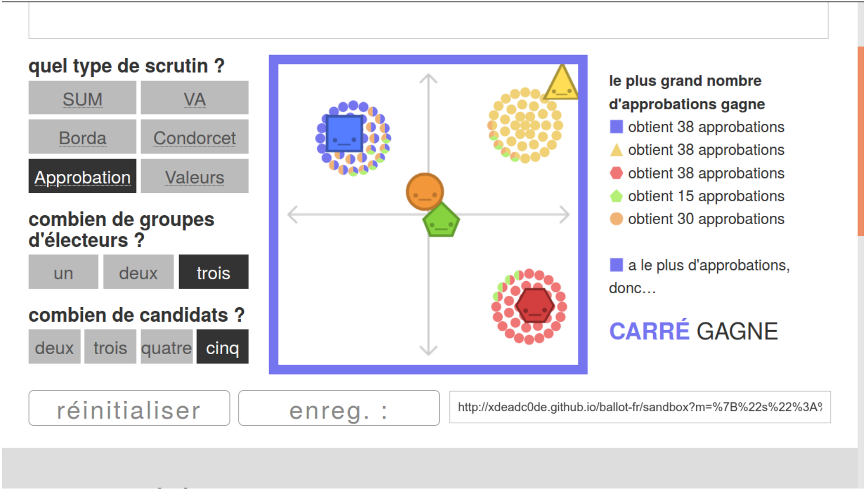


On choisit la meilleure moyenne (*vote par valeurs*) ou la meilleure médiane (*jugement majoritaire*).

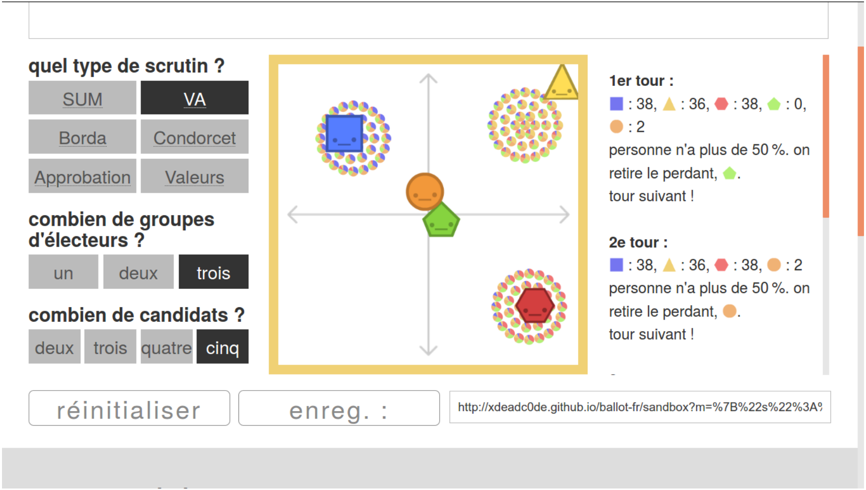
Un exemple (SUM)



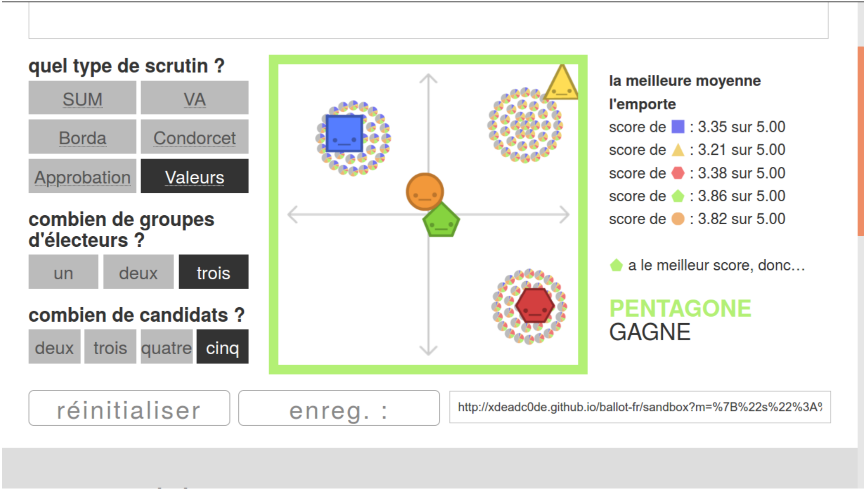
Un exemple (vote par approbation)



