Devoir maison

à rendre au plus tard le 23 octobre

Le DM est *facultatif* mais rapporte des points bonus pour le premier partiel. Il vous permet aussi de vous entraîner à la rédaction : n'hésitez pas à rendre une copie même incomplète !

Exercice 1. (Un calcul)

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
On pourra introduire la fonction $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n}$ *pour tout* $x \in [0,1[$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2. (Autour de la fonction Gamma)

On note Γ, appelée *fonction Gamma*, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}x\,.$$

a) Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est continue.

b) Montrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $t \in]0,+\infty[$

$$\Gamma'(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\ln(x)\mathrm{d}x\,.$$

On introduit la série dite *harmonique*, définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

c) Montrer par une comparaison avec des intégrales que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.

d) On pose $u_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et en déduire que la limite $\gamma = \lim_{n\to\infty} u_n$ existe et vérifie $\gamma \in]0,1]$. Elle est appelée constante d'*Euler–Mascheroni.*

e) Montrer successivement que pour tout $n \geq 1$, on a :

i) $\displaystyle H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\mathrm{d}x$ *(on pourra utiliser que* $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x$*)* ;

ii) $\displaystyle H_n = -n\int_0^1 x^{n-1}\ln\big(n(1-x)\big)\mathrm{d}x + \ln n$;

iii) $\displaystyle H_n - \ln n = -\int_0^n \Big(1-\frac{y}{n}\Big)^{n-1}\ln(y)\mathrm{d}y$.

f) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \Big(1-\frac{y}{n}\Big)^{n-1}\ln(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-x}\ln(x)\mathrm{d}x\,,$$

et conclure que $\gamma = -\Gamma'(1)$.

Exercice 3. (Un "contre-exemple")

On considère la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $[0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = \frac{n+1}{\ln(n+1)}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\,.$$

a) Donner $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout x.

b) Montrer que s'il existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ telle que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \geq 1$, alors $g(x) \geq \frac{1}{x\ln(\frac{1}{x})}$.
Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée ?

c) Montrer que l'on a quand même $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 4. (Uniforme intégrabilité)

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré que l'on suppose de masse finie $\mu(E) < +\infty$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de $(E, \mathcal{A})$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La suite est dite *uniformément intégrable* si

$$\lim_{r\to\infty}\left(\limsup_{n\to\infty}\int |f_n|\mathbb{1}_{\{|f_n|\geq r\}}\mathrm{d}\mu\right) = 0\,.$$

a) i) Montrer que si une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ est μ-intégrable, alors $\lim_{r\to\infty}\int |g|\mathbb{1}_{\{|g|\geq r\}}\mathrm{d}\mu = 0$.

ii) Montrer que s'il existe $g : E \to \mathbb{R}$ μ-intégrable, telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n, alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable.

iii) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ de l'Exercice 3 est uniformément intégrable. *On prend $E = [0, 1]$ muni des boréliens de $[0, 1]$ et de la mesure de Lebesgue.*

b) On suppose maintenant que $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable et converge simplement vers une fonction notée f, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.

i) Montrer que pour tout $r > 0$ on a $\displaystyle\int |f_n|\mathrm{d}\mu \leq r\mu(E) + \int |f_n|\mathbb{1}_{\{|f_n|\geq r\}}\mathrm{d}\mu$.

En déduire que f est intégrable. *On pourra utiliser le lemme de Fatou.*

On pose $h_n = |f_n - f|$ pour tout n.

ii) Vérifier que pour tout $r \geq 0$,

$$\int h_n\mathbb{1}_{\{h_n\geq r\}}\mathrm{d}\mu \leq \int (|f_n| + |f|)\mathbb{1}_{\{|f_n|\geq r\}}\mathrm{d}\mu + \int |f_n - f|\mathbb{1}_{\{|f_n|<r\}}\mathrm{d}\mu\,.$$

iii) En déduire que $(h_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable.

iv) Montrer que pour tout $r > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int h_n\mathbb{1}_{\{h_n<r\}}\mathrm{d}\mu = 0$.

v) Conclure que $\lim_{n\to\infty}\int h_n\mathrm{d}\mu = 0$, puis que $\lim_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu$.

De quel résultat est-ce une généralisation ?