

---

# Probabilités & Intégration

---

Quentin Berger & Laurent Tournier<sup>1</sup>

Ce document, ainsi que d'autres documents liés au cours, peut être trouvé au format PDF à l'adresse suivante :

[www.math.univ-paris13.fr/~quentin.berger/intepropa](http://www.math.univ-paris13.fr/~quentin.berger/intepropa)



---

1. Polycopié de cours d'après Laurent Tournier.



# Table des matières

<b>PARTIE I — Intégration —</b>	<b>5</b>
<b>CHAPITRE 1 — Préliminaires</b>	<b>7</b>
1.1 Notations . . . . .	7
1.2 Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	7
1.3 Dénombrabilité . . . . .	8
1.4 Sommabilité (de réels positifs) . . . . .	9
1.5 Intégrabilité de fonctions positives usuelles . . . . .	10
1.6 Limite inférieure, limite supérieure . . . . .	11
<b>CHAPITRE 2 — Espace mesurés</b>	<b>13</b>
2.1 Tribus . . . . .	13
2.2 Mesures . . . . .	14
2.3 Fonctions mesurables . . . . .	17
<b>CHAPITRE 3 — Intégration par rapport à une mesure</b>	<b>19</b>
3.1 Intégrale de fonctions mesurables positives . . . . .	19
3.2 Fonctions intégrables . . . . .	23
3.3 Exemples principaux . . . . .	24
3.3.1 Intégrale par rapport à une mesure discrète . . . . .	24
3.3.2 Intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue (et intégrale de Riemann) . . . . .	26
3.3.3 Intégrale par rapport à une mesure à densité . . . . .	28
3.4 Intégrale des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}$ . . . . .	29
<b>CHAPITRE 4 — Quelques outils et résultats importants</b>	<b>31</b>
4.1 Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . .	31
4.2 Espaces de fonctions intégrables . . . . .	33
4.2.1 Espace $L^1$ . . . . .	34
4.2.2 Espace $L^2$ . . . . .	34
4.2.3 Espaces $L^\infty$ . . . . .	36
<b>CHAPITRE 5 — Intégration sur un espace produit, changement de variables</b>	<b>37</b>
5.1 Produit d'espaces mesurés . . . . .	37
5.2 Théorèmes de Fubini . . . . .	38
5.3 Changements de variables . . . . .	39
5.3.1 Intégration et mesure image . . . . .	39
5.3.2 Changements de variables dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	40

<b>CHAPITRE 6 – Fondements des probabilités</b>	<b>45</b>
6.1 Espaces de probabilités . . . . .	45
6.2 Variables aléatoires . . . . .	45
6.2.1 Variables aléatoires discrètes . . . . .	46
6.2.2 Variables aléatoires continues (ou à densité). . . . .	47
6.3 Espérance . . . . .	48
6.4 Variance . . . . .	50
6.5 Vecteurs aléatoires . . . . .	51
<b>CHAPITRE 7 – Indépendance</b>	<b>53</b>
7.1 Indépendance d'événements . . . . .	53
7.1.1 Probabilité conditionnelle . . . . .	53
7.1.2 Événements indépendants . . . . .	54
7.2 Indépendance de variables aléatoires . . . . .	54
7.2.1 Lien avec la loi produit . . . . .	55
7.2.2 Covariance . . . . .	56
7.3 Propriétés de l'indépendance . . . . .	57
<b>CHAPITRE 8 – Caractériser une loi</b>	<b>59</b>
8.1 Fonction de répartition (variables aléatoires réelles) . . . . .	59
8.2 Fonction génératrice (variables aléatoires entières) . . . . .	60
8.3 Méthode de la fonction test (variables à densité) . . . . .	61
8.4 Fonction caractéristique (variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ) . . . . .	62
<b>CHAPITRE 9 – Suites de variables aléatoires</b>	<b>63</b>
9.1 Suites d'événements : deux outils . . . . .	63
9.1.1 Intersection dénombrable d'événements presque sûrs . . . . .	63
9.1.2 Lemme de Borel-Cantelli . . . . .	63
9.2 Loi d'une suite de variables aléatoires . . . . .	65
9.3 Convergence d'une suite de variables aléatoires . . . . .	66
9.3.1 Convergence en probabilité . . . . .	66
9.3.2 Convergence presque sûre . . . . .	67
9.3.3 Convergences $L^1$ et $L^2$ . . . . .	68
9.4 Convergence en loi . . . . .	69
9.4.1 Définition et propriétés . . . . .	69
9.4.2 Théorème central limite . . . . .	70

## En complément, quelques références

- [1] M. Briane, G. Pagès, *Analyse – Théorie de l'intégration*, Vuibert.
- [2] W. Appel, *Probabilités pour les non-probabilistes*, H&K.
- [3] O. Garet, A. Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités*, Ellipses.
- [4] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley.

Première partie

— Intégration —



# Chapitre 1

## Préliminaires

On introduit ici quelques notations pratiques et notamment celle de  $\overline{\mathbb{R}}$ , et on revoit deux notions qui joueront un rôle central dans la suite : la **dénombrabilité** et la **sommabilité**. On rappelle ensuite quelques intégrales ou sommes usuelles. On donne enfin la définition des limites inférieure et supérieure.

### 1.1 Notations

Soit  $E$  un ensemble.

- Si  $A$  est une partie de  $E$  (c'est-à-dire  $A \subset E$ ), on note  $A^c = E \setminus A$  le complémentaire de  $A$ .
- On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .
- Si la famille  $(A_i)_{i \in I}$  de parties de  $E$  est disjointe (c'est-à-dire que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour tous  $i \neq j$  dans  $I$ ), on peut noter  $\bigsqcup_{i \in I} A_i$  leur réunion (le “+” rappelle que les  $A_i$  sont disjoints).
- Si la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties de  $E$  est croissante (c'est-à-dire que  $A_n \subset A_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ), on peut noter  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  leur réunion (la flèche rappelle que la suite est croissante).
- Si la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties de  $E$  est décroissante (c'est-à-dire que  $A_{n+1} \subset A_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ), on peut noter  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  leur intersection (la flèche rappelle que la suite est décroissante).
- Si  $A$  est une partie de  $E$ , on note  $\mathbf{1}_A$  sa fonction indicatrice :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array} \right.$$

On utilisera parfois une extension de cette notation :  $\mathbf{1}_P$  vaudra 1 si la propriété  $P$  est vraie, et 0 sinon. Par exemple, pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $\mathbf{1}_{(x>y)} = \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$ , ou encore  $\mathbf{1}_{(x<y)} = 1$  si  $x < y$  et  $= 0$  sinon.

- Si une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, on peut noter  $\lim_{n \rightarrow \infty}^{\uparrow} u_n$  sa limite (dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ).
- Si une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, on peut noter  $\lim_{n \rightarrow \infty}^{\downarrow} u_n$  sa limite (dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ).

### 1.2 Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On note  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , où  $+\infty$  et  $-\infty$  sont deux points que l'on ajoute à  $\mathbb{R}$ .

#### Ordre

On étend l'ordre de  $\mathbb{R}$  à  $\overline{\mathbb{R}}$  par  $-\infty \leq x \leq +\infty$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi,  $+\infty$  est un majorant de tous les réels, et  $-\infty$  est un minorant de tous les réels.

De l'existence des **bornes inférieures et supérieures** sur  $\mathbb{R}$  on déduit leur existence sur  $\overline{\mathbb{R}}$  : pour  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  non vide,  $\sup A$  est le plus petit majorant de  $A$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , et  $\inf A$  est son plus grand minorant. On ajoutera la convention  $\sup \emptyset = -\infty$  et  $\inf \emptyset = +\infty$ .

Disposant d'un ordre sur  $\overline{\mathbb{R}}$ , on peut considérer, pour  $x \in \mathbb{R}$ , les **intervalles**

$$[x, +\infty[ = ]x, +\infty[ \cup \{+\infty\} = \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid y \geq x\},$$

$$]-\infty, x] = ]-\infty, x] \cup \{-\infty\} = \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid y \leq x\},$$

de même pour  $]x, +\infty[$  et  $] -\infty, x[$ . On a aussi  $[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$ , et on constate que cela est cohérent avec les notations usuelles comme

$$]x, +\infty[ = \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \leq y < \infty\}, \quad \text{ou} \quad ] -\infty, +\infty[ = \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid -\infty < y < \infty\} = \mathbb{R}.$$

Toutefois, dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , on appelle **intervalles ouverts** les intervalles de la forme  $\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$ ,  $\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x > a\}$  et  $\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x < a\}$ , où  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , c'est-à-dire l'intervalle  $\mathbb{R}$ , les intervalles de la forme  $]a, b[$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , et les intervalles de la forme  $]x, +\infty[$  ou de la forme  $] -\infty, x[$ .

## Limites

Avec cette notion généralisée d'intervalle, on peut généraliser la définition de limite de suite : pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , et pour  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , on dit que  $(x_n)_n$  converge vers  $\ell$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  si : pour tout intervalle ouvert  $I$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  contenant  $\ell$ , il existe un rang  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in I$ .

Si la suite  $(x_n)_n$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , cette définition redonne les notions usuelles de limite :

- $x_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$  si et seulement si, pour tous  $a, b$  avec  $a < \ell < b$ , il existe  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $a < x_n < b$ ;
- $x_n \rightarrow +\infty$  si et seulement si, pour tout  $a$ , il existe  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $x_n > a$ ;
- $x_n \rightarrow -\infty$  si et seulement si, pour tout  $a$ , il existe  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $x_n < a$ .

On peut noter que cette notion de convergence est donnée aussi par la distance

$$d(x, y) = |\arctan y - \arctan x|,$$

où la fonction  $\arctan$  est étendue à  $\overline{\mathbb{R}}$  par  $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$  et  $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ .

Avec cette topologie, on peut vérifier que l'espace  $\overline{\mathbb{R}}$  est compact. On se rappelle en effet que toute suite réelle bornée (c.-à-d. contenue dans un segment  $[-a, a]$ ) admet une sous-suite convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass) et on remarque que toute suite non bornée admet une sous-suite qui diverge vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ , donc converge aussi dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

## Opérations

On étend aussi les opérations d'addition et de multiplication à  $\overline{\mathbb{R}}$  de façon naturelle, à l'exception de  $0 \cdot \pm\infty$  et  $(+\infty) + (-\infty)$  qui ne sont pas définies.

## 1.3 Dénombrabilité

### Définition

Un ensemble  $E$  est **dénombrable** si  $E = \emptyset$  ou s'il existe une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$  surjective, c'est-à-dire que

$$E = \varphi(\mathbb{N}) = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots\}.$$

Autrement dit,  $E$  est dénombrable si on peut *énumérer* ses éléments, c'est-à-dire en faire une liste (éventuellement vide, finie ou infinie).

### Exemples.

- les ensembles finis sont dénombrables (si  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ , on a  $E = \varphi(\mathbb{N})$  pour  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$  définie par  $\varphi(i) = x_i$  si  $1 \leq i \leq n$  et  $\varphi(i) = x_n$  pour tout  $i > n$ )
- $\mathbb{N}$  est évidemment dénombrable :  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

**Ex. 1.** Montrer que si  $E$  est un ensemble dénombrable, alors  $E$  est soit fini (ou vide), soit en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

### Autres exemples.

- $\mathbb{Z}$  est dénombrable : par exemple,

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\},$$

où on alterne entiers positifs et négatifs par ordre croissant de valeur absolue.

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$  est dénombrable : par exemple,

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), \dots\},$$

où on énumère les couples dont la somme vaut 0, puis 1, puis 2, etc. (à chaque fois, il y en a un nombre fini).

—  $\mathbb{Q}$  est dénombrable : par exemple, (quitte à répéter certains rationnels plusieurs fois)

$$\mathbb{Q} = \left\{ 0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}$$

où on énumère les fractions dont la somme des valeurs absolues du numérateur et du dénominateur vaut 0, puis 1, puis 2, etc. (il y en a un nombre fini pour une somme donnée), en alternant positifs et négatifs.

—  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable : on peut le démontrer à l'aide de l'*argument de la diagonale* de Cantor. Il suffit de montrer que  $[0,1]$  n'est pas dénombrable (ceci est justifié par la propriété a) suivante). Supposons, par l'absurde, que ce soit le cas : on aurait  $[0,1] = \varphi(\mathbb{N}) = \{\varphi(0), \varphi(1), \dots\}$  pour une fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ . Mais alors on peut facilement donner un réel  $x \in [0,1]$  différent de  $\varphi(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : il suffit que pour tout  $n$ , la  $n$ -ième décimale de  $x$  soit choisie différente de la  $n$ -ième décimale de  $\varphi(n)$ , et différente de 0 et 9 (cette précision évite que  $x$  soit un nombre décimal et ait une écriture non unique :  $0,4999\dots = 0,5000\dots$ ). On obtient donc une contradiction avec le fait que la suite précédente énumère tous les éléments de  $[0,1]$ , d'où il résulte que  $[0,1]$  n'est pas dénombrable.

### Propriétés

- a) Si  $E \subset F$  et  $F$  est dénombrable, alors  $E$  est dénombrable aussi.
- b) Si  $E$  et  $F$  sont dénombrables, alors  $E \times F$  sont dénombrables.
- c) Si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  est dénombrable, alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  est dénombrable.