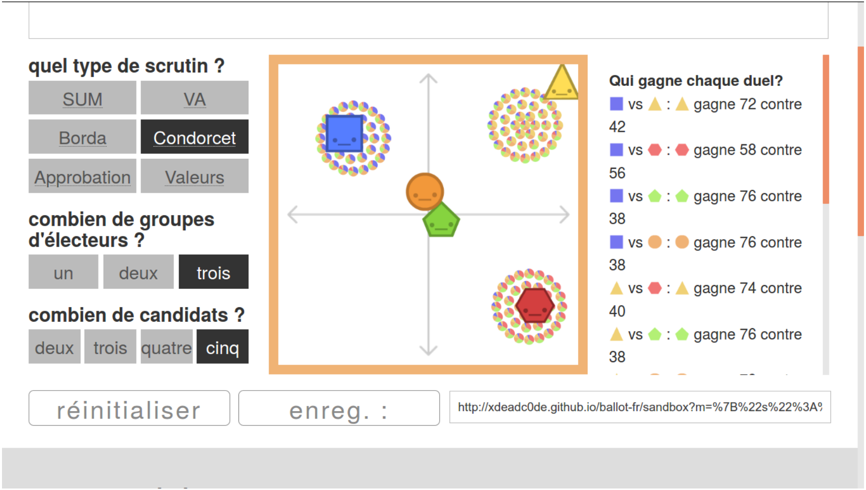
Un exemple (vote alternatif)



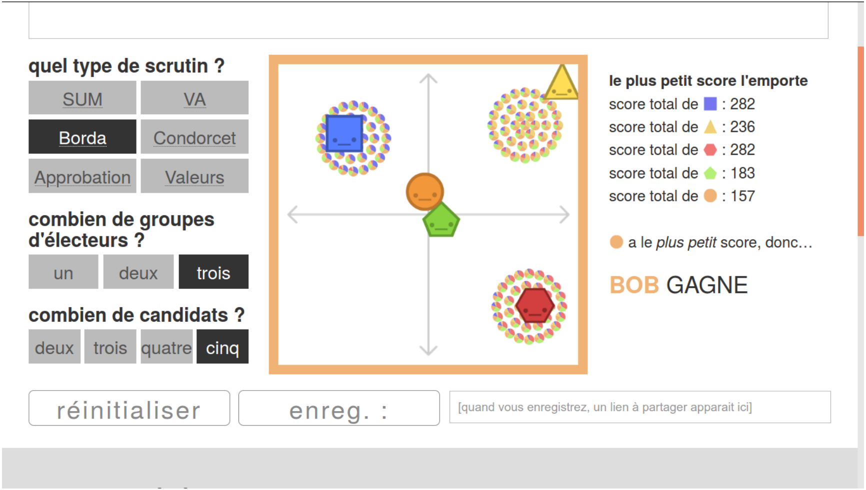
Un exemple (vote par valeurs)



Un exemple (vainqueuse de Condorcet)



Un exemple (méthode de Borda)



Scrutin de Condorcet

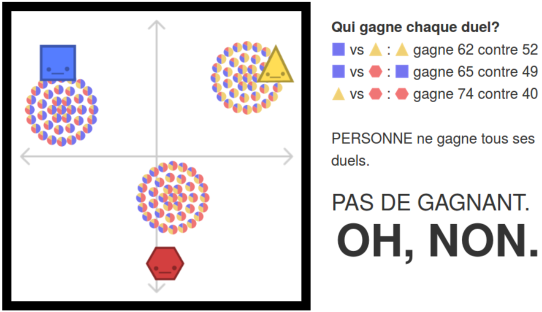
Condorcet

On vote pour chaque duel x vs y.
La candidate $x \in X$ est dite *vainqueuse de Condorcet* si pour tout $y \neq x$, une majorité d'électrices préfère x à y.

Avantage : Une vainqueuse de Condorcet x le reste, s'il l'on retire des candidates, ou si l'on ajoute des candidates y telles que $x > y$ pour une majorité d'électrices.

Paradoxe de Condorcet

Problème : on a *unicité*, mais pas *existence* d'une vainqueuse de Condorcet.



