Examen — 10 janvier 2025

(Durée : 3h)

Les réponses doivent être *justifiées proprement.*
En particulier, lorsque l'on utilisera un énoncé du cours, on veillera à vérifier les hypothèses nécessaires.
Dans tout l'examen, on se donnera un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sur lequel seront définies toutes les variables aléatoires considérées. Les lois des variables aléatoires usuelles sont rappelées à la fin du sujet.

Question de cours. Énoncer la loi forte des grands nombres, en incluant toutes les hypothèses nécessaires.

Exercice 1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille (dénombrable) d'événements.

a) Montrer que si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$, alors $\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\big) = 0$.

b) Montrer que si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, alors $\mathbb{P}\big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\big) = 1$.

Exercice 2. Déterminer les lois des variables aléatoires suivantes :

a) $Y = X_1 - X_2$ où X_1, X_2 sont deux v.a. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
Commencer par déterminer les valeurs que peut prendre Y.

b) $Y = X^2$ où X est une v.a. de densité $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.

Exercice 3. On lance une fléchette sur une cible : on obtient 5 points si on touche le centre (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{6}$), 2 points si on touche la zone intermédiaire (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{3}$), et 1 point si on touche la zone périphérique (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{2}$). On note X le score obtenu après un lancer de fléchette.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

b) Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

On effectue des lancers de fléchettes successifs et on note X_i le score obtenu lors du i-ème lancer. On suppose que les $(X_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes (et de même loi que X). On pose $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ le score obtenu après n lancers de fléchettes.

c) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.

d) En utilisant l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, montrer que pour tous $1 \leq n < N/2$ on a

$$\mathbb{P}\big(S_n \geq N\big) \leq \frac{2n}{(N - 2n)^2} \, .$$

En déduire que si on lance 80 fléchettes, on a moins d'une chance sur 10 d'obtenir un score supérieur à 200.

Exercice 4. Soit $\alpha > 0$, et (X, Y) un vecteur aléatoire de densité donnée par

$$f_\alpha(x, y) = \frac{c_\alpha}{(xy)^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{\{1<y<x\}} \, .$$

où c_α est une constante.

a) Déterminer la densité marginale de Y.

b) Déterminer la valeur de la constante c_α.

c) Pour quelles valeurs de α la variable aléatoire Y est-elle d'espérance finie ?

On pose $Z = XY$ et $T = X/Y$.

d) Montrer que le vecteur (Z, T) a une densité, que l'on calculera.
On pourra utiliser la méthode de la fonction test, avec le changement de variable $\varphi(x, y) = (xy, x/y)$, qui est un C^1-difféomorphisme de $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < y < x\}$ vers $V = \{(z, t) \in \mathbb{R}^2, 1 < t < z\}$.

e) Donner la densité marginale de Z.

Exercice 5. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,2]$.

a) Justifier que $\ln U$ est intégrable et calculer $\mathbb{E}[\ln U]$.

b) Justifier que, pour $n \geq 0$, $\mathbb{E}\Big[\dfrac{\sin(nU)}{1+nU^3}\Big]$ est bien défini et déterminer sa limite quand $n \to \infty$.
Il n'est pas utile de calculer la valeur exacte de l'espérance.

On pose $h(t) = \mathbb{E}[U^t]$ pour tout $t > -1$.

c) Justifier que $h(t)$ est bien défini pour $t \in]-1, +\infty[$ et montrer que $h(t) = \dfrac{2^t}{1+t}$.

d) En appliquant le théorème de dérivation sous l'intégrale (*justifier*), montrer que $h'(0) = \mathbb{E}[\ln U]$ et retrouver le résultat de la question a).

Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ des v.a. indépendantes, toutes de loi uniforme sur $[0,2]$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} U_k \,,$$

qui est une variable aléatoire positive.

e) Montrer que $\mathbb{E}[\sqrt{X_n}] = \theta^n$, pour une constante $\theta < 1$ dont on donnera la valeur.

f) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(X_n \geq x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\theta^n$.

g) En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

On pose maintenant $Z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n$, qui est bien définie comme somme de variables aléatoires *positives.*

h) Montrer que $\mathbb{E}[Z] = +\infty$.

i) Montrer que $\mathbb{E}[\sqrt{Z}] < +\infty$ et en déduire que $Z < +\infty$ presque sûrement.
On pourra utiliser sans démonstration que $\big(\sum_{n\geq 1} x_n\big)^{1/2} \leq \sum_{n\geq 1} x_n^{1/2}$ *pour tous réels positifs* $(x_n)_{n\geq 0}$.

j) Que peut-on en déduire sur la suite $(X_n)_{n\geq 1}$?

Variables aléatoires discrètes

		$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Bernoulli	$p \in [0,1]$	$\begin{cases} p & \text{si } k=1, \\ 1-p & \text{si } k=0. \end{cases}$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$.	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0,1,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\lambda \in]0,\infty[$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$	λ	λ
Géométrique	$p \in]0,1]$	$p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Uniforme	$\{1,\dots,m\}$	$\frac{1}{m}$, $k \in \{1,\dots,m\}$	$\frac{m+1}{2}$	$\frac{m^2-1}{12}$.

Variables aléatoires à densité

		densité $f_X(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Uniforme	$[a,b]$	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{]a,b[}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\lambda \in]0,\infty[$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in]0,\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2