Exercice 1 :

a) Posons $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{2n}$

• D'une part $\int_0^1 f_N(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n x^{2n}\,dx$ (par linéarité de l'intégrale)

$= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ car $\int_0^1 x^{2n}\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

Il s'agit d'une série alternée, donc la limite $N \to +\infty$ existe

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 f_N(x)\,dx$

• D'autre part, f_N est une série géométrique de raison $-x^2$,

donc $f_N(x) = \frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}$

On va appliquer le TCD : (i) $\lim_{N\to+\infty} f_N(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in [0,1[$

(ii) $|f_N(x)| \leq \frac{1+(x^2)^{N+1}}{1+x^2} \leq \frac{2}{1+x^2}$ $\forall x \in [0,1]$

avec $\frac{2}{1+x^2}$ intégrable sur $[0,1]$

Conclusion : le TCD donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 f_N(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

b) On sait calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 2

a) Soit $0<a<b<+\infty$. Il suffit de montrer que Γ est bien définie et continue sur $[a,b]$. Posons $f(t,x) = x^{t-1}e^{-x}$

(i) $x \mapsto f(t,x)$ est bien intégrable $\forall t \in [a,b]$ (voir (iii))

(ii) $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur $[a,b]$

(iii) $\forall t \in [a,b]$ $\quad |f(t,x)| \leq g(x)$

où $g(x) = \begin{cases} x^{b-1}e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \\ x^{a-1}e^{-x} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$

$g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a>0$ (pour l'intégrabilité en 0)

Par théorème de continuité sous l'intégrale,

$t \mapsto \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dx$ est continue sur $[a,b]$ pour tous $0<a<b<+\infty$

b) De même, pour $t \in [a,b]$

(i) $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable, de dérivée $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = (\ln x) x^{t-1} e^{-x}$

(ii) $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| = |\ln x|\, x^{t-1}e^{-x} \leq |\ln x|\, g(x)$

où g est la même fonction que dans la question a)

et $|\ln x|\, g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $a>0$ ($|\ln x| x^{a-1}$ intégrable sur $[0,1]$)

Par théorème de dérivation sous l'intégrale,

$t \mapsto \Gamma(t)$ est dérivable sur $[a,b]$ pour tous $0<a<b<\infty$

de dérivée $\Gamma'(t) = \int_0^{+\infty} (\ln x)\, x^{t-1} e^{-x}\,dx$

c) $\forall x \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$

En sommant sur k : $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$

d'où $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$

d) $u_n = H_n - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$ (comme dans la question précédente)

$= \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \quad \left(= \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{k-x}{kx} dx\right)$

Il s'agit d'une somme de termes positifs donc (u_n) est croissante,

et majorée par $1 + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 1$.

donc la limite $\gamma = \lim \left(H_n - \ln(n+1)\right)$ existe $1 \geq \gamma \geq u_1 = 1 - \ln 2$

e) (i) En utilisant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1} dx$,

on a $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\right) dx$ (par linéarité)

et $\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k'=0}^{n-1} x^{k'} = \frac{1-x^n}{1-x}$ pour tout $|x| < 1$

donc $H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx$

(ii) Avec une IPP $\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx = \underbrace{\left[-\ln(1-x)(1-x^n)\right]_0^1}_{=0} - n \int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) dx$

$= -n \int_0^1 x^{n-1} \ln(n(1-x)) dx + n \int_0^1 x^{n-1} \ln n \, dx = -n \int_0^1 x^{n-1} \ln(n(1-x)) + \ln n$

(iii) $H_n - \ln n = -n \int_0^1 x^{n-1} \ln(n(1-x))\, dx$

changement de variable
$y = n(1-x)$
$x = 1 - \frac{y}{n}$

$$= -n \int_n^0 \left(1-\frac{y}{n}\right)^{n-1} \ln(y) \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) dy$$

$$= - \int_0^n \left(1-\frac{y}{n}\right)^{n-1} \ln(y)\, dy$$

f) On pose $f_n(y) = \left(1-\frac{y}{n}\right)^{n-1} \ln(y)\, \mathbb{1}_{]0,n]}(y)$

on va appliquer le TCD (i) $\lim_{n\to+\infty} f_n(y) = e^{-y} \ln y \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*$

en utilisant $1-\frac{y}{n} \leq e^{-y/n}$, (ii) $|f_n(y)| \leq |\ln y|\, e^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)y} \leq |\ln y| e^{-\frac{1}{2}y}$ pour $n \geq 2$

avec $|\ln y|\, e^{-\frac{1}{2}y}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par TCD $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(y)\, dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} \ln y\, dy$