En notant $x \gg y$, le fait qu'une majorité préfère x à y, le paradoxe de Condorcet s'écrit

$$x \gg y \gg z \gg x.$$

Paradoxe de Condorcet

Theorem (de l'électeur médian, Black 1958)

Lorsque les préférences des électrices sont unidimensionnelles (représentées par une fonction $E \to \mathbb{R}$*), alors il existe toujours une vainqueuse de Condorcet.*

Theorem (Roberts, 1977)

Si les préférences sont unidimensionnelles, que chaque candidate x *a une valeur intrinsèque* $f(x)$ *et que les vote d'une électrice e cherchent à minimiser* $f(x) - d(x, e)$*, alors il existe une vainqueuse de Condorcet.*

Méthode de Schulze

Idée : Pour résoudre un paradoxe $x \gg y \gg z \gg x$, on écrit le "diagramme des révolutions"

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "66\%"] & \\ x \arrow[ur, "54\%"] & & z. \arrow[ll, "60\%"] \end{tikzcd}$$

On élimine la flèche la plus faible et on suit les révolutions restantes.

Méthode de Schulze

Idée : Pour résoudre un paradoxe $x \gg y \gg z \gg x$, on écrit le "diagramme des révolutions"

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "66\%"] & \\ x \arrow[ur, "54\%"] & & z. \arrow[ll, "60\%"] \end{tikzcd}$$

On élimine la flèche la plus faible et on suit les révolutions restantes.

Theorem (Robustesse à la manipulation)

Supposons qu'on ait une partition $X = X^+ \amalg X^-$, avec $X^+ \neq \emptyset$, et qu'il existe une majorité d'électrices dont les préférences vérifient $X^+ > X^-$. Si cette majorité vote sincèrement, alors la méthode de Schulze élit une candidate dans X^+.

Méthode de Schulze

Idée : Pour résoudre un paradoxe $x \gg y \gg z \gg x$, on écrit le "diagramme des révolutions"

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[dr, "66\%"] & \\
x \arrow[ur, "54\%"] & & z. \arrow[ll, "60\%"]
\end{tikzcd}$$

On élimine la flèche la plus faible et on suit les révolutions restantes.

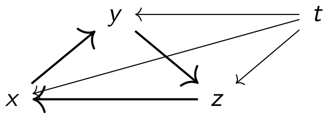
Theorem (Robustesse à la manipulation)

Supposons qu'on ait une partition $X = X^+ \amalg X^-$, avec $X^+ \neq \emptyset$, et qu'il existe une majorité d'électrices dont les préférences vérifient $X^+ > X^-$. Si cette majorité vote sincèrement, alors la méthode de Schulze élit une candidate dans X^+.

Problème : lorsqu'il existe une vainqueuse de Condorcet, il est parfois possible pour un groupe d'électrices de manipuler le scrutin et faire élire une autre candidate.

Scrutin de Condorcet randomisé

Le scrutin de Condorcet randomisé permet d'éviter tout vote stratégique contre une vainqueuse de Condorcet, lorsqu'elle existe.



Principe : Le jeu du chifoumi sur X admet une stratégie optimale. La méthode choisit la vainqueuse selon la loi de probabilité sur X correspondante.

Vote par notations

Intérêt majeur : permet d'exprimer davantage les préférences des électrices.

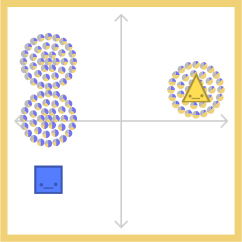
Theorem (Balinski–Laraki, Fabre)

Une fonction de choix social monotone et respectant la règle de la majorité relative sur les paires de choix polarisés doit coincider avec la règle du jugement majoritaire (si l'ensemble des notes est suffisamment grand).

Lien avec le principe de Condorcet : La médiane est la "note vainqueuse de Condorcet", par le théorème de l'électeur médian.

Conclusion : un dilemme philosophique

Trahison de la démocratie ou sauvetage de la tyrannie de la majorité ?



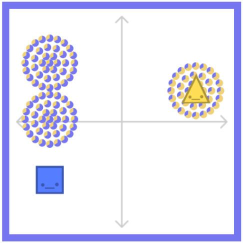
la meilleure moyenne l'emporte

score de ■ : 3.35 sur 5.00

score de ▲ : 3.56 sur 5.00

▲ a le meilleur score, donc…

TRIANGLE GAGNE



Qui gagne chaque duel?

■ vs ▲ : ■ gagne 76 contre 38

■ gagne tout ses duels contre les autres.

CARRÉ GAGNE