**Démonstration :** a) Si  $E$  ou  $F$  est vide, c'est vrai. Sinon, on choisit  $x_0 \in E$ , et  $\varphi$  telle que  $F = \varphi(\mathbb{N})$ . Alors  $E = \psi(\mathbb{N})$  où  $\psi(n) = \varphi(n)$  si  $\varphi(n) \in E$  et  $\psi(n) = x_0$  si  $\varphi(n) \notin E$ , ce qui montre que  $E$  est dénombrable.

b) On a vu que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est dénombrable : il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  telle que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \varphi(\mathbb{N})$ . Si  $E$  ou  $F$  est vide,  $E \times F$  aussi, donc est dénombrable. Sinon, il existe  $\varphi_E$  et  $\varphi_F$  telles que  $E = \varphi_E(\mathbb{N})$  et  $F = \varphi_F(\mathbb{N})$ . On a alors  $E \times F = \psi(\mathbb{N})$  où

$$\psi : k \mapsto (\varphi_E(\varphi_1(k)), \varphi_F(\varphi_2(k)))$$

en notant  $\varphi(k) = (\varphi_1(k), \varphi_2(k)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . En effet, pour tous  $x \in E$  et  $y \in F$ , il existe  $m, n$  tels que  $x = \varphi_E(m)$  et  $y = \varphi_F(n)$ , et il existe  $k$  tel que  $\varphi(k) = (m, n)$ , d'où  $(x, y) = (\varphi_E(m), \varphi_F(n)) = (\varphi_E(\varphi_1(k)), \varphi_F(\varphi_2(k))) = \psi(k)$ .

c) On utilise à nouveau la fonction  $\varphi$  ci-dessus, telle que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \varphi(\mathbb{N})$ . On peut supposer que  $E_n \neq \emptyset$  pour tout  $n$  car les ensembles vides ne modifient pas la réunion. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe alors  $\psi_n : \mathbb{N} \rightarrow E_n$  telle que  $E_n = \psi_n(\mathbb{N})$ . Et on a  $\bigcup_n E_n = \xi(\mathbb{N})$ , où

$$\xi : k \mapsto \psi_{\varphi_1(k)}(\varphi_2(k)).$$

En effet, pour tout  $x \in \bigcup_n E_n$ , il existe  $n$  tel que  $x \in E_n$ , donc il existe  $m$  tel que  $x = \psi_n(m)$ , et il existe  $k$  tel que  $(n, m) = \varphi(k)$ , d'où  $x = \xi(k)$ . ■

**Ex. 2.** Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

- a)  $\mathbb{Q}[X]$ , ensemble des polynômes à coefficients rationnels
- b)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , ensemble des nombres irrationnels
- c)  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ , ensemble des suites infinies de 0 et de 1 (*Indication : si on pouvait énumérer toutes ces suites, on pourrait énumérer tous les développements en base 2 des réels dans  $[0,1[...$* )
- d)  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , ensemble des parties de  $\mathbb{N}$  (*Indication : associer à chaque partie  $A \subset \mathbb{N}$  la suite  $(\mathbf{1}_{\{n \in A\}})_{n \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$* )
- e)  $\mathcal{P}_{\text{finie}}(\mathbb{N})$ , ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$

## 1.4 Sommabilité (de réels positifs)

On peut définir la somme de n'importe quelle famille de réels **positifs**, quitte à donner la valeur  $+\infty$  :

### Définition

Pour tout ensemble  $I$  (dénombrable ou non), et toute famille  $(\alpha_i)_{i \in I}$  de réels positifs, la **somme** de la famille  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est donnée par

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \sup_{J \subset I, \text{ fini}} \sum_{i \in J} \alpha_i \in [0, +\infty].$$

Lorsque  $\sum_{i \in I} \alpha_i < \infty$ , on dit que  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est **sommable**.

Si  $I = \mathbb{N}$ , et plus généralement si  $I$  est dénombrable, on peut vérifier que  $\sum_{i \in I} \alpha_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \sum_{i \in I_n} \alpha_i$ , où  $(I_n)_{n \geq 1}$  est n'importe quelle suite croissante de parties finies de  $I$  telle que  $\bigcup_n I_n = I$ . L'hypothèse de dénombrabilité de  $I$  est en fait essentiellement vérifiée pour toutes les familles sommables :

**Proposition**

Soit  $I$  un ensemble. S'il existe une famille  $(\alpha_i)_{i \in I}$  de réels  $> 0$  telle que  $\sum_{i \in I} \alpha_i < \infty$ , alors  $I$  est dénombrable.

**Démonstration :** Supposons  $S = \sum_{i \in I} \alpha_i < \infty$ . Pour tout  $n > 0$ , l'ensemble  $A_n = \{i \in I \mid \alpha_i \geq \frac{S}{n}\}$  contient au plus  $n$  éléments (car  $S \geq \sum_{i \in A_n} \alpha_i \geq \text{Card}(A_n) \cdot S/n$ ), donc en particulier est fini, donc dénombrable, or  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$  si bien que la conclusion vient de la propriété c). ■

## 1.5 Intégrabilité de fonctions positives usuelles

On utilise ici la définition vue en L1-L2 ou CPGE de l'intégrale de fonctions continues (par morceaux) sur un segment, pour revoir certaines intégrales usuelles et des critères d'intégrabilité. Comme dans le cas des sommes, on suppose les fonctions **positives**, ce qui permet de définir leur intégrale sur un intervalle ouvert même si elle diverge :

**Définition**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in [a, +\infty]$ . Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue par morceaux, positive. Alors la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est croissante sur  $[a, b[$ , en raison de la positivité de  $f$ , et en particulier,  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$  existe dans  $[0, \infty]$  : on l'appelle l'**intégrale** de  $f$  sur  $[a, b[$ . Ainsi,

$$\int_{[a, b[} f(t)dt = \lim_{x \uparrow b^-} \int_a^x f(t)dt = \sup_{x \in [a, b[} \int_{[a, x[} f(t)dt \in [0, +\infty].$$

Lorsque  $\int_{[a, b[} f(t)dt < \infty$ , on dit que  $f$  est **intégrable sur**  $[a, b[$ .

Symétriquement, pour  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue par morceaux, on définit  $\int_{]a, b]} f(t)dt = \lim_{x \downarrow a} \int_x^b f(t)dt$ . Enfin, pour  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue par morceaux, on définit  $\int_{]a, b[} f(t)dt = \int_{]a, c]} f(t)dt + \int_{[c, b[} f(t)dt$  où  $c \in ]a, b[$  est arbitraire (la somme ne dépend pas du choix de  $c$ , par la relation de Chasles). Notons que cette intégrale vaut  $+\infty$  dès qu'au moins un des deux termes vaut  $+\infty$ .

**Ex. 3.** Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est-elle intégrable sur  $[1, +\infty[$  ? Sur  $]0, 1]$  ? Sur  $]0, +\infty[$  ?

**Ex. 4.** Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la famille  $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \geq 1}$  est-elle sommable ? Utiliser une comparaison avec  $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ .

**Ex. 5.** Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto e^{\lambda t}$  est-elle intégrable sur  $[0, +\infty[$  ?

**Ex. 6.** La fonction  $x \mapsto -\ln(x)$  est-elle intégrable sur  $]0, 1]$  ?

**Proposition**

Soit  $f, g$  deux fonctions continues par morceaux, positives sur  $[a, b[$  (où  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ).

- a) Si  $0 \leq f \leq g$  et  $g$  est intégrable sur  $[a, b[$ , alors  $f$  aussi, et  $\int_{[a, b[} f(t)dt \leq \int_{[a, b[} g(t)dt$ .
- b) Si  $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  si et seulement si  $g$  est intégrable sur  $[a, b[$ . De plus,

$$\begin{aligned} \text{si elles ne sont pas intégrables,} & \text{ alors } \int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_a^x g(t)dt & \text{(et tend vers } \infty), \\ \text{et si elles sont intégrables,} & \text{ alors } \int_{[x, b[} f(t)dt \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_{[x, b[} g(t)dt & \text{(et tend vers } 0). \end{aligned}$$

Notons que b) est conséquence de a) : si  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $b$  à gauche, alors on a un encadrement  $cf \leq g \leq Cf$  pour des constantes  $c, C > 0$ , au voisinage de  $b$  à gauche, ce qui permet d'utiliser a). De plus  $c$  et  $C$  peuvent être choisies aussi proches de 1 que souhaité, avec  $0 < c < 1 < C$ , d'où les équivalents.

**Ex. 7.** Écrire formellement la démonstration des deux derniers équivalents.

**Ex. 8.** Déterminer si les intégrales suivantes (de fonctions continues, positives) sont finies ou infinies :

$$\int_{]0, \infty[} \frac{dt}{e^t - 1}, \quad \int_{]0, \infty[} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt, \quad \int_{]0, 1]} \cos^2 \frac{1}{t} dt, \quad \int_{]0, 1]} \frac{dt}{1-\sqrt{t}}.$$

## 1.6 Limite inférieure, limite supérieure

Les limites inférieure et supérieure d'une suite de réels sont des outils pratiques pour étudier le comportement asymptotique d'une suite, convergente ou non.

### Définition

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. La **limite inférieure** de la suite  $(x_n)_n$  est

$$\liminf_n x_n = \sup_n \left( \inf_{k \geq n} x_k \right) = \limup_n \left( \inf_{k \geq n} x_k \right) \in \overline{\mathbb{R}}$$

et la **limite supérieure** de la suite  $(x_n)_n$  est

$$\limsup_n x_n = \inf_n \left( \sup_{k \geq n} x_k \right) = \limdown_n \left( \sup_{k \geq n} x_k \right) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

On rappelle qu'une **valeur d'adhérence** d'une suite réelle  $(x_n)_n$  est la limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$  d'une sous-suite convergente  $(x_{\varphi(n)})_n$ .

### Proposition

Pour toutes suites réelles  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$ , on a les propriétés suivantes :

- a)  $\liminf_n x_n$  est la plus petite valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_n$  : il existe une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})_n$  qui converge vers  $\liminf_n x_n$ , et si une sous-suite  $(x_{\psi(n)})_n$  admet une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\liminf_n x_n \leq \ell$ .  
 $\limsup_n x_n$  est la plus grande valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_n$  : il existe une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})_n$  qui converge vers  $\limsup_n x_n$ , et si une sous-suite  $(x_{\psi(n)})_n$  admet une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\ell \leq \limsup_n x_n$ .

b)  $\liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n$

c)  $\limsup_n (-x_n) = -\liminf_n x_n$

- d)  $(x_n)_n$  converge si et seulement si  $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n$ , et dans ce cas

$$\lim_n x_n = \liminf_n x_n = \limsup_n x_n.$$

- e) S'il existe un rang à partir duquel on a  $x_n \leq y_n$ , alors on peut "passer à la  $\liminf$  et  $\limsup$ " :

$$\limsup_n x_n \leq \limsup_n y_n \quad \text{et} \quad \liminf_n x_n \leq \liminf_n y_n.$$

- f) S'il existe une infinité d'entiers  $n$  tels que  $x_n \leq y_n$ , alors

$$\liminf_n x_n \leq \limsup_n y_n.$$

**Démonstration :** On montre juste a). On raisonne pour  $\liminf$ , le cas de  $\limsup$  se traitant symétriquement.

Si  $(x_{\varphi(n)})_n$  est une sous-suite admettant une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  alors pour tout  $n$ , on a clairement  $x_{\varphi(n)} \geq \inf_{k \geq \varphi(n)} x_k$  d'où, en passant à la limite,  $\ell \geq \liminf_n x_n$ .

Construisons maintenant une sous-suite de  $(x_n)_n$  qui converge vers  $\liminf_n x_n$ .

- Si la suite  $(x_n)_n$  n'est pas minorée, alors  $\inf_{k \geq n} x_k = -\infty$  pour tout  $n$ , donc  $\liminf_n x_n = -\infty$ ; et il existe bien une sous-suite de  $(x_n)_n$  qui converge vers  $-\infty$  : définir  $x_{\varphi(0)} = x_0$  puis, pour tout  $n$ , on peut par exemple choisir  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$  tel que  $x_{\varphi(n+1)} < -n$ .
- Supposons maintenant  $(x_n)_n$  minorée, d'où  $\inf_{k \geq n} x_k \in \mathbb{R}$  pour tout  $n$ . On choisit  $\varphi(0) = 0$  puis, pour tout  $n$ , on choisit  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$  tel que  $x_{\varphi(n+1)} < \inf_{k \geq \varphi(n)} x_k + 2^{-n}$  (c'est possible par définition de la borne inférieure). Alors, pour tout  $n$ ,  $x_{\varphi(n+1)}$  est encadré entre  $\inf_{k \geq \varphi(n)} x_k$  et  $\inf_{k \geq \varphi(n)} x_k + 2^{-n}$ , et ces deux suites convergent vers  $\liminf_n x_n \in ]-\infty, +\infty]$ , donc  $x_{\varphi(n+1)} \rightarrow \liminf_n x_n$ . ■

**Ex. 9.** Soit  $(x_n)_n$  une suite réelle. Montrer que, pour tout réel  $a$ , on a  $\liminf_n x_n < a$  si et seulement si il existe  $\delta > 0$  tel que, pour une infinité d'entiers  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n < a - \delta$ ; et que  $\liminf_n x_n > a$  si et seulement si il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $n$  à partir d'un certain rang,  $x_n > a + \delta$ .

# Chapitre 2

## Espace mesurés

On définit ici les composants qui nous serviront de cadre pour la théorie de l'intégration.

### 2.1 Tribus

#### Définition

Soit  $E$  un ensemble. Une **tribu** (ou  $\sigma$ -algèbre) sur  $E$  est un ensemble  $\mathcal{A}$  de parties de  $E$  telle que

(i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;

(ii) si  $A \in \mathcal{A}$ , alors  $A^c \in \mathcal{A}$  (**stabilité par passage au complémentaire**)

(iii) si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de parties dans  $\mathcal{A}$ , alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ; (**stabilité par union dénombrable**)

Le couple  $(E, \mathcal{A})$  est appelé **espace mesurable**. Une partie  $A \in \mathcal{A}$  est dite **mesurable**.

Les conséquences suivantes sont aussi importantes que la définition :

#### Propriétés

a)  $E \in \mathcal{A}$ ;

b) si  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , alors  $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ ;

c) si  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , alors  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$ ;

d) si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de parties dans  $\mathcal{A}$ ,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ; (**stabilité par intersection dénombrable**)

e) si  $A, B \in \mathcal{A}$  et  $A \subset B$ , alors  $B \setminus A \in \mathcal{A}$ .

