

EXAMEN PARTIEL 2 DU 12 JANVIER 2024

Durée : 3h

Pour seul document, une feuille A4 de notes manuscrites, recto-verso, à votre nom, est autorisée. Tout appareil électronique est interdit.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

Exercice 1. Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ : sa densité est

$$f_X : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x).$$

1. On pose $Y = e^X$.

1.a) Calculer la fonction de répartition de Y . En déduire que Y admet une densité f_Y et la calculer.

On a $X > 0$ p.s., donc $Y = e^X > 1$ p.s.. Ainsi, $F_Y(t) = 0$ si $t \leq 1$. Et, pour $t > 1$, en utilisant la croissance stricte de $\ln$,

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \ln t) = \int_0^{\ln t} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \ln t} = 1 - t^{-\lambda}.$$

La fonction $F_Y : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{t^\lambda} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, \infty[$, donc Y admet une densité f_Y donnée par : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$,

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ \frac{\lambda}{t^{\lambda+1}} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

1.b) Calculer $\mathbb{E}[\frac{1}{Y}]$ de deux façons : à l'aide de la loi de X , et à l'aide de la loi de Y trouvée à la question précédente.

Notons d'abord que $Y > 1$ p.s., donc $0 < \frac{1}{Y} < 1$ p.s., si bien que $\mathbb{E}[\frac{1}{Y}]$ est bien définie (car $Y \geq 0$) et même réel satisfaisant $0 \leq \mathbb{E}[\frac{1}{Y}] \leq 1$. Avec la loi de X , on a :

$$\mathbb{E}[\frac{1}{Y}] = \mathbb{E}[e^{-X}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} dP_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

Avec la loi de Y on a :

$$\mathbb{E}[\frac{1}{Y}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y} dP_Y(y) = \int_1^{\infty} \frac{1}{y} \frac{\lambda}{y^{1+\lambda}} dy = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda+1} \frac{1}{y^{\lambda+1}} \right]_{y=1}^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

2. Déterminer l'intervalle I des valeurs $u \in \mathbb{R}$ telles que e^{uX} est intégrable. Calculer alors, pour $u \in I$, l'espérance $h(u) = \mathbb{E}[e^{uX}]$.

Pour $u \in \mathbb{R}$, e^{uX} est intégrable si $\mathbb{E}[|e^{uX}|] < \infty$, c'est-à-dire $\mathbb{E}[e^{uX}] < \infty$. Or, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[e^{uX}] = \int_0^{\infty} e^{ux} \lambda e^{-\lambda x} dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda-u} & \text{si } u < \lambda \\ \infty & \text{si } u \geq \lambda, \end{cases}$$

donc e^{uX} est intégrable si, et seulement si $u \in I :=]-\infty, \lambda[$ et, pour $u \in I$,

$$h(u) := \mathbb{E}[e^{uX}] = \frac{\lambda}{\lambda - u}.$$

3. Observer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , et calculer les dérivées successives h' , h'' , h''' , et plus généralement $h^{(k)}$ pour tout $k \geq 1$.

La fonction h ci-dessus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , et pour tout $u \in I$,

$$h'(u) = \frac{\lambda}{(\lambda - u)^2}, \quad h''(u) = \frac{2\lambda}{(\lambda - u)^3}, \quad h'''(u) = \frac{6\lambda}{(\lambda - u)^4},$$

et plus généralement, pour tout $k \geq 1$, pour tout $u \in I$,

$$h^{(k)}(u) = \frac{k!\lambda}{(\lambda - u)^{k+1}}.$$

4. Justifier rigoureusement que, pour $u \in I$, on a aussi $h'(u) = \mathbb{E}[Xe^{uX}]$. En déduire un calcul de $\mathbb{E}[X]$ en fixant la valeur de u .

On utilise le théorème de dérivation sous l'intégrale, pour l'intégrale $h(u) = \int_{\Omega} e^{uX(\omega)} dP(\omega) = \mathbb{E}[e^{uX}]$. On ne peut pas l'appliquer directement sur I . Soit $\varepsilon > 0$.

