

EXAMEN PARTIEL 2 DU 12 JANVIER 2024

Durée : 3h

Pour seul document, une feuille A4 de notes manuscrites, recto-verso, à votre nom, est autorisée. Tout appareil électronique est interdit.

Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.

Exercice 1. Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ : sa densité est

$$f_X : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x).$$

1. On pose $Y = e^X$.

1.a) Calculer la fonction de répartition de Y . En déduire que Y admet une densité f_Y et la calculer.

1.b) Calculer $\mathbb{E}[\frac{1}{Y}]$ de deux façons : à l'aide de la loi de X , et à l'aide de la loi de Y trouvée à la question précédente.

2. Déterminer l'intervalle I des valeurs $u \in \mathbb{R}$ telles que e^{uX} est intégrable. Calculer alors, pour $u \in I$, l'espérance $h(u) = \mathbb{E}[e^{uX}]$.

3. Observer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , et calculer les dérivées successives h' , h'' , h''' , et plus généralement $h^{(k)}$ pour tout $k \geq 1$.

4. Justifier rigoureusement que, pour $u \in I$, on a aussi $h'(u) = \mathbb{E}[Xe^{uX}]$. En déduire un calcul de $\mathbb{E}[X]$ en fixant la valeur de u .

5. Obtenir de façon analogue un calcul de $\mathbb{E}[X^k]$, en utilisant $h^{(k)}$, pour tout $k \geq 1$.

Exercice 2. Soit X, Y deux variables aléatoires réelles, de densité jointe

$$f_{(X,Y)} : (x, y) \mapsto \frac{C}{\sqrt{xy}} \mathbf{1}_{\{0 < y < x < 1\}},$$

où C est une constante.

1. Calculer les densités f_X et f_Y . En déduire la valeur de C .

2. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. On note $Z = \frac{Y}{X}$. Justifier que $Z \in [0, 1]$ p.s.. Montrer que (X, Z) a une densité et la déterminer. X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Soit $p \in]0, 1[$. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi géométrique de paramètre p :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

On pose $Z = X + Y$.

1. Quelles sont les valeurs $x \in \mathbb{R}$ telles que $\mathbb{P}(Z = x) > 0$?

2. Calculer $\mathbb{P}(Z = 1)$, $\mathbb{P}(Z = 2)$, $\mathbb{P}(Z = 3)$, puis déterminer la loi de Z .

3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$. On pourra s'aider de la valeur précédente.

Exercice 4. On rappelle la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.a) Exprimer $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ et en déduire la valeur de cette première intégrale.

1.b) Montrer que $\mathbb{E}[\max(X, Y)] = 2\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}]$.

1.c) Exprimer $\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > Y\}}]$ sous la forme d'une intégrale double. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[\max(X, Y)]$. *Pour faire le calcul, on pourra remarquer que $t \mapsto te^{-t^2/2}$ est la dérivée de $t \mapsto -e^{-t^2/2}$.*

2. Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

2.a) Soit $a > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(Z > a) = e^{-\frac{a^2}{2}} \mathbb{E}[e^{-aZ} \mathbf{1}_{\{Z > 0\}}]$. *Faire un changement de variable $x = z - a$.*

2.b) Justifier que $\mathbb{P}(Z > 0) = \frac{1}{2}$. En déduire

$$\mathbb{P}(Z > a) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

3. Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Soit $C > 0$ une constante (qui sera fixée plus tard). On note $A_n = \{M_n > \sqrt{2C \ln n}\}$.

3.a) Soit $n \geq 1$. Écrire l'événement A_n sous forme d'union pour en déduire :

$$\mathbb{P}(A_n) \leq n\mathbb{P}(X_1 > \sqrt{2C \ln n}).$$

3.b) À l'aide de la question 2, en déduire une valeur de C telle que la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ converge. On utilise désormais cette valeur.

3.c) On note $N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Prouver que N est intégrable. Qu'en déduit-on sur N , puis sur la suite $(A_n)_n$?