**Démonstration :** a) résulte de (i) et (ii) car  $E = \emptyset^c$ . b) résulte de (i) et (iii) en prenant  $A_k = \emptyset$  pour tout  $k > n$ . d) résulte de (i) et (iii) car  $\bigcup_n A_n = \left( \bigcap_n (A_n)^c \right)^c$ . c) résulte de d) en prenant  $A_k = E$  pour tout  $k > n$ . e) résulte de (ii) et d) car  $B \setminus A = B \cap A^c$ . ■

**Attention.** Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille de parties mesurables, alors les ensembles  $\bigcup_{i \in I} A_i$  et  $\bigcap_{i \in I} A_i$  sont mesurables à condition que  $I$  soit dénombrable (car on peut écrire  $I = \{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  et donc  $\bigcup_i A_i = \bigcup_n A_{i_n}$ ); mais si  $I$  n'est pas dénombrable, alors ce n'est pas toujours vrai.

#### Exemples.

—  $\mathcal{P}(E)$  est la **tribu discrète** sur  $E$ .

—  $\{\emptyset, E\}$  est la **tribu grossière** sur  $E$ .

#### Définition-proposition

Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble de parties de  $E$ . Il existe une plus petite tribu qui contient  $\mathcal{C}$ . On la note  $\sigma(\mathcal{C})$ , et on l'appelle la **tribu engendrée par  $\mathcal{C}$** .

**Démonstration :** On vérifie que l'intersection d'une famille de tribus est une tribu (exercice). Notamment, l'intersection de toutes les tribus sur  $E$  contenant  $\mathcal{C}$  est une tribu, et c'est la plus petite : elle est incluse dans toute tribu contenant  $\mathcal{C}$ . ■

**Ex. 10.** Si  $A \subset E$ , montrer que la tribu engendrée par  $\{A\}$  est  $\{\emptyset, A, A^c, E\}$ .

### Définition

Sur  $\mathbb{R}^d$ , la **tribu borélienne** est la tribu engendrée par les sous-ensembles ouverts. On la note  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Ses éléments sont les ensembles **boréliens**.

**Ex. 11.** Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Montrer que, pour tout  $x \in O$ , il existe un pavé fermé  $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$  avec  $a_1, b_1, \dots, a_d, b_d \in \mathbb{Q}$ , inclus dans  $O$ , et contenant  $x$ . En déduire que  $O$  est l'union d'une famille dénombrable de pavés fermés. Conclure que  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  est engendré par les pavés fermés de  $\mathbb{R}^d$ .

Ainsi, tout ensemble construit à partir d'intervalles à l'aide des opérations de passage au complémentaire, d'union dénombrable et d'intersection dénombrable, est un borélien de  $\mathbb{R}$ . En pratique, tous les sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  que l'on manipule sont obtenus ainsi et sont donc boréliens (mais attention ! il existe quand même des ensembles non boréliens...).

## 2.2 Mesures

Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable.

### Définition

Une **mesure** sur  $(E, \mathcal{A})$  est une application  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  telle que

(i)  $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties mesurables **disjointes**,  $\mu\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ . ( **$\sigma$ -additivité**)

Le triplet  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  est appelé **espace mesuré**, et  $\mu(E)$  est la **masse totale** de  $\mu$ . On dit que  $\mu$  est **finie** si  $\mu(E) < \infty$ , et que  $\mu$  est une **mesure de probabilité** si  $\mu(E) = 1$ .

Les conséquences suivantes sont aussi importantes que la définition :

### Propriétés

a) Si  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  sont **disjoints**, alors  $\mu(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$ .

b) Si  $A, B \in \mathcal{A}$  et  $A \subset B$ , alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$  et, si  $\mu(A) < \infty$ , alors  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

c) Pour tous  $A, B \in \mathcal{A}$ , et  $\mu(A \cap B) < \infty$ , alors  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ .

d) **Continuité croissante ou par l'intérieur :**

Si  $(A_n)_n$  est une suite croissante de parties mesurables, alors  $\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \limup_n \mu(A_n)$ .

e) **Continuité décroissante ou par l'extérieur :**

Si  $(A_n)_n$  est une suite décroissante de parties mesurables, et  $\mu(A_0) < \infty$ , alors  $\mu\left(\bigsqcap_n A_n\right) = \limdown_n \mu(A_n)$ .

f) **Sous-additivité :** Pour toute suite  $(A_n)_n$  de parties mesurables,  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ .

**Démonstration :** a) résulte de (ii) et (i) en prenant  $A_k = \emptyset$  si  $k > n$

b) On a la réunion disjointe  $B = A \sqcup (B \setminus A)$  donc par a)  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$  car  $\mu$  est à valeurs positives. Si  $\mu(A) < \infty$ , on peut retrancher cette quantité à chaque membre de l'égalité précédente pour obtenir la formule.

c) On a la réunion disjointe  $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$  donc  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B))$  et si  $\mu(A \cap B) < \infty$ , la formule se déduit alors de b).

d) Pour tout  $n$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$  donc par b)  $\mu(A_n) \leq \mu(A_{n+1})$  : la suite  $(\mu(A_n))_n$  est croissante. On pose  $C_0 = A_0$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $C_n = A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{A}$  de sorte que, pour tout  $n$ ,  $A_n = C_0 \sqcup \dots \sqcup C_n$ , et donc  $\bigcup_n A_n = \bigsqcup_n C_n$ . Alors

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_n C_n\right) = \sum_n \mu(C_n) = \limup_N \sum_{n=0}^N \mu(C_n) = \limup_N \mu\left(\bigsqcup_{n=0}^N C_n\right) = \limup_N \mu(A_N).$$

e) En notant  $B_n = A_0 \setminus A_n$ , alors la suite  $(B_n)_n$  est croissante et  $\bigcup_n B_n = A_0 \setminus \bigcap_n A_n$ , ce qui permet de déduire e) de d) à l'aide de b) vu que pour tout  $n$ ,  $A_n \subset A_0$  donc  $\mu(A_n) \leq \mu(A_0) < \infty$ .

f) On pose  $C_0 = A_0$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $C_n = A_n \cap (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})^c \in \mathcal{A}$ , de sorte que les ensembles  $C_n$  sont disjoints et, pour tout  $n$ ,  $A_0 \cup \dots \cup A_n = C_0 \uplus \dots \uplus C_n$  donc  $\bigcup_n A_n = \bigsqcup_n C_n$ . Alors

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(C_n),$$

mais  $C_n \subset A_n$  donc  $\mu(C_n) \leq \mu(A_n)$ , ce qui donne l'inégalité attendue. ■

On peut généraliser la propriété c) au cas de trois ensembles mesurables  $A, B, C \in \mathcal{A}$ . En effet, en appliquant la propriété c) plusieurs fois, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B \cup C) &= \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu((A \cup B) \cap C) = \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

On peut encore généraliser cette identité au cas de  $n$  ensembles mesurables.

**Proposition (Principe d'inclusion-exclusion)**

Pour tous  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=k} \mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

**Exemples.**

— Soit  $E$  un ensemble. Sur  $(E, \mathcal{P}(E))$ , la **mesure de comptage**  $\mu_E$  est définie par :

$$\text{pour tout } A \subset E, \quad \mu_E(A) = \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini.} \end{cases}$$

Ainsi, «  $\mu_E$  place un poids 1 en chaque point de  $E$  ».

— Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable, et  $x \in E$ . La **mesure de Dirac en  $x$**  est la mesure  $\delta_x$  définie par :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{A}, \quad \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} = \mathbf{1}_A(x).$$

Ainsi, «  $\delta_x$  place un poids 1 au point  $x$  »

— Si  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  est une suite de mesures sur  $(E, \mathcal{A})$  et  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels positifs, alors on peut définir la mesure  $\mu = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \mu_n$  par<sup>1</sup>

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \mu_n(A).$$

En particulier, si  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite de points de  $E$ , on peut considérer  $\mu = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \delta_{x_n}$  qui, pour tout  $n$ , « place un poids  $\alpha_n$  en  $x_n$  ». Une telle mesure est appelée une **mesure discrète**.

Le résultat suivant introduit un exemple fondamental :

**Définition-théorème**

Il existe une unique mesure  $\lambda_d$  sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  telle que, pour tout pavé fermé  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ ,

$$\lambda_d([a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]) = |b_1 - a_1| \cdots |b_d - a_d|.$$

On l'appelle **mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$** .

**Démonstration :** Un peu longue : voir les références mentionnées après la table des matières. ■

- sur  $\mathbb{R}$ , la mesure  $\lambda = \lambda_1$  vérifie  $\lambda([a, b]) = b - a$  pour tout segment  $[a, b]$  avec  $a \leq b$ . Cette mesure correspond donc à la *longueur* sur  $\mathbb{R}$ . Le théorème signifie que l'on peut définir la longueur de n'importe quel borélien, et qu'elle vérifie la condition (ii).
- sur  $\mathbb{R}^2$ , la mesure  $\lambda_2$  vérifie  $\lambda_2([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$  pour tout rectangle  $[a, b] \times [c, d]$  avec  $a \leq b$  et  $c \leq d$ . Cette mesure correspond donc à l'*aire* sur  $\mathbb{R}^2$ .
- sur  $\mathbb{R}^3$ , la mesure  $\lambda_3$  correspond de même au *volume*.

1. Le fait que  $\mu$  est bien une mesure nécessite un échange de sommations, qui sera justifié plus tard.

## Propriétés

La mesure de Lebesgue  $\lambda_d$  sur  $\mathbb{R}^d$  est

a) **invariante par translation** : pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  et  $a \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\lambda_d(a + A) = \lambda_d(A),$$

où  $a + A = \{a + x \mid x \in A\}$ .

b) **homogène de degré  $d$**  : pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda_d(tA) = |t|^d \lambda_d(A),$$

où  $tA = \{tx \mid x \in A\}$ .

Vu l'unicité dans la définition de  $\lambda_d$ , il suffit en effet de vérifier ces propriétés lorsque  $A$  est un pavé. Plus généralement, pour montrer que deux mesures sont égales, il suffit de comparer leurs valeurs sur les pavés :

## Proposition

Soit  $\mu, \nu$  deux mesures sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . Si, pour tout pavé fermé  $P$ ,  $\mu(P) = \nu(P) < \infty$ , alors  $\mu = \nu$ .

**Démonstration :** Résultat admis. Pour plus d'informations, voir les références mentionnées en début de poly ; l'outil clé est le *lemme de classe monotone*. ■

## Définition

Soit  $\mu$  une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ .

— Si  $A \in \mathcal{A}$  est tel que  $\mu(A) = 0$ , on dit que  $A$  est **négligeable**.

On peut préciser «  $\mu$ -négligeable », ou « négligeable pour  $\mu$  », si la mesure  $\mu$  n'est pas claire d'après le contexte.

— Si une propriété  $P(x)$  est vraie pour tout  $x \in A$  où

$\mu(A^c) = 0$ , on dit que  $P(x)$  est vraie pour **presque tout**  $x$ , ou encore que  $P$  est vraie **presque partout**.

On peut préciser «  $\mu$ -presque partout », ou « presque partout pour  $\mu$  », si la mesure  $\mu$  n'est pas claire d'après le contexte.

Sans précision, sur  $\mathbb{R}^d$ , « presque tout » fait référence à la mesure de Lebesgue  $\lambda_d$ .

**Ex. 12. (Important)** Montrer que, si  $A$  et  $B$  sont négligeables (pour une mesure  $\mu$ ), alors  $A \cup B$  est négligeable. Généraliser ceci à une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ensembles négligeables.

En déduire que si deux propriétés  $P$  et  $Q$  sont vraies presque partout, alors la propriété «  $P$  et  $Q$  » est vraie presque partout. De même, montrer que si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une propriété  $P_n$  est vraie presque partout, alors la propriété « pour tout  $n$ ,  $P_n$  » est vraie presque partout.

**Ex. 13.** Trouver, sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ , une famille (non-dénombrable)  $(A_i)_{i \in I}$  d'ensembles négligeables telle que  $\bigcup_{i \in I} A_i$  ne l'est pas.

## Définition

Soit  $\mu$  une mesure sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . Le **support** de  $\mu$  est l'ensemble

$$\text{Supp}(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall \varepsilon > 0, \mu(B(x, \varepsilon)) > 0\}.$$

On peut aussi vérifier que support de  $\mu$  est le plus petit fermé de  $\mathbb{R}^d$  dont le complémentaire est  $\mu$ -négligeable : c'est le plus petit fermé qui « porte toute la masse » de  $\mu$ .

**Ex. 14.** Déterminer le support des mesures suivantes sur  $\mathbb{R}$  :

$$\delta_0, \quad \lambda, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \delta_{1/n}.$$

### Définition

Soit  $\mu$  une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ , et  $B \in \mathcal{A}$  un ensemble mesurable. La **restriction de la mesure  $\mu$  à  $B$**  est la mesure  $\mu|_B$  sur  $(E, \mathcal{A})$  définie par :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{A}, \quad \mu|_B(A) = \mu(A \cap B).$$

La **restriction de la tribu  $\mathcal{A}$  à  $B$**  est la tribu  $\mathcal{A}|_B$  sur  $B$  définie par : (de façon équivalente)

$$\mathcal{A}|_B = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}\} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset B\}.$$

On vérifie en effet facilement que  $\mu|_B$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ , et que  $\mathcal{A}|_B$  est une tribu sur  $B$ . Il apparaît donc que  $\mu|_B$ , restreinte à  $\mathcal{A}|_B$ , est aussi une mesure sur  $(B, \mathcal{A}|_B)$ . Ainsi,  $(B, \mathcal{A}|_B, \mu|_B)$  est un espace mesuré. Par exemple, on pourra considérer l'espace  $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{[0,1]}, \lambda|_{[0,1]})$ , qui est de masse finie (égale à 1).