- (i) Pour $u \in]-\infty, \lambda - \varepsilon[$, la fonction e^{uX} est intégrable.
- (ii) p.s., $u \mapsto e^{uX}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, \lambda - \varepsilon[$, de dérivée $u \mapsto Xe^{uX}$.
- (iii) p.s., pour tout $u < \lambda - \varepsilon$, $|Xe^{uX}| \leq Xe^{(\lambda - \varepsilon)X}$ (car $X \geq 0$) et

$$\mathbb{E}[Xe^{(\lambda - \varepsilon)X}] = \int_0^\infty xe^{(\lambda - \varepsilon)x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty xe^{-\varepsilon x} dx < \infty,$$

donc on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour conclure que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, \lambda - \varepsilon[$, et pour tout $u < \lambda - \varepsilon$,

$$h'(u) = \mathbb{E}[Xe^{uX}].$$

Comme ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\bigcup_{\varepsilon > 0}]-\infty, \lambda - \varepsilon[=]-\infty, \lambda[$, avec la dérivée ci-dessus.

En particulier, $\mathbb{E}[X] = h'(0)$ donc avec la formule $h'(u) = \frac{\lambda}{(\lambda - u)^2}$ on déduit $\mathbb{E}[X] = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$.

5. Obtenir de façon analogue un calcul de $\mathbb{E}[X^k]$, en utilisant $h^{(k)}$, pour tout $k \geq 1$.

On démontre de même par récurrence (le faire) que h est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k et $h^{(k)}(u) = \mathbb{E}[X^k e^{uX}]$, d'où en particulier

$$\mathbb{E}[X^k] = h^{(k)}(0) = \frac{k!\lambda}{\lambda^{k+1}} = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

Exercice 2. Soit X, Y deux variables aléatoires réelles, de densité jointe

$$f_{(X,Y)} : (x, y) \mapsto \frac{C}{\sqrt{xy}} \mathbf{1}_{\{0 < y < x < 1\}},$$

où C est une constante.

1. Calculer les densités f_X et f_Y . En déduire la valeur de C .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy = \frac{C}{\sqrt{x}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y}} dy \mathbf{1}_{\{0 < x < 1\}} = \frac{C}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} \mathbf{1}_{\{0 < x < 1\}} = 2C \mathbf{1}_{\{0 < x < 1\}} = 2C \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$, on en déduit que $C = 1/2$ et que X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On remplace maintenant $C = 1/2$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_y^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \mathbf{1}_{\{0 < y < 1\}} = \frac{1}{\sqrt{y}} (1 - \sqrt{y}) \mathbf{1}_{\{0 < y < 1\}} = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) \mathbf{1}_{]0,1[}(y)$$

2. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Comme $X, Y \geq 0$ p.s. (en effet $f_X(x) = 0$ et $f_Y(y) = 0$ pour $x, y < 0$), les espérances sont bien définies, et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}[Y] &= \int_{\mathbb{R}} y dP_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) dy = \int_0^1 (\sqrt{y} - y) dy = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\ \mathbb{E}[XY] &= \int_{\mathbb{R}^2} xy dP_{(X,Y)}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} xy \frac{1}{2\sqrt{xy}} \mathbf{1}_{\{0 < y < x < 1\}} dx dy\end{aligned}$$

La fonction sous l'intégrale est positive donc par théorème de Fubini-Tonelli

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} xy \frac{1}{2\sqrt{xy}} \mathbf{1}_{\{0 < y < x < 1\}} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^x \sqrt{y} dy \right) \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{9}.$$

Si X et Y étaient indépendantes on aurait $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Or $\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2} \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{9} = \mathbb{E}[XY]$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

On pouvait par ailleurs noter que la densité n'apparaît pas comme un produit d'une fonction de X et d'une fonction de Y , ou le fait que l'on a $Y \leq X$ p.s. si bien que la connaissance de X renseigne sur les valeurs possibles de Y , d'où une dépendance (par exemple, $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}) > 0$ et $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{2}) > 0$).

3. On note $Z = \frac{Y}{X}$. Justifier que $Z \in [0, 1]$ p.s.. Montrer que (X, Z) a une densité et la déterminer. X et Z sont-elles indépendantes ?

Comme $f_{(X,Y)}(x, y) = 0$ dès que $x \leq y$, on a $X > Y$ p.s. (cf. cours, propriété page 43 b)). Ainsi, $Z = \frac{Y}{X} < 1$ p.s.. De même $f_X(x) = 0$ et $f_Y(y) = 0$ pour $x, y < 0$ donc $X \geq 0$ p.s. et $Y \geq 0$ p.s., et donc $X > 0$ p.s. et $Y > 0$ p.s. vu que $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0$ (ce sont des variables à densité).

Pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X, Z)] &= \mathbb{E}[g(X, \frac{Y}{X})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x, \frac{y}{x}) dP_{(X,Y)}(x, y) \quad (\text{thm de transfert}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x, \frac{y}{x}) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy \quad (\text{loi de } (X, Y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x, \frac{y}{x}) \frac{1}{2\sqrt{xy}} \mathbf{1}_{\{0 < y < x < 1\}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x, \frac{y}{x}) \frac{1}{2\sqrt{xy}} \mathbf{1}_{\{0 < y < x < 1\}} dy \right) dx \quad (\text{thm de Fubini-Tonelli}) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x g(x, \frac{y}{x}) \frac{1}{2\sqrt{xy}} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, z) \frac{1}{2\sqrt{x^2 z}} |x| dz \right) dx \quad (\text{en posant } z = \frac{y}{x} \text{ dans l'intégrale en } y) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, z) \frac{1}{2\sqrt{z}} dz \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x, z) f_{(X,Z)}(x, z) dz dx\end{aligned}$$

où pour $(x, z) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_{(X,Z)}(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(z).$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction mesurable positive g , on en déduit que (X, Z) a pour densité $f_{(X,Z)}$. On constate que

$$f_{(X,Z)}(x, z) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \times \frac{1}{2\sqrt{z}} \mathbf{1}_{[0,1]}(z) = f_X(x) f_Z(z)$$

où $f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \mathbf{1}_{[0,1]}(z)$ (et f_X a déjà été calculé, c'est la densité de X). Le fait que $f_{(X,Z)}(x, z)$ s'écrive comme produit d'une fonction de x par une fonction de z prouve que X et Z sont indépendantes. De plus, Z a pour densité f_Z .

Exercice 3. Soit $p \in]0, 1[$. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi géométrique de paramètre p :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

On pose $Z = X + Y$.

1. Quelles sont les valeurs $x \in \mathbb{R}$ telles que $\mathbb{P}(Z = x) > 0$?

X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ donc leur somme est à valeurs dans $\{2, 3, 4, \dots\}$: si $\mathbb{P}(Z = x) > 0$, alors $x \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

Inversement, si $x \in \{2, 3, 4, \dots\}$, alors par exemple

$$\{Z = x\} \supset \{X = 1, Y = x - 1\}$$

donc

$$\mathbb{P}(Z = x) \geq \mathbb{P}(X = 1, Y = x - 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = x - 1) > 0$$

(grâce à l'indépendance)

2. Calculer $\mathbb{P}(Z = 1)$, $\mathbb{P}(Z = 2)$, $\mathbb{P}(Z = 3)$, puis déterminer la loi de Z .

On a $\mathbb{P}(Z = 1) = 0$ vu ce qui précède ($Z = X + Y \geq 2$ p.s.).

On a $Z = 2$ si et seulement si $X = Y = 1$, donc $\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = p^2$ en utilisant l'indépendance entre X et Y .

On a $Z = 3$ si et seulement si $(X, Y) = (2, 1)$ ou $(X, Y) = (1, 2)$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 3) &= \mathbb{P}(\{X = 2, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 2\}) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) \\ &= \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2) \\ &= (1 - p)p^2 + (1 - p)p^2 = 2p^2(1 - p) \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout $x \in \{2, 3, \dots\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = x) &= \mathbb{P}(\{X = 1, Y = x - 1\} \cup \{X = 2, Y = x - 2\} \cup \dots \cup \{X = x - 1, Y = 1\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{x-1} \{X = i, Y = x - i\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{x-1} \mathbb{P}(X = i, Y = x - i) \\ &= \sum_{i=1}^{x-1} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = x - i) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \sum_{i=1}^{x-1} (1 - p)^{i-1}p(1 - p)^{x-i-1}p \\ &= p^2 \sum_{i=1}^{x-1} (1 - p)^{x-2} \\ &= (x - 1)p^2(1 - p)^{x-2} \end{aligned}$$

Comme Z est une v.a. discrète dans $\{2, 3, \dots\}$, cela décrit sa loi.

