

DM n° 2. Propriétés des lois exponentielles

À rendre au plus tard le lundi 16 décembre (en TD)

On rappelle que, pour $\lambda > 0$, on note $\mathcal{E}(\lambda)$ la loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire la loi de densité

$$f_\lambda : x \mapsto f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Exercice 1 – *Absence de mémoire.*

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. Montrer que pour tous $s,t > 0$ on a $\mathbb{P}(X > s) > 0$ et

$$\mathbb{P}(X > t + s \,|\, X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Pour tout $s > 0$, $\mathbb{P}(X > s) = \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u) du = \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda u} du = e^{-\lambda s} > 0$ d'où, pour tous $s,t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > s + t \,|\, X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t,\, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t).$$

2. Réciproquement, supposons que X est une variable aléatoire réelle telle que $X > 0$ p.s., et X satisfait la propriété d'absence de mémoire : pour tous $s,t > 0$, $\mathbb{P}(X > s) > 0$ et $\mathbb{P}(X > t + s \,|\, X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

a) On définit la fonction $G : t \mapsto -\ln \mathbb{P}(X > t)$. Donner une relation vérifiée par la fonction G.

Pour tous $s,t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s,\, X > s))}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > s)}$$

d'où

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s),$$

ce qui se réécrit, en prenant le logarithme,

$$G(t + s) = G(t) + G(s).$$

b) On pose $\lambda = G(1)$. Calculer en fonction de λ la valeur de $G(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis de $G(q)$ pour tout rationnel $q \geq 0$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G(n) = G(n-1) + G(1) = G(n-1) + \lambda$ d'où par récurrence $G(n) = n\lambda$ pour tout entier $n \geq 1$. Pour tout rationnel $q = \frac{a}{b}$ avec $a,b \in \mathbb{N}^*$ on a

$$G(bq) = G(a) = a\lambda$$

mais aussi

$$G(bq) = G(q + (b-1)q) = G(q) + G((b-1)q) = \cdots = bG(q),$$

d'où $G(q) = \lambda \frac{a}{b} = \lambda q$.

c) Justifier la croissance de G, et en déduire que $G(x) = \lambda x$ pour tout $x \geq 0$.

Pour tout $t > 0$, $G(t) = -\ln(1 - F_X(t))$ d'où la croissance de G d'après celle de F_X et de ln. Pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r,s \in \mathbb{Q}$ avec $t - \varepsilon < r < t < s < t + \varepsilon$ d'où

$$\lambda(t - \varepsilon) \leq \lambda r = G(r) \leq G(t) \leq G(s) = \lambda s \leq \lambda(t + \varepsilon).$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, les inégalités ci-dessus donnent $G(t) = \lambda t$.

d) Quelle est la loi de X ?

Autrement dit, $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$ et donc $F_X(t) = 1 - e^{\lambda t}$. Par aillleurs $X > 0$ p.s. donc $F_X(t) = 0$ pour $t \leq 0$. C'est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, donc $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tous $m,n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > m) > 0$ et

$$\mathbb{P}(X > m + n \,|\, X > m) = \mathbb{P}(X > n).$$

Déterminer la loi de X. *On pourra poser* $p = 1 - \mathbb{P}(X > 1)$.

On pose $p = \mathbb{P}(X > 1)$. La relation donnée se réécrit : pour tout $m,n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mathbb{P}(X > m + n)}{\mathbb{P}(X > m)} = \mathbb{P}(X > n)$$

ou encore : pour tout $m,n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > m + n) = \mathbb{P}(X > m)\mathbb{P}(X > n).$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X > m) = \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(X > m - 1) = (1 - p)\mathbb{P}(X > m - 1)$$

d'où par récurrence $\mathbb{P}(X > m) = (1 - p)^m$. Pour tout $m \geq 1$, comme $X \in \mathbb{N}$ p.s., on a : $\{X = m\} = \{X > m - 1\} \setminus \{X > m\}$, d'où

$$\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(X > m - 1) - \mathbb{P}(X > m) = (1 - p)^{m-1} - (1 - p)^m = (1 - p)^{m-1}(1 - (1 - p)) = (1 - p)^{m-1}p.$$

Ceci montre que X suit la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 2 – ***Lien exponentielle/géométrique.***

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. On pose $Y = \lceil X \rceil$ (partie entière supérieure de X : autrement dit, Y est l'unique entier tel que $Y - 1 < X \leq Y$). Déterminer la loi de Y. Identifier une loi classique et donner son paramètre.

On note que Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vu que $X > 0$ p.s. et $\lceil x \rceil \in \mathbb{N}^*$ pour tout $x > 0$. Ainsi la loi de Y est discrète et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(\lceil X \rceil = n) = \mathbb{P}(n - 1 < X \leq n) = \int_{n-1}^{n} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} = (e^{-\lambda})^{n-1}(1 - e^{-\lambda}),$$

ce qui montre que Y suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

2. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on considère une variable aléatoire X_n suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et on définit $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

a) Soit $n \geq 1$. Calculer la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n.