**Ex. 15.** Déterminer le support de la mesure  $\mu = (\lambda_2)|_D$  sur  $\mathbb{R}^2$ , où  $D$  est le disque unité fermé. A-t-on  $\text{Supp}((\lambda_2)|_K) = K$  pour tout fermé  $K$ ? (Penser à  $K$  tel que  $\lambda_2(K) = 0$ )

## 2.3 Fonctions mesurables

Les démonstrations de cette partie se trouvent dans les différentes références mentionnées en début de poly.

### Définition

Soit  $(E, \mathcal{A})$  et  $(F, \mathcal{B})$  des espaces mesurables. Une application  $f : E \rightarrow F$  est **mesurable** si

$$\text{pour tout } B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

### Proposition

- Les fonctions indicatrices  $\mathbf{1}_A$  où  $A \in \mathcal{A}$  sont mesurables.
- Les fonctions continues  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  sont mesurables (pour les tribus boréliennes).

On considèrera souvent des fonctions  $f$  sur  $(E, \mathcal{A})$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , c'est-à-dire que l'on pourra avoir  $f(x) = +\infty$  ou  $f(x) = -\infty$  pour certains  $x \in E$ . La tribu  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  est formée des boréliens de  $\mathbb{R}$  et de tous les ensembles de la forme  $B \cup \{+\infty\}$ ,  $B \cup \{-\infty\}$  et  $B \cup \{+\infty, -\infty\}$ , pour  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Dire que  $f$  est mesurable signifie alors que, pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , et aussi que  $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$  et  $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ .

### Propriétés

Si  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sont mesurables, et si  $(f_n)_n$  est une suite de fonctions mesurables de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , alors

- la valeur absolue  $|f|$  est mesurable ;
- la somme  $f + g$ , le produit  $fg$  sont mesurables ;
- les fonctions  $\sup_n f_n$  et  $\inf_n f_n$  (à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) sont mesurables ;
- les fonctions  $\liminf_n f_n$  et  $\limsup_n f_n$  (à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) sont mesurables ;
- si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = h(x) \in \overline{\mathbb{R}}$  pour tout  $x \in E$ , alors  $h$  est mesurable.

Un rappel sur  $\liminf$  et  $\limsup$  se trouve page 11.

Ainsi, toute fonction de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  obtenue par ces opérations à partir de fonctions continues et de fonctions indicatrices de boréliens est mesurable. En pratique, toutes les fonctions que l'on manipule sont obtenues ainsi et sont donc mesurables pour les tribus boréliennes. De même pour les fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^{d'}$  car :

### Proposition

Une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  est mesurable si et seulement si ses composantes le sont.

Une fonction mesurable de  $E$  vers  $F$  peut se voir comme une façon de « transporter la masse » de  $E$  vers  $F$ . Elle définit donc une nouvelle mesure sur  $F$ , appelée mesure image :

### Définition

Soit  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$  une application mesurable, et  $\mu$  une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ . La **mesure image de  $\mu$**

par  $f$  est la mesure  $f_*\mu$  sur  $F$  donnée par :

$$\text{pour tout } B \in \mathcal{B}, \quad f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

**Ex. 16.** Entre les espaces  $E = \{-2, -1, 0, +1\}$  et  $F = \mathbb{N}$ , munis des tribus discrètes, on considère l'application  $f : E \rightarrow F$  définie par  $f(n) = n^2$  pour tout  $n \in E$ . Quelle est l'image par  $f$  de la mesure de comptage sur  $E$  ?

**Ex. 17.** Quelle est la mesure image de la mesure de Lebesgue par l'application partie entière ?  
Quelle est la mesure image de la mesure de Lebesgue par l'application valeur absolue ?  
Quelle est la mesure image de la mesure de Lebesgue par l'application  $x \mapsto x^3$  ? (On se contentera de calculer la mesure du segment  $[a, b]$ , pour tous réels  $a < b$ , ce qui suffit à caractériser la mesure.)

# Chapitre 3

## Intégration par rapport à une mesure

Dans tout ce chapitre, on se donne un espace mesuré  $(E, \mathcal{A}, \mu)$ .

On souhaite définir l'intégrale  $\int_E f d\mu$  d'une fonction mesurable  $f$  sur l'espace  $E$ , par rapport à la mesure  $\mu$ .

- Dans un premier temps, par analogie avec la notion de sommabilité (Chapitre 0), cela sera possible dès que  $f$  est à valeurs positives, auquel cas on définit  $\int_E f d\mu \in [0, \infty]$ , mais on dira que  $f$  est **intégrable** par rapport à  $\mu$  seulement si cette intégrale est finie.
- Dans un second temps, lorsque  $f$  prend des valeurs de signe quelconque, ou même à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  (ou  $\mathbb{C}$ ), on pourra définir  $\int f d\mu$  à condition que  $|f|$  (ou  $\|f\|$ , dans  $\mathbb{R}^d$ ) soit intégrable, à l'aide d'une construction qui se base sur le cas positif.

### 3.1 Intégrale de fonctions mesurables positives

#### Définition

Une **fonction étagée** sur  $(E, \mathcal{A})$  est une fonction mesurable  $g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Autrement dit, il existe  $n \geq 0$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^*$  distincts (les valeurs non nulles) et  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  disjoints tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(x) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } x \in A_1 \\ \vdots & \\ \alpha_n & \text{si } x \in A_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $g$  est à valeurs positives (c.-à-d. si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ ), on définit l'**intégrale de  $g$  par rapport à  $\mu$**  par :

$$\int g d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \in [0, +\infty].$$

En particulier,

$$\boxed{\int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A)}.$$

**NB.** Une **fonction en escalier** sur  $\mathbb{R}$  est une fonction étagée pour laquelle les ensembles  $A_1, \dots, A_n$  sont des intervalles. Remarquons qu'il y a des fonctions étagées qui ne sont pas en escalier, par exemple  $g = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ . Pour le calcul de l'intégrale, on n'a en fait pas besoin de supposer les  $\alpha_i$  distincts et les  $A_i$  disjoints :

#### Proposition

Pour tous  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty[$  et  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , la fonction  $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$  est étagée, et

$$\int g d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \in [0, \infty],$$

avec la convention que, si  $\alpha_i = 0$  et  $\mu(A_i) = \infty$ , alors  $\alpha_i \mu(A_i) = 0$ .

**Démonstration :** Vu sa définition,  $g$  est mesurable, et toute valeur de  $g$  est une somme d'éléments parmi  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , donc il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles. Ainsi,  $g$  est étagée. En définissant, pour tout  $I \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \notin I} A_i^c$ , les ensembles  $A_I$  sont disjoints, et  $A_i = \bigcup_{I \ni i} A_I$  pour  $i = 1, \dots, n$  donc on a, en utilisant l'additivité de  $\mu$ , en intervertissant les sommes, puis en regroupant les indices  $I$  selon la valeur (notée  $s$ ) de  $\sum_{i \in I} \alpha_i$ ,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{I \ni i} \mu(A_I) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \left( \sum_{i \in I} \alpha_i \right) \mu(A_I) = \sum_{s \in g(E) \setminus \{0\}} s \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} : \\ \sum_{i \in I} \alpha_i = s}} \mu(A_I) = \sum_{s \in g(E) \setminus \{0\}} s \mu(g^{-1}(\{s\})),$$

d'où la proposition car le membre de droite est par définition  $\int g d\mu$ . ■

### Propriétés

Soit  $g, h$  des fonctions étagées positives.

- a) Pour tous réels  $a, b \geq 0$ ,  $\int (ag + bh) d\mu = a \int g d\mu + b \int h d\mu$ .
- b) Si  $g \leq h$ , alors  $\int g d\mu \leq \int h d\mu$ .

**Démonstration :** Si  $g = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$  et  $h = \sum_j \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$  avec  $(A_i)_i$  disjoints et  $(B_j)_j$  disjoints, alors en introduisant les ensembles  $A_{ij} = A_i \cap B_j$ , la fonction  $ag + bh$  prend la valeur  $a\alpha_i + b\beta_j$  sur  $A_{ij}$ , ce qui permet d'obtenir a) (on pourrait aussi utiliser la proposition précédente); et sur  $A_{ij}$  la fonction  $g$  vaut  $\alpha_i$  et  $h$  vaut  $\beta_j$  donc, si  $A_{ij} \neq \emptyset$ ,  $\alpha_i \leq \beta_j$ , ce qui permet d'obtenir b) en sommant. ■

### Définition

Soit  $f : E \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction mesurable positive. L'intégrale de  $f$  par rapport à  $\mu$  est

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{h \text{ étagée,} \\ 0 \leq h \leq f}} \int h d\mu \in [0, +\infty].$$

On utilise aussi les notations suivantes :  $\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) = \int f(x) \mu(dx)$  et on peut spécifier  $\int_E$ .

Comme le montreront les propriétés a) et b) ci-dessous, signalons déjà à titre d'exemple que la fonction  $f = \infty \mathbf{1}_A$  vérifie  $\int f d\mu = 0$  si  $\mu(A) = 0$ , et  $\int f d\mu = \infty$  si  $\mu(A) > 0$ . Ainsi, la définition dans le cas étagé s'étend au cas où certains  $\alpha_i$  sont  $+\infty$ , avec  $\alpha_i \mu(A_i) = 0$  si  $\alpha_i = \infty$  et  $\mu(A_i) = 0$ , et  $\alpha_i \mu(A_i) = \infty$  si  $\alpha_i = \infty$  et  $\mu(A_i) > 0$ .

### Propriétés

Soit  $f, g$  des fonctions mesurables positives.

- a) Si  $f \leq g$ , alors  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ .
- b) Si  $f = 0$  presque partout (pour la mesure  $\mu$ ), alors  $\int f d\mu = 0$ .

**Démonstration :** Si  $f \leq g$ , alors toute fonction étagée  $h$  telle que  $0 \leq h \leq f$  vérifie aussi  $0 \leq h \leq g$ , d'où a) (le sup qui définit l'intégrale de  $g$  porte sur un ensemble plus grand, donc est plus grand).

Si  $f = 0$  presque partout, et  $0 \leq h \leq f$  est étagée, on a  $h = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$  (avec  $A_i$  disjoints) et, si  $\alpha_i > 0$ , on a, pour  $x \in A_i$ ,  $f(x) \geq h(x) = \alpha_i > 0$ , donc  $A_i \subset \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$  d'où  $\mu(A_i) \leq \mu(\{f \neq 0\}) = 0$  et donc  $\mu(A_i) = 0$ ; on déduit que  $\int h d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i) = 0$ . D'où b). ■

### Théorème (Théorème de convergence monotone (TCM))

Soit  $(f_n)_n$  une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int \lim_n \uparrow f_n d\mu = \lim_n \uparrow \int f_n d\mu.$$

**Démonstration :** On note  $f = \lim_n \uparrow f_n$ , qui est une fonction mesurable positive.

• 1<sup>ère</sup> inégalité. Pour tout  $n$ ,  $f_n \leq f_{n+1}$ , d'où  $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu$ . Ainsi, la suite  $(\int f_n d\mu)_n$  est croissante et donc converge (dans  $\bar{\mathbb{R}}$ ). De même, pour tout  $n$ ,  $f_n \leq f$ , d'où  $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ , et en passant à la limite on a

$$\lim_n \uparrow \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

• 2<sup>ème</sup> inégalité. Soit  $h$  une fonction étagée telle que  $0 \leq h \leq f$  et soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire. Pour tout  $x \in E$ , si  $h(x) > 0$ , on a  $\lim_n \uparrow f_n(x) = f(x) \geq h(x) > (1 - \varepsilon)h(x)$  donc il existe  $n$  (grand) tel que  $f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)h(x)$ ; et si  $h(x) = 0$  alors

$f_n(x) = 0$  pour tout  $n$  donc évidemment  $f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)h(x)$ . Autrement dit,

$$E = \bigcup_n E_n, \quad \text{où} \quad E_n = \{x \in E \mid f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)h(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Par définition de  $E_n$ , on a pour tout  $x \in E_n$ ,  $f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)h(x)$ . Par conséquent, comme  $f_n \geq 0$ , on a  $f_n \geq (1 - \varepsilon)h\mathbf{1}_{E_n}$ . Comme  $h$  est étagée, elle s'écrit  $h = \sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ , si bien que  $h\mathbf{1}_{E_n} = \sum_{1 \leq i \leq r} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i \cap E_n}$  est étagée elle aussi et

$$\int f_n d\mu \geq \int (1 - \varepsilon)h\mathbf{1}_{E_n} d\mu = (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Soit  $1 \leq i \leq r$ . La suite  $(A_i \cap E_n)_n$  est croissante (car  $(E_n)_n$  est croissante) et sa réunion est  $A_i$  (car la réunion des  $E_n$  est  $E$ ) donc  $\lim_n \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$ . En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on a donc

$$\lim_n \int f_n d\mu \geq (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu(A_i) = (1 - \varepsilon) \int h d\mu.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, ceci donne

$$\lim_n \int f_n d\mu \geq \int h d\mu.$$

Et ceci vaut pour toute fonction  $h$  étagée telle que  $0 \leq h \leq f$ , donc on a finalement

$$\lim_n \int f_n d\mu \geq \int f d\mu,$$

ce qui conclut la preuve. ■

Par le TCM, pour calculer  $\int f d\mu$ , on peut considérer  $\lim_n \int f_n d\mu$  pour n'importe quelle suite croissante  $(f_n)_n$  de fonctions mesurables positives qui converge vers  $f$ . Par exemple une suite de fonctions étagées :

### Lemme

Si  $f$  est mesurable positive, alors il existe une suite croissante  $(f_n)_n$  de fonctions étagées positives qui converge vers  $f$ .

