Exercice 1

a) Par sous-additivité, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

donc si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ pour tout n, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq 0$.
ce qui donne $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1} A_n\right) = 0$

b) En passant au complémentaire : comme $\left(\bigcap A_n\right)^c = \bigcup A_n^c$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)$$

si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout n, on a $\mathbb{P}(A_n^c) = 0$ pour tout n.

D'après la question a) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right) = 0$, d'où $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = 1$

Exercice 2.

a) $Y = X_1 - X_2$ peut prendre les valeurs -1, 0 ou 1.

et $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 0 \text{ et } X_2 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 1)$ par indép.

$$= (1-p)\,p$$

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}\big((X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 0) \cup (X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1)\big)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$$

$$= \mathbb{P}(X_1=0)\,\mathbb{P}(X_2=0) + \mathbb{P}(X_1=1)\,\mathbb{P}(X_2=1) \quad \text{par indépendance}$$

$$= (1-p)^2 + p^2 = 1 - 2p(1-p)$$

$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 0)$ par indépendance

$$= p(1-p)$$

b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable

Alors $\mathbb{E}[g(Y)] = \mathbb{E}[g(X^2)] = \int_{\mathbb{R}} g(x^2) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} g(x^2) \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$y = x^2 \rightsquigarrow = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g(y) \frac{1}{1+y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$$

$\hookrightarrow$ Y a pour densité $\frac{1}{\pi \sqrt{y}(1+y)} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(y)$

Exercice 3

a) $\mathbb{E}(X) = 5\, \mathbb{P}(X=5) + 2\, \mathbb{P}(X=2) + 1\, \mathbb{P}(X=1)$

$$= 5 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5+4+3}{6} = 2$$

b) $\mathbb{E}[X^2] = 5^2\, \mathbb{P}(X=5) + 2^2\, \mathbb{P}(X=2) + 1^2\, \mathbb{P}(X=1)$

$$= \frac{25}{6} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{25+8+3}{6} = 6$$

$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 6 - 4 = 2$

c) Par linéarité $\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = 2n$

Les (X_i) étant indépendants, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = 2n$.

d) $\mathbb{P}(S_n \geq N) = \mathbb{P}(S_n - 2n \geq N - 2n) \leq \mathbb{P}(|S_n - 2n| \geq N-2n)$

par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $\mathbb{P}(|S_n - 2n| \geq N-2n) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)}{(N-2n)^2}$
(comme $\mathbb{E}[S_n] = 2n$) $= \frac{2n}{(N-2n)^2}$

Pour $n = 80$, $N = 200$ $\quad \mathbb{P}(S_{80} \geq 200) \leq \frac{2 \cdot 80}{(40)^2} = \frac{1}{10}$.

Exercice 4

a) $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx = \int_y^{+\infty} \frac{c_\alpha}{x^{1+\alpha}}\, dx \; \frac{1}{y^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{\{y>1\}}$

or $\int_y^{+\infty} \frac{c_\alpha}{x^{1+\alpha}}\, dx = c_\alpha \left[\frac{-x^{-\alpha}}{\alpha} \right]_y^{+\infty} = \frac{c_\alpha}{\alpha} y^{-\alpha}$

$f_Y(y) = \frac{c_\alpha}{\alpha} y^{-(1+2\alpha)} \mathbb{1}_{\{y>1\}}$

b) On doit avoir $\int_{\mathbb{R}} f_Y(y)\, dy = 1$

d'où $1 = \frac{c_\alpha}{\alpha} \int_1^{+\infty} y^{-(1+2\alpha)}\, dy = \frac{c_\alpha}{\alpha} \left[\frac{-y^{-2\alpha}}{2\alpha} \right]_1^{+\infty} = \frac{c_\alpha}{2\alpha^2}$

donc $c_\alpha = 2\alpha^2$

c) Y étant positive, $\mathbb{E}[Y]$ est toujours bien définie

et $\mathbb{E}[Y] = \frac{c_\alpha}{\alpha} \int_1^{+\infty} y \; y^{-(1+2\alpha)}\, dy = \frac{c_\alpha}{\alpha} \int_1^{+\infty} y^{-2\alpha}\, dy$

ainsi $\mathbb{E}[Y] < +\infty$ ssi $2\alpha > 1$

ssi $\alpha > \frac{1}{2}$

d) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable

$\mathbb{E}[g(Z,T)] = \mathbb{E}[g(XY, X/Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(xy, x/y)\, f_\alpha(x,y)\, dx\, dy$

$= \int_U g(xy, x/y) \frac{c_\alpha}{(xy)^{1+\alpha}}\, dx\, dy$

On effectue un changement de variable en posant

$(z,t) = \varphi(x,y) = (xy, x/y)$

d'inverse $\quad \varphi^{-1}(z,t) = (\sqrt{zt}, \sqrt{z/t}) \qquad [\text{car } zt = x^2,\ z/t = y^2]$

$$\mathrm{Jac}_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{z}} & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{t}} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{z}} & \frac{-1}{2}\frac{\sqrt{z}}{t^{3/2}} \end{pmatrix}, \quad |\det \mathrm{Jac}_{\varphi^{-1}}| = \frac{1}{2t}$$