On a $X_n > 0$ p.s. donc $Y_n > 0$, et ainsi $F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n \leq y) = 0$ pour $y \leq 0$. Et, pour tout $y > 0$,

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n \leq y) = \mathbb{P}(X_n \leq ny) = \mathbb{P}(X_n \leq \lfloor ny \rfloor) \text{ car } X_n \in \mathbb{N} \text{ p.s.}$$

et si X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ on a, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X \leq m) = \sum_{k=1}^{m} (1 - p)^{k-1} p = p\frac{1 - (1 - p)^m}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - p)^m$$

d'où

$$F_{Y_n}(y) = 1 - \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{\lfloor ny \rfloor}.$$

b) Soit $n \geq 1$. Calculer la fonction caractéristique Φ_{Y_n} de Y_n.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itY_n}] = \mathbb{E}[e^{i\frac{t}{n}X_n}]$$

et, si $X \sim \mathcal{G}(p)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{n\geq 1} e^{itn}(1-p)^{n-1}p = e^{it}p\sum_{k\geq 0} e^{itk}(1-p)^k = \frac{e^{it}p}{1-e^{it}(1-p)}$$

d'où

$$\Phi_{Y_n}(t) = \frac{e^{i\frac{t}{n}}\frac{\lambda}{n}}{1-e^{i\frac{t}{n}}(1-\frac{\lambda}{n})}$$

c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, quand $n \to \infty$, $F_{Y_n}(t) \to F_Y(t)$ et $\Phi_{Y_n}(t) \to \Phi_Y(t)$, où Y suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Pour tout $y > 0$,

$$F_{Y_n}(y) = 1 - \exp\Big(\lfloor ny\rfloor \ln\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)\Big)$$

et, quand $n \to \infty$,

$$\lfloor ny\rfloor \ln\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big) \sim -ny\frac{\lambda}{n} = -\lambda y$$

donc

$$F_{Y_n}(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-\lambda y} = F_Y(y).$$

On a aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, quand $n \to \infty$,

$$\Phi_{Y_n}(t) = \frac{e^{i\frac{t}{n}}\frac{\lambda}{n}}{1-e^{i\frac{t}{n}}(1-\frac{\lambda}{n})} = \frac{(1+o(1))\frac{\lambda}{n}}{1-(1+i\frac{t}{n}+o(\frac{1}{n}))(1-\frac{\lambda}{n})} = \frac{(1+o(1))\frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda}{n}-i\frac{t}{n}+o(\frac{1}{n})} = \frac{\lambda}{\lambda-it}(1+o(1)),$$

c'est-à-dire que $\Phi_{Y_n}(t) \to \frac{\lambda}{\lambda-it}$. Et, si $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_Y(t) = \int_0^\infty e^{ity}\lambda e^{-\lambda y}dy = \Big[\frac{\lambda}{\lambda-it}e^{-(\lambda-it)y}\Big]_{y=0}^\infty = \frac{\lambda}{\lambda-it}$$

(pour la limite, se rappeler que $|e^{-(\lambda-it)y}| = e^{-\lambda y}$). On a donc bien $\Phi_{Y_n}(t) \to \Phi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On dit que la loi de Y_n *converge* vers la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 3 – *Vers le processus de Poisson.* Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, toutes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On définit $T_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

On interprète par exemple les X_n comme les durées d'attente entre deux tremblements de terre successifs ; la v.a. T_n représente alors l'instant du n-ème tremblement de terre.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la loi de T_n a pour densité

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Cette loi est appelée *loi gamma de paramètres* n *et* λ, notée $\Gamma(n,\lambda)$.

Indication : On pourra procéder par récurrence pour se ramener à la loi de la somme de 2 variables aléatoires, et utiliser alors la méthode de la fonction test.

Montrons la propriété par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, $T_1 = X_1$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, qui a bien pour densité f_1. Soit $n \geq 1$. Supposons que T_n a pour densité f_n. Alors, pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}[g(T_{n+1})] = \mathbb{E}[g(T_n + X_{n+1})] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(t+x)dP_{(T_n,X_{n+1})}(t,x)$$

d'où, vu l'indépendance entre T_n et X_{n+1}, et leurs lois respectives,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(T_{n+1})] &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(t+x)f_n(t)f_1(x)dt\,dx = \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+x)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}\lambda e^{-\lambda x}dt\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(t+x)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}\lambda e^{-\lambda x}dt\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty g(u)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}(u-x)^{n-1}e^{-\lambda(u-x)}\lambda e^{-\lambda x}du\right)dx \quad \text{en posant } t\mapsto u=t+x \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x\le u\}}g(u)\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}(u-x)^{n-1}e^{-\lambda u}du\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{x\le u\}}g(u)\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}(u-x)^{n-1}e^{-\lambda u}dx\right)du \quad \text{par thm de Fubini-Tonelli} \\
&= \int_0^\infty g(u)e^{-\lambda u}\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\int_0^u (u-x)^{n-1}dx\,du \\
&= \int_0^\infty g(u)e^{-\lambda u}\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\frac{u^n}{n}du = \int_{\mathbb{R}} g(u)f_{n+1}(u)du.
\end{aligned}$$

Ceci montre que T_{n+1} a pour densité f_{n+1}, et achève la récurrence.