**Démonstration :** Définissons, pour tout  $n$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{2^n} [2^n \min\{f(x), n\}]$ , ce qui revient à poser

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[)} + n \mathbf{1}_{f^{-1}([n, +\infty[)}.$$

Sur cette dernière écriture, il est manifeste que  $f_n$  est étagée car,  $f$  étant mesurable, les ensembles  $f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[)$  et  $f^{-1}([n, +\infty[)$  sont mesurables. De plus, pour tout  $x \in E$ , pour tout  $n > f(x)$ , on a  $f_n(x) \leq f(x) < f_n(x) + 2^{-n}$ , d'où la convergence de  $f_n$  vers  $f$ . Enfin, le choix d'une subdivision dyadique, c'est-à-dire en intervalles de la forme  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ , assure que, pour tout  $n$ ,  $f_n \leq f_{n+1}$ . En effet, les réels  $\frac{k}{2^n}$  appartenant à l'ensemble qui définit  $f_n(x)$  appartiennent aussi à l'ensemble qui définit  $f_{n+1}(x)$  car  $\frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}}$ . ■

Ceci permet d'étendre certaines propriétés de l'intégrale des fonctions étagées à l'intégrale de fonction mesurables positives quelconques. C'est une méthode illustrée par la propriété suivante, et que l'on retrouvera à de nombreuses reprises.

### Propriétés (Linéarité)

Pour  $f, g$  mesurables positives, et  $a, b$  réels positifs,  $\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$ .

**Démonstration :** Le lemme fournit des suites croissantes  $(f_n)_n$  et  $(g_n)_n$  de fonctions étagées positives qui convergent vers  $f$  et  $g$ . Pour tout  $n$ , par les propriétés de l'intégrale des fonctions étagées positives,

$$\int (af_n + bg_n) d\mu = a \int f_n d\mu + b \int g_n d\mu,$$

ce qui donne l'égalité annoncée en passant à la limite grâce au TCM. ■

Grâce à cette linéarité, le théorème de convergence monotone admet une réécriture en termes de séries :

### Corollaire (Théorème de convergence monotone pour les séries positives)

Si  $(f_n)_{n \geq 0}$  est une suite de fonctions mesurables positives, alors

$$\int \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

**Démonstration :** On applique le TCM à la suite des sommes partielles  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k \geq 0$ , qui est croissante (car  $f_n \geq 0$ ) et converge vers  $S = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ . On a ainsi

$$\int S d\mu = \limup_n \int S_n d\mu.$$

Or, par la propriété de linéarité précédente,

$$\int S_n d\mu = \int \left( \sum_{k=0}^n f_k \right) d\mu = \sum_{k=0}^n \int f_k d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k d\mu$$

d'où la conclusion. ■

### Proposition (Inégalité de Markov)

Pour toute fonction mesurable **positive**  $f$  et tout réel  $a > 0$ ,

$$\mu(\{x \in E \mid f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu.$$

**Démonstration :** L'ensemble  $A = \{x \in E \mid f(x) \geq a\}$  vérifie  $f \geq a\mathbf{1}_A$  (pour  $x \in A$ ,  $f(x) \geq a = a\mathbf{1}_A(x)$ , et pour  $x \notin A$ ,  $f(x) \geq 0 = a\mathbf{1}_A(x)$ ). Par suite, en intégrant,

$$\int f d\mu \geq \int a\mathbf{1}_A d\mu = a\mu(A),$$

ce qui donne l'inégalité. ■

### Corollaire

Soit  $f, g$  des fonctions mesurables **positives**.

- a) Si  $\int f d\mu < \infty$ , alors  $f < \infty$  presque partout.
- b)  $\int f d\mu = 0$  si et seulement si  $f = 0$  presque partout.
- c) Si  $f = g$  presque partout, alors  $\int f d\mu = \int g d\mu$ .

**Démonstration :** a) On suppose  $\int f d\mu < \infty$ . Pour tout  $n$ , on note  $A_n = \{x \in E \mid f(x) \geq n\}$ , et  $A_\infty = \{x \in E \mid f(x) = \infty\}$ . Pour tout  $n$ , on a  $A_\infty \subset A_n$  donc  $0 \leq \mu(A_\infty) \leq \mu(A_n)$ , or par l'inégalité de Markov  $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int f d\mu$ , qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  (vu que l'intégrale est supposée finie). On en conclut donc que  $\mu(A_\infty) = 0$ , ce qu'il fallait démontrer.

b) On suppose  $\int f d\mu = 0$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $A_n = \{x \in E \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$  et  $A_\infty = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ . La suite  $(A_n)_n$  est croissante, et  $A_\infty = \bigcup_n A_n$ . On a donc  $\mu(A_\infty) = \limup_n \mu(A_n)$ . Or l'inégalité de Markov donne  $\mu(A_n) \leq n \int f d\mu = 0$  quel que soit  $n$ , d'où  $\mu(A_\infty) = 0$ , c'est-à-dire que  $f = 0$  presque partout (pour  $\mu$ ). La réciproque a déjà été vue.

c) On suppose  $f = g$  presque partout. En particulier, la fonction  $h = \max(f, g) - \min(f, g)$  est nulle presque partout et **positive** (ce qui n'est peut-être pas le cas de  $f - g$ ), donc  $\int h d\mu = 0$ . En appliquant la propriété de linéarité à  $\max(f, g) = \min(f, g) + h$ , on a alors  $\int \max(f, g) d\mu = \int \min(f, g) d\mu$ . Or  $\min(f, g) \leq f \leq \max(f, g)$  et de même pour  $g$ ; en passant aux intégrales, on voit que  $\int f d\mu$  et  $\int g d\mu$  sont encadrées par  $\int \min(f, g) d\mu$  et  $\int \max(f, g) d\mu$  qui sont égales, donc en particulier  $\int f d\mu = \int g d\mu$ . ■

### Théorème (Lemme de Fatou)

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonction mesurables **positives**. Alors on a

$$\int \left( \liminf_n f_n \right) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

**Démonstration :** On a, par TCM,

$$\int \liminf_n f_n d\mu = \int \limup_n \inf_{k \geq n} f_k d\mu = \limup_n \int \inf_{k \geq n} f_k d\mu.$$

Or, pour tout  $n$ , pour tout  $m \geq n$ ,  $\inf_{k \geq n} f_k \leq f_m$ , donc  $\int \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \int f_m d\mu$ , d'où  $\int \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int f_m d\mu$ . En passant à la limite,

$$\limup_n \int \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \limup_n \inf_{m \geq n} \int f_m d\mu = \liminf_n \int f_n d\mu,$$

ce qui donne le résultat. ■

**NB.** Voici trois exemples de suites  $(f_n)_n$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$  mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \neq 0$  (on a même  $\int_n f_n d\mu = 1$  pour tout  $n$ ). On utilise  $E = \mathbb{R}$ , muni de la mesure de Lebesgue  $\mu = \lambda_1$ .

« bosse voyageuse » :  $f_n = \mathbf{1}_{[n, n+1]}$

« concentration en 0 » :  $f_n = 2n \mathbf{1}_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$

« écrasement » :  $f_n = \frac{1}{2n} \mathbf{1}_{[-n, n]}$ .

## 3.2 Fonctions intégrables

### Définition

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable.  $f$  est **intégrable par rapport à  $\mu$**  si  $\int |f| d\mu < \infty$ .

On définit  $f_+ = \max(0, f)$  et  $f_- = \max(0, -f)$  les parties positive et négative de  $f$ , et on pose alors

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \in \mathbb{R}.$$

On note  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  (ou  $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ , voire  $\mathcal{L}^1(E)$  ou même  $\mathcal{L}^1$  si le contexte précise  $(E, \mathcal{A}, \mu)$ ) l'espace des fonctions intégrables par rapport à  $\mu$ .

**NB.** On a  $|f| = f_+ + f_- \geq f_-$ , ce qui justifie que  $\int f_- d\mu < \infty$  et donne un sens à la soustraction ci-dessus. De même,  $\int f_+ d\mu < \infty$  donc  $\int f d\mu$  est bien réel.

### Propriétés

- Pour toute  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$
- $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace vectoriel, et  $f \mapsto \int f d\mu$  est une application linéaire de  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Pour  $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ , si  $f \leq g$ , alors  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ .
- Pour  $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ , si  $f = g$  presque partout, alors  $\int f d\mu = \int g d\mu$ .

**Démonstration :** a) On a  $f = f_+ - f_-$  et  $|f| = f_+ + f_-$ , donc par inégalité triangulaire,

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \right| \leq \left| \int f_+ d\mu \right| + \left| \int f_- d\mu \right| = \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu = \int (f_+ + f_-) d\mu = \int |f| d\mu.$$

b) On le laisse en exercice (décomposer en parties positives et négatives).

c)  $g = f + (g - f)$  et  $g - f \geq 0$  donc  $\int (g - f) d\mu \geq 0$  et  $\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g - f) d\mu \geq \int f d\mu$ .

d) si  $f = g$  presque partout, alors  $f_+ = g_+$  presque partout et  $f_- = g_-$  presque partout (là où  $f$  et  $g$  sont égales, leurs parties positives et négatives aussi), donc  $\int f_+ d\mu = \int g_+ d\mu$ , de même pour  $f_-$  et  $g_-$  d'où  $\int f d\mu = \int g d\mu$ . ■

### Théorème (Théorème de convergence dominée (TCD))

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions mesurables  $E \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction mesurable  $E \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ;
- il existe  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable telle que  $\int \varphi d\mu < \infty$  et

$$\text{pour tout } n, \text{ pour presque tout } x \in E, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x). \quad (\text{hypothèse de domination})$$

Alors, pour tout  $n$ ,  $f_n \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

**Démonstration :** Le fait que  $f_n$  et  $f$  soient intégrables vient des inégalités  $|f_n| \leq \varphi$  et, à la limite,  $|f| \leq \varphi$ . Elles sont vraies presque partout, dont  $\int |f_n| d\mu \leq \int \varphi d\mu < \infty$  et de même pour  $f$ .

Pour simplifier, supposons (i) et (ii) vrais partout. Les fonctions  $\varphi - f_n$  et  $\varphi + f_n$  sont positives. On peut leur appliquer le lemme de Fatou. Pour  $\varphi - f_n$  :

$$\int \liminf_n (\varphi - f_n) d\mu \leq \liminf_n \int (\varphi - f_n) d\mu \quad (*)$$

Or  $\liminf_n(\varphi - f_n) = \varphi - f$  donc

$$\int \liminf_n(\varphi - f_n)d\mu = \int \varphi d\mu - \int f d\mu.$$

Et aussi

$$\liminf_n \int (\varphi - f_n)d\mu = \int \varphi d\mu - \limsup_n \int f_n d\mu.$$

Ainsi, (\*) donne  $\limsup_n \int f_n d\mu \leq \int f$ , et les mêmes arguments pour  $\varphi + f_n$  donnent  $\liminf_n \int f_n d\mu \geq \int f d\mu$ . Au final,

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \leq \limsup_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu,$$

ce qui montre que tous les termes sont égaux, et en particulier  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$  est égal à  $\int f d\mu$ . ■

On peut alors donner une formule « concrète » de calcul de  $\int f d\mu$  par approximation, qui correspond à la définition évoquée lors de la présentation du cours :

### Corollaire

Soit  $f$  une fonction intégrable positive. Pour toute suite de subdivisions  $0 = \ell_0^{(n)} < \ell_1^{(n)} < \dots < \ell_{N(n)}^{(n)}$  de  $\mathbb{R}$  telle que

$$\max_{0 \leq i < N(n)} (\ell_{i+1}^{(n)} - \ell_i^{(n)}) \xrightarrow{n} 0 \quad \text{et} \quad \ell_{N(n)}^{(n)} \rightarrow +\infty,$$

on a

$$\int f d\mu = \lim_n \sum_{i=1}^{N(n)} \ell_i^{(n)} \mu(f^{-1}([\ell_i^{(n)}, \ell_{i+1}^{(n)}])).$$

**Démonstration :** Il s'agit de montrer que  $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$ , où on a défini les fonctions étagées

$$f_n : x \mapsto \sum_{i=1}^{N(n)} \ell_i^{(n)} \mathbf{1}_{f^{-1}([\ell_i^{(n)}, \ell_{i+1}^{(n)}])}(x) = \begin{cases} \ell_i^{(n)} & \text{si } \ell_i^{(n)} \leq f(x) < \ell_{i+1}^{(n)}, \text{ où } 0 \leq i < N(n) \\ 0 & \text{si } f(x) \geq \ell_{N(n)}^{(n)}. \end{cases}$$

Pour tout  $x \in E$  on a, pour tout  $n$  assez grand,  $f(x) < \ell_{N(n)}^{(n)}$  (par la deuxième condition sur la subdivision), et il existe alors  $i$  tel que  $f_n(x) = \ell_i^{(n)} \leq f(x) < \ell_{i+1}^{(n)}$  d'où

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \ell_{i+1}^{(n)} - \ell_i^{(n)} \leq \max_j (\ell_{j+1}^{(n)} - \ell_j^{(n)}) \xrightarrow{n} 0$$

(par la première condition). Ceci montre que  $(f_n)_n$  converge vers  $f$ . Il reste à prouver une domination.

Or, si  $f(x) < \ell_{N(n)}^{(n)}$ , on a aussi vu que  $f_n(x) \leq f(x)$ . Et si  $f(x) \geq \ell_{N(n)}^{(n)}$ , alors  $f_n(x) = 0 \leq f(x)$ . Donc on a, pour tout  $n$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ . Or on a supposé  $f$  intégrable. On peut donc appliquer le TCD à la suite  $(f_n)_n$ , dominée par  $\varphi = f$ , ce qui conclut. ■

**Notation.** Pour  $A \in \mathcal{A}$ , on note

$$\int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu$$

l'intégrale de  $f$  sur  $A$  par rapport à  $\mu$ , lorsqu'elle a un sens, c'est-à-dire si  $f \mathbf{1}_A$  est positive ou intégrable. Ceci a d'ailleurs un sens même si  $f$  n'est pas définie hors de  $A$  (car  $\mathbf{1}_A$  vaut alors 0). On dit que  $f$  est **intégrable sur  $A$**  si  $\int_A |f| d\mu < \infty$ .