$= \Gamma'(1)$ avec la question b)

<u>Conclusion</u> : $\lim_{n\to+\infty} (H_n - \ln n) = -\Gamma'(1)$

et $\lim_{n\to+\infty} (H_n - \ln n) = \gamma = \lim_{n\to+\infty} (H_n - \ln(n+1))$

car $\ln n - \ln(n+1) = \ln n - \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$= -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 3

a) $f_n(x) = 0$ si $x \geq \frac{1}{n}$

donc si $x > 0$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

pour $x = 0$ $\quad f_n(0) = \frac{n+1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Si $g(x) \geq |f_n(x)| \quad \forall n \geq 1$ on a $g(x) \geq \sup\limits_{n \geq 1} |f_n(x)|$

$f_n(x)$ est croissant en n jusqu'à $n_x = \left[\frac{1}{x}\right]$, puis $f_n(x) = 0$ pour $n \geq n_x$

donc $g(x) \geq f_{n_x}(x) = \frac{n_x + 1}{\ln(n_x + 1)}$

<u>rem</u>: $y \mapsto \frac{y}{\ln(y)}$ est croissante sur $[e, +\infty[$

donc $f_{n_x}(x) \geq \frac{1/x}{\ln(1/x)}$ pourvu que $\frac{1}{x} - 1 \geq e$

comme $n_x \geq \frac{1}{x} - 1$

on a $g(x) \geq \frac{1}{x \ln(1/x)} \mathbb{1}_{[0, 1/e]}(x)$ $\quad$ [il manquait $\mathbb{1}_{[0,1/e]}(x)$ dans l'énoncé]

$\longrightarrow \displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{x \ln(1/x)} dx = \left[\ln\left(\ln \tfrac{1}{x}\right)\right]_0^{1/e} = +\infty$ donc g n'est pas intégrable.

Conclusion : aucune fonction g qui domine (f_n) n'est intégrable

$\leadsto$ on ne peut pas appliquer le TCD.

c) On sait calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} \frac{n+1}{\ln(n+1)} dx = \frac{n+1}{n \ln(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Exercice 4

a) (i) Si g est μ-intégrable, on peut appliquer le TCD.

$\hookrightarrow$ $f_r(x) = |g(x)| \mathbb{1}_{|g(x)| \geq r}$ vérifie : • $\lim_{r \to +\infty} f_r(x) = 0$

• $|f_r(x)| \leq |g(x)|$ intégrable.

donc $\lim_{r \to +\infty} \int g \mathbb{1}_{|g| \geq r} \, d\mu = 0$

(ii) si $|f_n| \leq g$ alors $|f_n| \mathbb{1}_{\{|f_n| \geq r\}} \leq g \mathbb{1}_{\{g \geq r\}}$

[c'est vrai si $|f_n| \geq r$ car nécessairement $g \geq r$

et si $|f_n| < r$ car le membre de gauche est nul]

la question (i) permet de conclure

(iii) Si $r > 0$, on peut calculer

$$\int_0^1 |f_n(x)| \mathbb{1}_{\{|f_n(x)| > r\}} dx = \int_0^{1/n} \frac{n+1}{\ln(n+1)} \mathbb{1}_{\{\frac{n+1}{\ln(n+1)} > r\}} dx = \frac{1+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)} \mathbb{1}_{\{r < \frac{n+1}{\ln(n+1)}\}}$$

donc $\limsup_{n \to +\infty} \int_0^1 |f_n| \mathbb{1}_{\{|f_n| > r\}} = 0$ car $\frac{1+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On a bien vérifié la condition

(on peut ensuite prendre la limite $r \to +\infty$)

b) i) $$\int |f_n| \, d\mu = \int |f_n| \mathbb{1}_{\{|f_n| < r\}} \, d\mu + \int |f_n| \mathbb{1}_{\{|f_n| \geq r\}} d\mu$$

$$\leq r \int_E \mathbb{1} \, d\mu + \int |f_n| \mathbb{1}_{\{|f_n| \geq r\}} d\mu$$

$$= r \mu(E) + \int |f_n| \mathbb{1}_{\{|f_n| \geq r\}} d\mu$$

Par le lemme de Fatou

$$\int |f|\, d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} |f_n|\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int |f_n|\, d\mu$$

$$\leq r\,\mu(E) + \limsup_{n\to+\infty} \int |f_n|\, \mathbb{1}_{\{|f_n|\geq r\}}\, d\mu$$

Par définition d'uniforme intégrabilité, il existe r_0 tel que le deuxième terme, pour $r = r_0$, est majoré par 1.