2. Pour tout $t>0$, on note

$$N_t = \max\{n\ge 0\,|\,T_n\le t\}\,,$$

qui correspond au nombre de tremblements de terre survenus pendant l'intervalle de temps $[0,t]$.

a) Soit $t>0$, $n\in\mathbb{N}^*$. Réécrire l'événement $\{N_t\le n\}$ en utilisant uniquement la variable aléatoire T_n.
On pensera à utiliser cette relation pour les questions suivantes.

Presque sûrement, on a $T_0<T_1<T_2<\cdots$. Par suite, on constate que

$$\{N_t\le n\} = \{\text{pour tout } k>n,\, T_n>t\} = \{T_{n+1}>t\}$$

(il y a donc erreur dans l'énoncé)

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit la fonction $\varphi_n : t\mapsto \varphi_n(t) = \mathbb{P}(N_t\le n)$.

i) Que vaut $\lim_{t\to 0^+}\varphi_n(t)$?

On a $\varphi_n(t) = \mathbb{P}(N_t\le n) = \mathbb{P}(T_{n+1}>t) = 1-F_{T_{n+1}}(t)\to 1-F_{T_{n+1}}(0) = \mathbb{P}(T_{n+1}>0) = 1$ quand $t\to 0^+$, par la continuité à droite de la fonction de répartition de T_{n+1}.

ii) Justifier que φ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée.

On a donc pour tout $t>0$, $\varphi_n(t) = \mathbb{P}(T_{n+1}>t) = \int_t^\infty f_{n+1}(u)du$ d'après la question 1, et f_{n+1} est continue si bien que φ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\varphi_n'(t) = -f_{n+1}(t) = -\frac{\lambda^{n+1}}{n!}t^n e^{-\lambda t}.$$

c) Pour tout $t>0$, on considère une v.a. M_t qui suit la loi de Poisson de paramètre λt. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit la fonction $\psi_n : t\mapsto \mathbb{P}(M_t\le n)$.

i) Donner une expression de ψ_n (sous forme de somme). Que vaut $\lim_{t\to 0^+}\psi_n(t)$?

On a

$$\begin{aligned}
\psi_n(t) &= \mathbb{P}(M_t\le n) = \mathbb{P}(M_t=0)+\cdots+\mathbb{P}(M_t=n) \\
&= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

De plus, $\lim_{t\to 0^+}\psi_n(t)=1$ (limite du terme d'indice $k=0$; et les termes d'indices $k\ge 1$ ont pour limite 0).

ii) Justifier que ψ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$ et calculer sa dérivée.
Remarquer que l'on obtient une somme télescopique et la simplifier.

Par l'expression précédente, il est clair que ψ_n est de classe $\mathcal{C}^1$, et, pour tout $t > 0$, (en séparant le premier terme, car sa dérivée s'écrit différemment)

$$\begin{aligned}\psi_n'(t) &= \lambda e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{n}\left(-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} + e^{-\lambda t}\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}\right)\\ &= \lambda e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{n}\left(-e^{-\lambda t}\frac{\lambda^{k+1}t^k}{k!} + e^{-\lambda t}\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}\right) = \lambda e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t}\frac{\lambda^{n+1}t^n}{n!} + \lambda e^{-\lambda t} = -e^{-\lambda t}\frac{\lambda^{n+1}}{n!}t^n\end{aligned}$$

en constatant que la somme est télescopique (de la forme $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$)

d) À l'aide des questions précédentes, démontrer que, pour tout $t > 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

On a donc observé que $\psi_n'(t) = \varphi_n'(t)$ pour tout $t > 0$, et que $\lim_{t\to 0^+}\psi_n(t) = 1 = \lim_{t\to 0^+}\varphi_n(t)$. Il en résulte que $\psi_n(t) = \varphi_n(t)$ pour tout $t > 0$.
(en effet $\psi_n(t) = \psi_n(s) + \int_s^t \psi_n'(u)du \to 1 + \int_0^t \psi_n'(u)du$ quand $s \to 0^+$ et de même pour φ_n)
On a donc montré : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(N_t \le n) = \mathbb{P}(M_t \le n).$$

Vu que, pour tout n,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \le n) - \mathbb{P}(N_t \le n+1)$$

et de même pour M_t (car ce sont des variables à valeurs entières), on en déduit que $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(M_t = n)$ pour tout entier n, et donc que N_t et M_t ont même loi. Autrement dit, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.