## 3.3 Exemples principaux

### 3.3.1 Intégrale par rapport à une mesure discrète

#### Proposition

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

a) Soit  $x \in E$ . Alors  $f$  est intégrable par rapport à  $\delta_x$  et  $\int f d\delta_x = f(x)$ .

b) Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $E$  et  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels  $\geq 0$ . On pose  $\mu = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \delta_{x_n}$ . Si  $f$  est positive, on a

$$\int f d\mu = \sum_{n \geq 0} \alpha_n f(x_n) \in [0, +\infty].$$

Pour  $f$  de signe quelconque,  $f$  est intégrable par rapport à  $\mu$  si et seulement si  $\sum_n \alpha_n |f(x_n)| < \infty$  et, dans ce cas,

$$\int f d\mu = \sum_{n \geq 0} \alpha_n f(x_n) \in \mathbb{R}.$$

**Démonstration :** a) On a  $f = f(x)\mathbf{1}_{\{x\}}$   $\delta_x$ -presque partout, car ces fonctions coïncident en  $x$ , et  $\delta_x(\{x\}^c) = 0$ . Donc leurs intégrales sont égales :

$$\int f d\delta_x = \int f(x)\mathbf{1}_{\{x\}} d\delta_x = f(x)\delta_x(\{x\}) = f(x)$$

(par la définition de l'intégrale d'une fonction étagée).

b) Soit  $f$  mesurable positive. Posons  $g = f\mathbf{1}_F$  où  $F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Alors  $f = g$  presque partout pour la mesure  $\mu$ . En effet,  $f = g$  sur  $F$ , et  $\mu(F^c) = 0$ . On a donc  $\int f d\mu = \int g d\mu$ . Or on a  $g = \limup_n g_n$  où  $g_n = \sum_{k=0}^n f(x_k)\mathbf{1}_{\{x_k\}}$  donc, par TCM,

$$\int g d\mu = \limup_n \int g_n d\mu = \limup_n \sum_{k=0}^n f(x_k)\mu(\{x_k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k)\alpha_k,$$

d'où l'égalité annoncée. Si  $f$  est de signe quelconque et intégrable, on applique ce qui précède à  $f_+$  et  $f_-$  pour obtenir le résultat. ■

Ainsi, si  $\mu_E$  est la mesure de comptage sur  $E$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\int f d\mu_E = \sum_{x \in E} f(x).$$

**Ex. 18.** Déterminer la limite de la suite de terme général  $I_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{nk^2 + k + 1}$ .

### Corollaire (*Échange de sommations*)

Soit  $(a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$  une famille de réels.

- a) Si, pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{m,n} \geq 0$ , alors  $\sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{m,n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{m,n} \right) \in [0, +\infty]$ .
- b) Si  $\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{m,n}| < \infty$ , alors  $\sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{m,n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{m,n} \right) \in \mathbb{R}$ .

**Démonstration :** a) On a, en notant  $\mu_{\mathbb{N}}$  la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ , par la proposition précédente,

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{m,n} \right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} a_{m,n} d\mu_{\mathbb{N}}(n) = \int_{\mathbb{N}} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{m,n} \right) d\mu_{\mathbb{N}}(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{m,n} \right),$$

où l'égalité du milieu est justifiée par le théorème de convergence monotone pour les séries à termes positifs.

b) Sous l'hypothèse, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_m a_{m,n}$  converge absolument, et on a

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_m |a_{m,n}| d\mu_{\mathbb{N}}(n) = \sum_n \sum_m |a_{m,n}| = \sum_m \sum_n |a_{m,n}| < \infty,$$

où la dernière égalité vient de a). Or la suite  $(S_M)_{M \geq 0}$  définie par  $S_M(n) = \sum_{m=0}^M a_{m,n}$  converge vers  $S(n) = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{m,n}$ ,

et vérifie  $|S_M(n)| \leq \sum_{m=0}^M |a_{m,n}| \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_{m,n}|$  qui est intégrable par ce qui précède. Donc le théorème de convergence dominée donne

$$\int S_M d\mu_{\mathbb{N}} \xrightarrow{M} \int \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{m,n} d\mu_{\mathbb{N}}(n) = \sum_n \sum_m a_{m,n}.$$

Vu que  $\int S_M d\mu_{\mathbb{N}} = \sum_n \sum_{m=0}^M a_{m,n} = \sum_{m=0}^M \sum_n a_{m,n}$  (échange avec une somme finie, simple à justifier par récurrence), la série  $\sum_m \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{m,n} \right)$  converge et a pour somme la limite précédente, ce qui conclut. ■

On peut ainsi enfin prouver qu'une somme infinie de mesures est une mesure, ce qui avait été admis précédemment. Remarquons que la preuve du corollaire précédent n'utilise que la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ , dont on sait déjà qu'elle est une mesure, donc l'argument n'est pas circulaire.

**Corollaire (Somme infinie de mesures)**

Soit  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  une famille de mesures sur  $(E, \mathcal{A})$ .

a) La somme  $\mu = \sum_{n \geq 0} \mu_n$  est une mesure ;

b) Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. Si  $f$  est positive, alors

$$\int f d\mu = \sum_{n \geq 0} \int f d\mu_n \in [0, +\infty]$$

et si  $f$  est de signe quelconque,  $f$  est intégrable par rapport à  $\mu$  si et seulement si  $\sum_n \int |f| d\mu_n < \infty$ , et dans ce cas

$$\int f d\mu = \sum_{n \geq 0} \int f d\mu_n \in \mathbb{R}.$$

**3.3.2 Intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue (et intégrale de Riemann)**

On note  $\lambda = \lambda_1$  (mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ ).

**Rappel.** Soit  $a < b$ . Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable au sens de Riemann** si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des fonctions en escalier  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $[a, b]$  telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon,$$

où l'intégrale de la fonction en escalier  $\psi - \varphi$  est définie de manière élémentaire (comme pour les fonctions étagées avec la mesure de Lebesgue : si  $\varphi = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{]x_i, x_{i+1}[}$  alors  $\int_a^b \varphi = \sum_i \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$ ). Et dans ce cas on note

$$\int_a^b f = \sup_{\substack{\varphi \text{ en escalier,} \\ \varphi \leq f}} \int_a^b \varphi = \inf_{\substack{\psi \text{ en escalier,} \\ f \leq \psi}} \int_a^b \psi$$

**Théorème**

Si  $f$  est intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[a, b]$ , et

$$\int_{[a, b]} f d\lambda = \int_a^b f.$$

**Démonstration :** Comme  $\lambda(]x_i, x_{i+1}[) = x_{i+1} - x_i$  (et  $\lambda(\{x_i\}) = 0$ ), la formule est vraie pour les fonctions en escalier (en comparant à la formule pour l'intégrale des fonctions étagées).

Soit  $f$  une fonction intégrable au sens de Riemann. Les fonctions  $g = \sup\{\varphi \text{ en escalier} \mid \varphi \leq f\}$  et  $h = \inf\{\psi \text{ en escalier} \mid f \leq \psi\}$  sont mesurables,  $g \leq f \leq h$  et  $\int (h - g) d\mu = 0$  donc  $g = h$   $\mu$ -presque partout. Ceci implique que  $f$  est mesurable, si on considère que les sous-ensembles des ensembles négligeables sont mesurables (on parle de tribu complétée) ; pour ce cours, on négligera cette subtilité et on prétendra  $f$  mesurable.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\varphi, \psi$  en escalier telles que  $\varphi \leq f \leq \psi$  et  $\int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon$  (où l'intégrale est au sens de Riemann ou de Lebesgue, par ce qui précède). En particulier  $f$  est bornée donc intégrable sur  $[a, b]$  : on a  $|f| \leq M$  (où  $M = \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty$ ) donc  $\int_{[a, b]} |f| d\mu \leq \int_{[a, b]} M d\mu = (b - a)M < \infty$ . On a (par les propriétés de l'intégrale de Riemann)

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi$$

et aussi (par les propriétés de l'intégrale de Lebesgue)

$$\int_{[a, b]} \varphi d\lambda \leq \int_{[a, b]} f d\lambda \leq \int_{[a, b]} \psi d\lambda.$$

Or  $\int_a^b \varphi = \int_{[a, b]} \varphi d\lambda$  car  $\varphi$  est en escalier, et de même pour  $\psi$ . Ainsi les deux intégrales de  $f$  appartiennent au même intervalle de largeur  $< \varepsilon$ , donc

$$\left| \int_a^b f - \int_{[a, b]} f d\lambda \right| < \varepsilon.$$

Ceci vaut pour tout  $\varepsilon > 0$ , d'où la conclusion. ■

Par suite, si  $I$  est un intervalle, pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable positive, ou intégrable par rapport à  $\lambda$ , on pourra noter

$$\int_I f = \int_I f(x)dx = \int_I f d\lambda,$$

même si  $f$  n'est pas intégrable au sens de Riemann, sans confusion possible. On utilisera aussi la notation usuelle suivante : si  $a < b$ , et si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable positive, ou intégrable par rapport à  $\lambda$ ,

$$\int_{[a, b]} f(x)dx = \int_{]a, b[} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

**NB.** On évitera par contre en général d'utiliser cette notation pour des intégrales par rapport à une mesure quelconque, afin d'éviter des ambiguïtés : on peut avoir  $\int_{[a, b]} f d\mu \neq \int_{]a, b[} f d\mu$  si  $\mu(\{a\}) > 0$ .

On pourra donc, pour des intégrales au sens de Riemann, appliquer les théorèmes précédents (convergence monotone, dominée, etc.), en plus des propriétés déjà connues, telles les suivantes, que l'on redémontre pour rappel.

**Proposition (Théorème fondamental de l'analyse)**

- a) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. La fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est dérivable sur  $[a, b]$ , et sa dérivée est  $F' = f$ . C'est l'unique fonction dérivable sur  $[a, b]$  nulle en  $a$  et dont la dérivée est  $f$ .
- b) Soit  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Notons que la dernière formule reste valide si  $a > b$  avec la convention rappelée plus haut :  $\int_b^a = - \int_a^b$ .

**Démonstration :** a) Soit  $x \in [a, b]$ . Pour tout  $h > 0$  tel que  $x+h \in [a, b]$ , on a  $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f$ , d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy - f(x) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (f(y) - f(x))dy \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(y) - f(x)|dy \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité de  $f$  en  $x$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $y \in [x, x+\delta]$ ,  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ . Ainsi, pour tout  $0 < h < \delta$ ,

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dy = \varepsilon.$$

Ceci montre, si  $x \neq b$ , que  $F$  est dérivable à droite en  $x$ , de dérivée  $f(x)$ . On procède de même pour la dérivée à gauche en partant de  $F(x) - F(x-h) = \int_{x-h}^x f$ .

On a bien sûr  $F(a) = 0$  et on vient de montrer  $F' = f$ . Montrons l'unicité. Soient  $F, G$  deux telles fonctions et posons  $H = G - F$ . On a donc  $H(a) = 0$  et  $H' = 0$ . L'inégalité des accroissements finis implique alors que, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $|H(x)| = |H(x) - H(a)| \leq |x - a| \max_{[a, x]} |H'| = 0$ , donc  $H = 0$  sur  $[a, b]$ , c'est-à-dire  $G = F$ .

b) Par l'unicité prouvée en a), on a nécessairement  $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$  pour tout  $x \in [a, b]$  (les membres de gauche et de droite définissent des fonctions nulles en  $a$  et de dérivée  $F'$ ). En particulier, le cas  $x = b$  donne la formule annoncée. ■

**Corollaire**

- a) (Formule d'intégration par parties) Pour toutes fonctions  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

- b) (Formule de changement de variable sur  $\mathbb{R}$ ) Pour toute fonction continue  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , et toute fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

**Démonstration :** a) Par le point b) de la proposition précédente pour la fonction  $F = uv$ , et parce que  $(uv)' = u'v + uv'$ ,

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

b) Notons  $F$  une primitive de  $f$ , c'est-à-dire que  $F' = f$  (l'existence de  $F$  résulte du début de la proposition précédente). Par dérivation des fonctions composées, on a  $(F \circ \varphi)'(y) = \varphi'(y)F'(\varphi(y)) = \varphi'(y)f(\varphi(y))$ , d'où par la proposition précédente pour les fonctions  $F$  puis  $F \circ \varphi$  : (remarquons que l'on peut avoir  $\varphi(a) > \varphi(b)$ )

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b (F \circ \varphi)'(y)dy = \int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)dy. \quad \blacksquare$$

Rappelons que l'on définit aussi l'intégrale de Riemann sur un intervalle quelconque par passage à la limite dans les bornes d'intégration, lorsque la limite existe. Par la propriété suivante, *si la fonction est intégrable* (on dit aussi *absolument intégrable*) alors on retrouve aussi l'intégrale de Lebesgue. On écrit seulement l'énoncé pour les intervalles  $[a, +\infty[$  mais le résultat est général :

**Proposition**

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable, et  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est positive,

$$\int_{[a, +\infty[} f d\mu = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} f d\mu.$$

Si  $f$  est intégrable par rapport à  $\mu$ , alors la limite précédente reste vraie.

**Démonstration :** Dans le cas positif, c'est une conséquence du théorème de convergence monotone : on a  $\int_{[a, b]} f d\mu = \int f \mathbf{1}_{[a, b]} d\mu$ , or  $b \mapsto \int_{[a, b]} f d\mu$  est croissante et converge vers  $\int_{[a, +\infty[} f d\mu$  en  $+\infty$ . Pour  $f$  intégrable, c'est une conséquence du théorème de convergence dominée avec la domination  $|f \mathbf{1}_{[a, b]}| \leq |f| \mathbf{1}_{[a, +\infty[}$ , intégrable par hypothèse. ■

**Ex. 19.** Dire si les fonctions suivantes sont intégrables sur  $]0, +\infty[$ ,  $]1, +\infty[$  ou  $]0, 1[$  par rapport à la mesure de Lebesgue :  $t \mapsto 1$ ,  $t \mapsto e^{at}$  (où  $a \in \mathbb{R}$ ),  $t \mapsto t^{-\alpha}$  (où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ),  $t \mapsto \ln t$ ,  $t \mapsto \sin t$ ,  $t \mapsto \frac{1}{t \ln^\alpha t}$ .