Ainsi $c_\alpha \int_U g(xy, x/y) \frac{1}{(xy)^{1+\alpha}}\,dx\,dy = c_\alpha \int_V g(z,t) \frac{1}{z^{1+\alpha}} \frac{1}{2t}\,dz\,dt$

où $V = \{(z,t),\ 1 < t < z\}$

Ainsi, (Z,T) de densité $\frac{c_\alpha}{2} \frac{1}{z^{1+\alpha} t} \mathbb{1}_{\{1<t<z\}}$

e) La densité marginale de Z est

$$\int \frac{c_\alpha}{2} \frac{1}{z^{1+\alpha}} \frac{1}{t} \mathbb{1}_{\{1<t<z\}}\,dt = \frac{c_\alpha}{2z^{1+\alpha}} \int_1^z \frac{1}{t}\,dt\ \mathbb{1}_{\{z>1\}}$$

$$= \frac{c_\alpha}{2} \frac{\ln z}{z^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{\{z>1\}}.$$

Exercice 5 :

a) $\mathbb{E}[|\ln U|] = \int_0^2 \frac{|\ln u|}{2}\,du < +\infty$ car $|\ln u|$ intégrable sur $[0,2]$.

$\mathbb{E}[\ln U] = \frac{1}{2}\int_0^2 \ln u\,du = \frac{1}{2}[u\ln u - u]_0^2 = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 2)$

$= \ln 2 - 1$

b) $\left|\frac{\sin(nU)}{1+nU^3}\right| \leq 1$ car $1+nU^3 \geq 1$, avec $\mathbb{E}[1] < +\infty$.

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(nU)}{1+nU^3} = 0$ p.s. car $\left|\frac{\sin(nU)}{1+nU^3}\right| \leq \frac{1}{1+nU^3}$ et $U>0$ p.s.

par convergence dominée, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{\sin(nU)}{1+nU^3}\right] = 0.$$

c) $h(t) = \mathbb{E}[U^t]$ bien défini car $U^t \geq 0$.

et $h(t) = \int_0^2 \frac{u^t}{2}\,du < +\infty$ pour tout $t>-1$.

de plus $h(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t}u^{t+1}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{2^{t+1}}{1+t}$ pour $t>-1$

donc $h(t) = \frac{2^t}{1+t}$ pour tout $t>-1$.

d) Pour tout $t\in[a,b]$ avec $-1<a<b<+\infty$

- $t \mapsto U^t = e^{t\ln U}$ est dérivable, de dérivée $(\ln U)\,U^t$
- $|(\ln U)\,U^t| \leq |\ln U|\,U^a\,\mathbb{1}_{\{U\in[0,1]\}} + (\ln 2)\,2^b\,\mathbb{1}_{\{U\in[0,2]\}}$

intégrable.

Par théorème de dérivation sous l'intégrale, $\forall\, t \in]a,b[$

$$h'(t) = \mathbb{E}\left[(\ln U)\, U^t\right].$$

Notamment $\quad h'(0) = \mathbb{E}[\ln U]$

Mais $\quad h(t) = \dfrac{2^t}{1+t} = \dfrac{e^{t\ln 2}}{1+t}$, $\quad h'(t) = \ln 2 \, \dfrac{e^{t \ln 2}}{1+t} - e^{t\ln 2} \dfrac{1}{(1+t)^2}$

donc $\quad h'(0) = \ln 2 - 1$, et on retrouve la valeur de $\mathbb{E}[\ln U]$.

e) $\quad \mathbb{E}\left[\sqrt{X_n}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} \sqrt{U_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\sqrt{U_k}\right]$ par indépendance.

or $\quad \mathbb{E}\left[\sqrt{U_k}\right] = \mathbb{E}\left[U_k^{1/2}\right] = h(1/2) = \dfrac{2^{1/2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

donc $\quad \mathbb{E}\left[\sqrt{X_n}\right] = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n$ c'est-à-dire $\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

f) On a $\quad \underset{x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante}}{\mathbb{P}(X_n \geq x) = \mathbb{P}(\sqrt{X_n} \geq \sqrt{x})} \underset{\text{inégalité de Markov}}{\leq} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, \mathbb{E}\left[\sqrt{X_n}\right]$

$$\mathbb{P}(X_n \geq x) \leq \frac{\theta^n}{\sqrt{x}}$$

g) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \underset{X_n \geq 0}{=} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) \leq \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, \theta^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

car $|\theta| < 1$.

donc $X_n \longrightarrow 0$ en probabilité.

h) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n]$ car les X_n sont ≥ 0 [CVM pour les séries à termes positifs]

or $\mathbb{E}[X_n] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[U_k]$ par indépendance

$= 1$ car $\mathbb{E}[U_k] = 1$ $(= h(1))$

donc $\mathbb{E}[Z] = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$

i) $\sqrt{Z} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{X_n}$ d'après l'inégalité admise.

les $\sqrt{X_n}$ étant positifs, par CVM pour les séries à termes ≥ 0,

on a $\mathbb{E}[\sqrt{Z}] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{X_n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\sqrt{X_n}] = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta^n$

par la question e).

comme $|\theta| < 1$, $\mathbb{E}[\sqrt{Z}] < +\infty$.

$\sqrt{Z}$ étant intégrable, on a $\sqrt{Z} < +\infty$ p.s.

d'où $Z < +\infty$ p.s.

j) Si $Z = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n < +\infty$ p.s. avec les $X_n \geq 0$,

cela signifie que $X_n \xrightarrow[p.s.]{} 0$

[en effet, une série de termes positifs ne peut pas converger si le terme général ne tend pas vers 0].