3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

On décompose :

$$\{X = Y\} = \bigcup_{x=1}^{\infty} \{X = x, Y = x\}$$

et les événements $\{X = x, Y = x\}$, pour $x \in \mathbb{N}^*$, sont disjoints. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x, Y = x) = \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = x) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \left((1-p)^{x-1} p \right)^2 \\ &= p^2 \sum_{x=1}^{\infty} \left((1-p)^2 \right)^{x-1} = \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2-p}\end{aligned}$$

4. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$. On pourra s'aider de la valeur précédente.

On peut être astucieux : on découpe

$$\Omega = \{X < Y\} \cup \{X = Y\} \cup \{X > Y\}$$

d'où

$$1 = \mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X > Y)$$

et $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(Y < X)$ car (X, Y) et (Y, X) ont la même loi, donc

$$1 = 2\mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = Y)$$

et finalement

$$\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1 - \mathbb{P}(X = Y)}{2} = \frac{1 - \frac{p}{2-p}}{2} = \frac{2-2p}{2(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}$$

Exercice 4. On rappelle la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.a) Exprimer $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ et en déduire la valeur de cette première intégrale.

On a, en posant $u = x/\sqrt{2}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx,$$

or $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

1.b) Montrer que $\mathbb{E}[\max(X, Y)] = 2\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}]$.

Il faut en fait déjà vérifier que l'espérance est bien définie, ce qui ici n'est pas complètement évident vu que X et Y (et donc leur maximum) peuvent prendre des valeurs négatives. Il faut donc vérifier $\mathbb{E}[|\max(X, Y)|] < \infty$. Par exemple on peut utiliser la majoration suivante : presque sûrement, $\max(X, Y)$ est égal à X ou à Y et dans les deux cas on a

$$|\max(X, Y)| \leq \max(|X|, |Y|) \leq |X| + |Y|,$$

or on sait que X et Y sont intégrables (propriété de la loi normale), donc

$$\mathbb{E}[|\max(X, Y)|] \leq \mathbb{E}[|X|] + \mathbb{E}[|Y|] < \infty,$$

ce que l'on devait montrer.

Par définition du maximum, on a $\max(X, Y) = \begin{cases} X & \text{si } X > Y \\ Y & \text{si } Y \leq X \end{cases} = X \mathbf{1}_{\{X > Y\}} + Y \mathbf{1}_{\{Y \geq X\}}$ et les deux variables $X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}$ et $Y \mathbf{1}_{\{Y \geq X\}}$ sont intégrables (en effet $|X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}| \leq |X|$ et X est intégrable, de même pour l'autre), donc

$$\mathbb{E}[\max(X, Y)] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}] + \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{\{Y \geq X\}}].$$

De plus, $\mathbb{P}(X = Y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x=y\}} dP_X(x) dP_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{x=y\}} dP_Y(y) \right) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Y = x) dP_X(x) = 0$ car Y a une densité, donc $Y \mathbf{1}_{\{Y \geq X\}} = Y \mathbf{1}_{\{Y > X\}}$ p.s., et ainsi on peut réécrire

$$\mathbb{E}[\max(X, Y)] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}] + \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{\{Y > X\}}].$$

Comme (X, Y) et (Y, X) ont même loi, les deux espérances ci-dessus sont égales, d'où finalement

$$\mathbb{E}[\max(X, Y)] = 2\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}].$$

1.c) Exprimer $\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}]$ sous la forme d'une intégrale double. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[\max(X, Y)]$. *Pour faire le calcul, on pourra remarquer que $t \mapsto te^{-t^2/2}$ est la dérivée de $t \mapsto -e^{-t^2/2}$.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}] &= \int_{\mathbb{R}^2} x \mathbf{1}_{\{x > y\}} dP_{(X, Y)}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} x \mathbf{1}_{\{x > y\}} dP_X(x) dP_Y(y) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} x \mathbf{1}_{\{x > y\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_y^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (\text{thm de Fubini-Lebesgue, justifié par l'intégrabilité déjà vue}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad \text{en remarquant que } \int_y^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = [-e^{-\frac{x^2}{2}}]_{x=y}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} \quad \text{par la première question} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}[\max(X, Y)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ vu la question précédente.

2. Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

2.a) Soit $a > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(Z > a) = e^{-\frac{a^2}{2}} \mathbb{E}[e^{-aZ} \mathbf{1}_{\{Z > 0\}}]$ *Faire un changement de variable $x = z - a$.*

On calcule, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > a) &= \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a+x)^2}{2}} dx \quad \text{en posant } x = z - a \\ &= e^{-\frac{a^2}{2}} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{a^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{x > 0\}} e^{-ax} f_Z(x) dx \\ &= e^{-\frac{a^2}{2}} \mathbb{E}[e^{-aZ} \mathbf{1}_{\{Z > 0\}}] \quad \text{par théorème de transfert} \end{aligned}$$

2.b) Justifier que $\mathbb{P}(Z > 0) = \frac{1}{2}$. En déduire

$$\mathbb{P}(Z > a) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

On peut utiliser un argument de symétrie :

$$1 = \mathbb{P}(Z \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(Z < 0) + \mathbb{P}(Z > 0) + \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Z < 0) + \mathbb{P}(Z > 0) \quad \text{car } Z \text{ a une densité}$$

puis $\mathbb{P}(Z > 0) = \mathbb{P}(Z < 0)$ par la parité de la densité de Z : $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) dz = \int_0^{\infty} f_Z(y) dy$ en posant $y = -z$. Donc $1 = 2\mathbb{P}(Z > 0)$ et ainsi $\mathbb{P}(Z > 0) = \frac{1}{2}$.

On va utiliser la question précédente. Notons d'abord que, pour $a > 0$, $e^{-aZ} \mathbf{1}_{\{Z > 0\}} \leq \mathbf{1}_{\{Z > 0\}}$ p.s., car en effet on a $e^{-aZ} < 1$ si $Z > 0$, et on a $0 \leq 1$ sinon. Alors, avec la question précédente,

$$\mathbb{P}(Z > a) = e^{-\frac{a^2}{2}} \mathbb{E}[e^{-aZ} \mathbf{1}_{\{Z > 0\}}] \leq e^{-\frac{a^2}{2}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z > 0\}}] = e^{-\frac{a^2}{2}} \mathbb{P}(Z > 0) = \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{2}}$$

3. Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Soit $C > 0$ une constante (qui sera fixée plus tard). On note $A_n = \{M_n > \sqrt{2C \ln n}\}$.

3.a) Soit $n \geq 1$. Écrire l'événement A_n sous forme d'union pour en déduire :

$$\mathbb{P}(A_n) \leq n\mathbb{P}(X_1 > \sqrt{2C \ln n}).$$

On peut décomposer

$$\begin{aligned} A_n &= \{M_n > \sqrt{2C \ln n}\} \\ &= \{X_1 > \sqrt{2C \ln n} \text{ ou } X_2 > \sqrt{2C \ln n} \text{ ou } \dots \text{ ou } X_n > \sqrt{2C \ln n}\} \\ &= \bigcup_{i=1}^n \{X_i > \sqrt{2C \ln n}\} \end{aligned}$$

puis par sous-additivité de la probabilité,

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > \sqrt{2C \ln n}) = n\mathbb{P}(X_1 > \sqrt{2C \ln n}),$$

où la dernière égalité vient du fait que $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont tous la même loi que X_1 .

3.b) À l'aide de la question 2, en déduire une valeur de C telle que la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ converge. On utilise désormais cette valeur.

Par la question 2 et la précédente,

$$\mathbb{P}(A_n) \leq n\mathbb{P}(X_1 > \sqrt{2C \ln n}) \leq \frac{n}{2} e^{-\frac{2C \ln n}{2}} = \frac{n}{2} \frac{1}{n^C} = \frac{1}{2n^{C-1}},$$

si bien que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$ dès que $C - 1 > 1$, donc par exemple pour $C = 3$.

3.c) On note $N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Prouver que N est intégrable. Qu'en déduit-on sur N , puis sur la suite $(A_n)_n$?

N est une variable positive, et par thm de convergence monotone pour les séries à termes positifs,

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_n}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

ce qui signifie que N est intégrable. En particulier, $N < \infty$ p.s., or N est égal au nombre (aléatoire) d'indices n tels que A_n se réalise, donc on a montré que presque sûrement il y a un nombre fini d'entiers n tels que $M_n > \sqrt{6 \ln n}$.

Formulé autrement, presque sûrement il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\max(X_1, \dots, X_n) \leq \sqrt{6 \ln n}.$$