**Ex. 20.** Déterminer la limite de la suite de terme général  $I_n = \int_0^\infty \frac{e^{-t/n}}{1+t} dt$

**Ex. 21.** Déterminer la limite de la suite de terme général  $J_n = \int_0^\infty \frac{n \sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)} dt$

### 3.3.3 Intégrale par rapport à une mesure à densité

On vérifie facilement avec le TCM que, si  $f$  est positive,  $A \mapsto \int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu$  est une mesure, d'où la définition :

**Définition**

Si  $f$  est une fonction mesurable  $E \rightarrow [0, +\infty]$ , et  $\mu$  une mesure sur  $E$ , la **mesure de densité  $f$  par rapport à  $\mu$**  est la mesure  $f \cdot \mu$  (aussi notée  $f(x)d\mu(x)$ ) définie par :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{A}, \quad (f \cdot \mu)(A) = \int_A f d\mu = \int f \mathbf{1}_A d\mu.$$

**Ex. 22.** Soit  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels positifs, et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $E$ . On considère la mesure discrète  $\mu = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \delta_{x_n}$ . Montrer que, pour toute fonction  $f : E \rightarrow [0, \infty]$ , la mesure  $f \cdot \mu$  est la mesure discrète sur  $E$  donnée par :

$$f \cdot \mu = \sum_{n=0}^\infty f(x_n) \alpha_n \delta_{x_n}.$$

Ainsi, toute mesure à densité par rapport à une mesure discrète reste discrète ; par contre, la définition de mesures à densité par rapport à la mesure de Lebesgue fournit de nombreuses nouvelles mesures intéressantes.

**Ex. 23.** On considère la fonction  $f : x \mapsto x^2 \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , et la mesure  $\nu = f \cdot \lambda$ . Calculer  $\nu([-\infty, x])$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Que vaut  $\nu(\{x\})$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ?

**Ex. 24.** La formule suivante donne une intuition de ce qu'est la densité par rapport à  $\lambda_d$ , lorsqu'elle est régulière. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^d$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . On note  $\mu = f \cdot \lambda_d$ . Montrer que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B(x, \varepsilon))}{\lambda_d(B(x, \varepsilon))}.$$

Ainsi, sur  $\mathbb{R}$  (c.-à-d. pour  $d = 1$ ), on aurait  $f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \mu([x - \varepsilon, x + \varepsilon])$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

### Proposition

Soit  $f$  une fonction mesurable  $E \rightarrow [0, +\infty]$  et  $\mu$  une mesure sur  $E$ .

a) Pour toute fonction mesurable  $g : E \rightarrow [0, +\infty]$ , on a

$$\int g d(f \cdot \mu) = \int g f d\mu = \int g(x) f(x) d\mu(x),$$

b) Une fonction  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable par rapport à  $f \cdot \mu$  si et seulement si  $fg$  est intégrable par rapport à  $\mu$  et, dans ce cas,

$$\int g d(f \cdot \mu) = \int g f d\mu = \int g(x) f(x) d\mu(x).$$

Ceci justifie la notation  $f \cdot \mu = f(x) d\mu(x)$ . Pour la mesure de Lebesgue, vu le lien avec l'intégrale de Riemann, on notera aussi  $f(x) dx$  pour  $f \cdot \lambda$ . Par extension, vu que  $1 \cdot \mu = \mu$ , on pourra parfois noter  $d\mu(x)$  pour désigner la mesure  $\mu$ , et donc  $dx$  pour désigner la mesure de Lebesgue  $\lambda$  (ou  $\lambda_d$ ).

**Ex. 25.** Pour la mesure  $\nu$  de l'exercice 23, calculer  $\int \frac{1}{|x|} d\nu(x)$  et  $\int \frac{1}{x} d\nu(x)$  (et justifier que le manque de définition de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  en 0 n'empêche pas de bien définir son intégrale).

## 3.4 Intégrale des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}$

### Définition

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction mesurable. On dit que  $f$  est **intégrable par rapport**  $\mu$  si  $\int \|f\| d\mu < \infty$ , où  $\|\cdot\|$  est une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^d$ . On pose alors

$$\int f d\mu = \left( \int f_1 d\mu, \dots, \int f_d d\mu \right)$$

où  $f_1, \dots, f_d$  sont les composantes de  $f$  : pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$ .

### Définition

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable.  $f$  est **intégrable par rapport**  $\mu$  si  $\int |f| d\mu < \infty$  (où  $|\cdot|$  est le module dans  $\mathbb{C}$ ). On pose alors

$$\int f d\mu = \int \Re(f) d\mu + i \int \Im(f) d\mu.$$

où  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont les parties réelle et imaginaire de  $f$ .

En particulier, on a donc, si  $\int |f| d\mu < \infty$ ,  $\Re(\int f d\mu) = \int \Re(f) d\mu$  et  $\Im(\int f d\mu) = \int \Im(f) d\mu$ .

Les résultats des parties précédentes restent alors vrais avec cette définition (linéarité et TCD en particulier).

**Ex. 26.** Soit  $\lambda > 0$ . Calculer  $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin t dt$  en écrivant  $\sin t = \Im(e^{it})$ .



# Chapitre 4

## Quelques outils et résultats importants

### 4.1 Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans cette partie, on considère une famille  $(f(t, \cdot))_{t \in I}$  de fonctions, indexée par un intervalle réel  $I$  : plutôt qu'une suite, il s'agit d'un « continuum » de fonctions, que l'on peut aussi voir comme une fonction  $f : I \times E \rightarrow \mathbb{R}$ . Lorsque les fonctions  $f(t, \cdot)$  sont intégrables, on peut considérer la fonction

$$F : t \mapsto F(t) = \int f(t, \cdot) d\mu = \int f(t, x) d\mu(x),$$

que l'on appelle une **intégrale à paramètre** car elle dépend du réel  $t$ , appelé un paramètre. Le théorème de convergence dominée permet alors d'obtenir facilement des résultats de régularité sur  $F$ .

**Théorème (Théorème de passage à la limite sous l'intégrale / TCD pour un paramètre réel)**

Soit  $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$  une fonction mesurable de  $I \times E$  dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}$  (où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ). Soit  $\alpha$  un élément de l'intervalle  $I$  ou une de ses bornes (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) et soit  $g : x \mapsto g(x)$  une fonction mesurable de  $E$  dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose que :

- pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t, x) = g(x)$  ;
- (**domination**) il existe une fonction  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable telle que  $\int \varphi d\mu < \infty$  et, pour tout  $t \in I$ ,

$$\text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \quad |f(t, x)| \leq \varphi(x).$$

Alors les intégrales suivantes sont bien définies et

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \int f(t, x) d\mu(x) = \int g(x) d\mu(x).$$

**Démonstration :** L'existence des intégrales résulte de la domination (en passant à la limite, on voit que la limite est dominée par  $\varphi$  elle aussi). Pour prouver l'interversion entre limite et intégrale, on se ramène au TCD à l'aide de la caractérisation des limites par les suites : rappelons que pour une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t)$  converge vers  $\ell$  quand  $t \rightarrow \alpha$  si et seulement si, pour toute suite  $(t_n)_n$  dans  $I$  qui converge vers  $\alpha$ , la suite  $(f(t_n))_n$  converge vers  $\ell$ . Soit donc  $(t_n)_n$  une suite qui converge vers  $\alpha$ . Les hypothèses du théorème permettent d'appliquer le TCD à la suite des fonctions  $f_n : x \mapsto f_n(x) = f(t_n, x)$ , dominée par  $\varphi$ , pour conclure que

$$\lim_n \int f(t_n, x) d\mu(x) = \int \lim_n f(t_n, x) d\mu(x).$$

D'après la caractérisation des limites par les suites, ceci donne le théorème. ■

**Ex. 27.** On définit la fonction  $I : t \mapsto I(t) = \int_0^\infty \frac{t \sin(\frac{x}{t})}{x(1+x^2)} dx$  sur  $]0, +\infty[$ . Justifier que  $I$  est définie sur cet intervalle et déterminer ses limites quand  $t \rightarrow \infty$  et  $t \rightarrow 0^+$ .

### Théorème (Théorème de continuité sous l'intégrale)

Soit  $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$  une fonction mesurable de  $I \times E$  dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}$  (où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ).

On suppose que :

- **(continuité par rapport au paramètre)** pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $I$  ;
- **(domination)** il existe une fonction  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable telle que  $\int \varphi d\mu < \infty$  et, pour tout  $t \in I$ , pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,

$$\text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \quad |f(t, x)| \leq \varphi(x).$$

Alors la fonction

$$F : t \mapsto F(t) = \int f(t, x) d\mu(x)$$

est bien définie pour tout  $t \in I$ , et est continue sur  $I$ .

**Démonstration :** Ce théorème est une conséquence directe du théorème précédent. En effet, soit  $\alpha \in I$ . Les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées car pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,  $f(t, x)$  converge vers  $f(\alpha, x)$  quand  $t \rightarrow \alpha$  d'après la continuité. Le théorème précédent donne donc

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} F(t) = \int \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} f(t, x) \right) d\mu(x) = \int f(\alpha, x) dx = F(\alpha),$$

ce qui montre que  $F$  est continue en  $\alpha$ . ■

**Ex. 28.** Montrer que la fonction  $I$  de l'exercice 27 est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Ex. 29.** Soit  $(a_n)_n$  une suite de réels telle que  $\sum_n |a_n| < \infty$ . On considère la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx)$ . Démontrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Ex. 30.** On considère la fonction  $F : x \mapsto F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ . Démontrer que  $F$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Peut-on trouver une domination valable pour tout  $x > 0$ ? Commencer par montrer que  $F$  est continue sur  $[a, +\infty[$  où  $a > 0$  est fixé.

### Théorème (Théorème de dérivation sous l'intégrale)

Soit  $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$  une fonction de  $I \times E$  dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose que :

- **(existence de  $F$ )** pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est intégrable ;
- **(dérivabilité par rapport au paramètre)** pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est dérivable sur  $I$ , de dérivée notée  $\frac{\partial f}{\partial t}$  ;
- **(domination de la dérivée)** il existe une fonction  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable telle que  $\int \varphi d\mu < \infty$  et, pour tout  $t \in I$ ,

$$\text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq \varphi(x).$$

Alors la fonction

$$F : t \mapsto F(t) = \int f(t, x) d\mu(x)$$

est dérivable sur  $I$  et, pour tout  $t \in I$ ,

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x).$$

**Démonstration :** Soit  $\alpha \in I$ . Il faut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{F(t) - F(\alpha)}{t - \alpha} = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x).$$

Or par linéarité

$$\frac{F(t) - F(\alpha)}{t - \alpha} = \int \frac{f(t, x) - f(\alpha, x)}{t - \alpha} d\mu(x),$$

et l'hypothèse de dérivabilité donne, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{f(t,x) - f(\alpha,x)}{t - \alpha} = \frac{\partial f}{\partial t}(\alpha,x).$$

La domination nécessaire pour appliquer le TCD (avec paramètre réel) est donnée par l'inégalité des accroissements finis et la troisième hypothèse : pour tout  $t \in I$ , pour presque tout  $x \in E$ ,

$$\left| \frac{f(t,x) - f(\alpha,x)}{t - \alpha} \right| \leq \sup_{u \in [t,\alpha]} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(u,x) \right| \leq \varphi(x),$$

et  $\int \varphi d\mu < \infty$ . On peut donc échanger limite et intégrale et conclure que  $F$  est dérivable en  $\alpha$ . ■

**Remarque :** Si de plus la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$  est continue pour presque tout  $x$ , alors le théorème de continuité montre que  $F'$  est continue, et donc que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

**Deuxième remarque :** Pour montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2, \mathcal{C}^3, \dots$ , on peut appliquer le théorème plusieurs fois. Pour montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on peut montrer par récurrence que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  pour tout  $n$ .

**Ex. 31.** Montrer que la fonction  $F$  de l'exercice 30 est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et donner une expression de sa dérivée (sous forme d'intégrale). Vérifier que  $F$  est solution de l'équation différentielle  $y' = y - \frac{1}{x}$ . Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et donner une expression de ses dérivées successives.

Donnons un exemple de fonction définie par une intégrale à paramètre qui jouera un rôle dans de nombreux autres cours :

### Définition

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. La **transformée de Fourier** de  $f$  est la fonction  $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}f(\xi) = \int f(t)e^{-it\xi} dt.$$

On note aussi cette fonction  $\widehat{f} = \mathcal{F}f$ .

Notons que  $\mathcal{F}f$  est bien définie car  $\int |f(t)e^{-it\xi}| dt = \int |f(t)| dt < \infty$  par intégrabilité de  $f$ .

**Ex. 32.** Montrer les propriétés suivantes :

- 1)  $\widehat{f}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  ;
- 2) si  $\int t|f(t)| dt < \infty$ , alors  $\widehat{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $(\widehat{f})'(\xi) = -i \int t f(t) e^{-it\xi} dt = -i \mathcal{F}(t \mapsto t f(t))(\xi)$  ;
- 3) si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f'$  est intégrable, alors  $(\widehat{f}')(\xi) = i \xi \widehat{f}(\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . (*Intégrer par parties*)

## 4.2 Espaces de fonctions intégrables

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. On rappelle la définition

$$\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int |f| d\mu < \infty \right\},$$

et on peut définir de même  $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, \mathcal{A}, \mu)$  pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Plus généralement, si  $p > 0$ , on note

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

et

$$\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \text{il existe } C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in E \right\},$$

ce dernier étant l'espace des fonctions « bornées presque partout » sur  $E$ .