On a alors $\int |f|\, d\mu \leq r_0\, \mu(E) + 1 < +\infty$.

(ii) On utilise la décomposition

$$\int h_n \mathbb{1}_{\{h_n\geq r\}}\, d\mu = \int h_n\, \mathbb{1}_{\{h_n\geq r\}} \mathbb{1}_{\{|f_n|\geq r\}}\, d\mu + \int h_n \mathbb{1}_{\{h_n\geq r\}} \mathbb{1}_{\{|f_n|<r\}}\, d\mu$$

pour le 1er terme, on utilise $h_n = |h_n| \leq |f_n| + |f|$ et $\mathbb{1}_{\{h_n\geq r\}} \leq 1$

pour le 2e terme, on utilise $h_n = |f_n - f|$ et $\mathbb{1}_{\{h_n\geq r\}} \leq 1$

On obtient $\int h_n \mathbb{1}_{\{h_n\geq r\}}\, d\mu \leq \int (|f_n| + |f|)\, \mathbb{1}_{\{|f_n|\geq r\}}\, d\mu + \int |f_n - f|\, \mathbb{1}_{\{f_n<r\}}\, d\mu$.

(iii) On prend la $\limsup_{n\to+\infty}$ dans l'inégalité ci-dessus. On a trois termes

(a) $\limsup_{n\to+\infty} \int |f_n|\, \mathbb{1}_{|f_n|\geq r}\, d\mu$

(b) $\limsup_{n\to+\infty} \int |f|\, \mathbb{1}_{\{f_n\geq r\}}\, d\mu = \int |f|\, \mathbb{1}_{|f|\geq r}\, d\mu$ par TCD (domination par $|f|$)

(c) $\limsup_{n\to+\infty} \int |f_n - f|\, \mathbb{1}_{\{|f_n|\leq r\}}\, d\mu = 0$ par TCD (domination par $(|f_n| + |f|)\mathbb{1}_{|f_n|\leq r} \leq r + |f|$)

et $\int_E (r+|f|)\, d\mu = r\,\mu(E) + \int |f|\, d\mu < +\infty$.

Conclusion

$$\lim_{r\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int h_n \mathbb{1}_{h_n \geq r}\, d\mu \leq \lim_{r\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int |f_n| \mathbb{1}_{|f_n|\geq r}\, d\mu + \lim_{r\to+\infty} \int |f| \mathbb{1}_{|f|>r}\, d\mu = 0$$

Donc $(h_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable.

(iv) Si $r>0$, $\lim_{n\to+\infty} \int h_n \mathbb{1}_{\{h_n<r\}} = 0$ par TCD.

en effet $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par hypothèse ($f_n \to f$)

et $|h_n \mathbb{1}_{h_n\leq r}| \leq r$ avec $\int_E r\, d\mu = r\,\mu(E) < +\infty$.

(v) Ainsi

$$\int h_n\, d\mu = \int h_n \mathbb{1}_{\{h_n<r\}} + \int h_n \mathbb{1}_{\{h_n>r\}}\, d\mu$$

Soit $\varepsilon>0$. Alors, il existe $r_0>0$ tel que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int h_n \mathbb{1}_{\{h_n>r_0\}}\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

On fixe ce r_0. Il existe donc n_0 tel que

$\forall n\geq n_0$ $\int h_n \mathbb{1}_{\{h_n\geq r_0\}}\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\int h_n \mathbb{1}_{h_n\leq r_0}\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$

par question (iv)

Donc $\forall n\geq n_0$ $\int h_n\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Conclusion $\lim_{n\to+\infty} \int h_n\, d\mu = 0$

Pour conclure, remarquons que

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu$$

donc $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Cela montre que $\int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$

qui est une généralisation du T.C.D.

$\rightarrow$ on n'a pas besoin de la domination, mais de l'hypothèse d'uniforme intégrabilité.