Comme pour  $\mathcal{L}^1$ , on abrège souvent  $\mathcal{L}^p(E)$  et  $\mathcal{L}^\infty(E)$  si la mesure est donnée par le contexte. En particulier, on notera systématiquement  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ .

### 4.2.1 Espace $L^1$

On note, pour  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ ,

$$\|f\|_1 = \int |f| d\mu.$$

On déduit des propriétés de l'intégrale que :

- pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pour tout  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ ,  $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$
- pour tous  $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ ,  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ .
- pour tout  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ ,  $\|f\|_1 = 0$  si et seulement si  $f = 0$  presque partout.

À cause du dernier point,  $\|\cdot\|_1$  n'est pas une norme : en général, il y a des fonctions non nulles  $f$  telles que  $\|f\|_1 = 0$ . Ceci mène aux définitions suivantes :

#### Définition

On note  $f \sim g$  si  $f = g$  presque partout, qui est une relation d'équivalence, et on définit  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) / \sim$ , c'est-à-dire que l'on obtient  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  en identifiant entre elles les fonctions égales presque partout : les éléments de  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  sont les classes de fonctions égales entre elles presque partout.

Par exemple, l'élément  $0 \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  est l'ensemble des fonctions nulles presque partout.

Puisque deux fonctions égales presque partout ont la même intégrale, on pourra sans ambiguïté noter  $\int f d\mu$  pour  $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  pour désigner l'intégrale de *n'importe quelle* fonction dans la classe  $f$ , et ainsi procéder comme si les éléments de  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  étaient des fonctions, c'est-à-dire que l'on pourra *confondre* un élément de  $L^1$  (une classe de fonctions) et l'un quelconque de ses représentants (l'une de ces fonctions), à ceci près que si  $f, g \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  sont égales presque partout, alors  $f = g$  par définition.

En particulier, si on définit  $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$  pour  $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ , alors on a les mêmes propriétés qu'avant,

et  $\|f\|_1 = 0$  implique  $f = 0$ . Ainsi,  $\|\cdot\|_1$  est une **norme** sur  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  : par l'identification entre elles des fonctions égales presque partout, on s'est ramené à ce qu'une seule « fonction » soit de norme nulle.

Si une suite  $(f_n)_n$  dans  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  converge vers  $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  pour cette norme, c'est-à-dire si  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow [n \rightarrow \infty]0$ , on notera  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1(E, \mathcal{A}, \mu)} f$ , ou plus simplement  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} f$ .

#### Théorème

L'application  $f \mapsto \|f\|_1$  est une norme sur  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ . De plus, muni de cette norme, l'espace vectoriel  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$  est complet. C'est donc un espace de Banach.

On rappelle qu'un espace est **complet** si toute suite de Cauchy dans cet espace converge : si  $(f_n)_n$  est une suite de fonctions dans  $L^1$  telle que  $\sup_{p \geq 0} \|f_{n+p} - f_n\|_1 \rightarrow [n \rightarrow \infty]0$ , alors il existe  $f \in L^1$  telle que  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow [n \rightarrow \infty]0$ .

On donne quelques résultats utiles de densité :

#### Proposition

- a) Les fonctions étagées intégrables sont denses dans  $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ .
- b) Les fonctions en escalier sont denses dans  $L^1(\mathbb{R})$ .
- c) Les fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact sont denses dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

**Ex. 33.** (Lemme de Lebesgue) Montrer que, pour toute  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$\int f(x) \sin(tx) dx \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

On utilisera au choix la densité dans  $L^1(\mathbb{R})$  des fonctions en escalier ou de classe  $C^\infty$  à support compact.

### 4.2.2 Espace $L^2$

On note, pour  $f \in \mathcal{L}^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ ,

$$\|f\|_2 = \left( \int |f|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

Plus généralement, si  $f, g \in \mathcal{L}^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ , la fonction  $fg$  est intégrable puisque  $|fg| \leq \frac{|f|^2 + |g|^2}{2}$  (cette inégalité s'obtient en développant  $(|f| - |g|)^2 \geq 0$ ), et on note

$$\langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu.$$

On montre facilement que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bilinéaire symétrique positive : pour tous  $f, g, h \in \mathcal{L}^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ , et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\langle \lambda f + g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle, \quad \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \quad \text{et} \quad \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2 \geq 0.$$

En revanche,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  n'est pas définie positive :  $\|f\|_2 = 0$  implique  $f = 0$  presque partout, mais pas forcément  $f = 0$ . Donc  $\|\cdot\|_2$  n'est pas une norme, et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  n'est pas un produit scalaire sur  $\mathcal{L}^2(E)$ .

Comme précédemment, on définit  $L^2(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^2(E, \mathcal{A}, \mu) / \sim$ , où  $f \sim g$  lorsque  $f = g$  presque partout, c'est-à-dire que l'on identifie entre elles les fonctions de  $\mathcal{L}^2(E)$  qui sont égales presque partout. On a alors :

### Théorème

Sur l'espace  $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ , l'application  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  est un produit scalaire associé à la norme  $f \mapsto \|f\|_2$ . De plus, muni de ce produit scalaire, l'espace vectoriel  $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$  est complet. C'est donc un espace de Hilbert.

Signalons l'expression que prend l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour toutes fonctions  $f, g \in L^2(E)$ ,

$$\left( \int fg \, d\mu \right)^2 \leq \int f^2 \, d\mu \int g^2 \, d\mu.$$

Les résultats de densité donnés pour  $L^1$  sont aussi valables pour  $L^2$  :

### Proposition

- a) Les fonctions étagées intégrables sont denses dans  $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ .
- b) Les fonctions en escalier sont denses dans  $L^2(\mathbb{R})$ .
- c) Les fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact sont denses dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

La remarque suivante sera très utile en probabilités :

### Proposition

Si  $\mu(E) < \infty$ , alors  $L^2(E) \subset L^1(E)$ .

**Démonstration :** Soit  $f \in L^2(E)$ . Il faut montrer que  $\int |f| \, d\mu < \infty$ . On peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec  $g = 1$  :

$$\left( \int |f| \, d\mu \right)^2 \leq \int |f|^2 \, d\mu \int 1^2 \, d\mu = \|f\|_2^2 \mu(E)$$

et le dernier terme est fini car  $f \in L^2(E)$  et  $\mu(E) < \infty$  par hypothèse. ■

**Ex. 34.** On munit  $\mathbb{R}$  de la mesure de Lebesgue. Démontrer que  $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ .

**Ex. 35.** (Espaces  $\ell^p$ ) On définit  $\ell^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_{\mathbb{N}})$ , où  $\mu_{\mathbb{N}}$  est la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ . C'est donc l'espace des fonctions  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , autrement dit des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs réelles, telles que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p < \infty.$$

1. Quels sont les ensembles négligeables pour  $\mu_{\mathbb{N}}$  ? En déduire que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont des normes sur  $\ell^1$  et  $\ell^2$ .
2. Montrer que  $\ell^1 \subset \ell^2$  et, plus généralement, que  $\ell^p \subset \ell^q$  si  $0 \leq p \leq q$ .

### 4.2.3 Espaces $L^\infty$

On note, pour  $f \in \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)$ ,

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ M > 0 \mid |f| \leq M \text{ } \mu\text{-presque partout} \right\},$$

en se rappelant que l'ensemble ci-dessus est non vide par définition de  $\mathcal{L}^\infty$ . On peut vérifier que :

- pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pour tout  $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ ,  $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$
- pour tous  $f, g \in \mathcal{L}^\infty(E)$ ,  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .
- pour tout  $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ ,  $\|f\|_\infty = 0$  si et seulement si  $f = 0$  presque partout.

À cause du dernier point,  $\|\cdot\|_\infty$  n'est pas une norme : en général, il y a des fonctions non nulles  $f$  telles que  $\|f\|_\infty = 0$ . On définit donc comme précédemment la relation  $\sim$  sur  $\mathcal{L}^\infty$  par  $f \sim g$  si  $f = g$   $\mu$ -presque partout, et

$$L^\infty(E, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{A}, \mu) / \sim .$$

On remarque que, si  $f \sim g$ , alors  $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ , ce qui permet de définir  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $L^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)$ .

#### **Théorème**

*L'application  $f \mapsto \|f\|_\infty$  est une norme sur  $L^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)$  et, muni de cette norme, l'espace vectoriel  $L^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)$  est complet. C'est donc un espace de Banach.*

## Chapitre 5

# Intégration sur un espace produit, changement de variables

Dans tout le chapitre,  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  et  $(F, \mathcal{B}, \nu)$  désignent deux espaces mesurés.

On supposera que  $\mu$  et  $\nu$  sont  $\sigma$ -finies : il existe une suite croissante  $(E_n)_n$  de parties mesurables de  $E$  telle que

$$E = \bigcup_n E_n \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n, \mu(E_n) < \infty,$$

et de même pour  $(F, \mathcal{B}, \nu)$ .

Pour une fonction  $f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut considérer la double intégration  $\int_E \left( \int_F f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$ . On va montrer que l'on peut voir cette double intégration comme une simple intégration sur l'espace  $E \times F$ . Ce point de vue aura l'avantage de mettre en évidence la symétrie des rôles de  $E$  et  $F$ , et donc de montrer que l'on peut intervertir l'ordre entre les intégrales précédentes. Il fournit de plus une façon de construire une mesure sur l'espace  $E \times F$ , qui permettrait de construire la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$  à partir de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  (en partant du fait que l'aire d'un rectangle est le produit des longueurs de ses côtés), et qui jouera aussi un rôle important dans la notion d'indépendance en probabilités.

### 5.1 Produit d'espaces mesurés

On souhaite faire de  $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$  un espace mesuré, c'est-à-dire le munir d'une tribu et d'une mesure, déduites de celles de  $E$  et  $F$ .

#### Définition

La **tribu produit** de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  est la tribu  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  engendrée par les pavés  $A \times B$  où  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{B}$  :

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\left(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\right).$$

Dans le cas des boréliens de  $\mathbb{R}^d$ , cette opération redonne les tribus déjà connues :

#### Proposition

Pour tous  $d, d'$ ,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})$ .

Par suite,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$  en définissant par récurrence une tribu produit de  $d$  tribus.

Pour tout ensemble  $C \subset E \times F$ , on définit ses « tranches » : pour tout  $x \in E$ ,

$$C_x = \{y \in F \mid (x, y) \in C\} \subset F$$

pour tout  $y \in F$ ,

$$C^y = \{x \in E \mid (x, y) \in C\} \subset E.$$

On peut vérifier que, si  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , alors les tranches sont mesurables (dans les espaces respectifs).

#### Définition-théorème

Il existe une unique mesure  $m$  sur  $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  telle que

$$\text{pour tous } A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}, \quad m(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

(avec ici  $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$ ). C'est la **mesure produit** de  $\mu$  par  $\nu$ , notée  $m = \mu \otimes \nu$ .  
De plus, pour tout  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,

$$\mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x) d\mu(x) = \int_F \mu(C^y) d\nu(y).$$

L'existence vient de la dernière formule, qui décrit une intégration « par tranches » : la mesure de  $C$  est l'intégrale des mesures de ses tranches, horizontales ou verticales.

Dans le cas de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ , le produit redonne les mesures déjà connues :

**Proposition**

Pour tous  $d, d'$ ,  $\lambda_d \otimes \lambda_{d'} = \lambda_{d+d'}$ .

Par suite, en notant  $\lambda = \lambda_1$ , on a  $\lambda_d = \lambda \otimes \dots \otimes \lambda = \lambda^{\otimes d}$ , en définissant par récurrence le produit de  $d$  mesures.

**Ex. 36.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable positive. Démontrer que l'aire de la partie de  $\mathbb{R}^2$  comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de  $f$  est égale à l'intégrale de  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lambda_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}).$$

Plus généralement, pour toute fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable, justifier que pour toute mesure  $\mu$  sur  $E$ ,

$$\int_E f(x) d\mu(x) = (\mu \otimes \lambda)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}).$$

**Ex. 37.** En écrivant  $\lambda_3 = \lambda_2 \otimes \lambda_1$ , calculer le volume d'un cône plein  $C$ , dans  $\mathbb{R}^3$ , de sommet  $O = (0,0,0)$  et de base  $A \times \{h\}$  où  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  et  $h > 0$  ( $h$  est donc la hauteur du cône) :

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h \text{ et } (x, y) \in \frac{z}{h} A \right\}.$$

## 5.2 Théorèmes de Fubini

Les propriétés de la mesure produit se transfèrent aisément aux propriétés de l'intégrale et permettent de résoudre la question initiale.

**Théorème (Fubini–Tonelli)**

Pour toute fonction mesurable  $f : E \times F \rightarrow [0, +\infty]$ ,

$$\int_{E \times F} f d(\mu \otimes \nu) = \int_E \left( \int_F f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left( \int_E f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

**Démonstration :** La formule est vraie si  $f = \mathbf{1}_C$  où  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  : c'est le théorème précédent. Par suite, la linéarité de l'intégrale montre qu'elle est vraie pour toute fonction étagée positive. Finalement, si  $f$  est mesurable positive, la formule s'obtient avec plusieurs applications du TCM en écrivant  $f$  comme limite croissante d'une suite  $(f_n)_n$  de fonctions étagées positives (sur  $E \times F$ ). L'autre égalité s'obtient de même en échangeant l'ordre d'intégration.

Pour les détails, on renvoie à l'une des références mentionnée en début de chapitre. ■

En conséquence de ce théorème, on pourra noter  $\int_E \int_F f(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$  sans parenthèses lorsque  $f$  est mesurable positive. Ceci justifie la notation  $d\mu(x) d\nu(y)$  pour la mesure produit  $d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \mu \otimes \nu$ .

**Ex. 38.** On définit la fonction  $\Gamma : a \mapsto \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ . Soit  $a > 0$ . En écrivant que  $t^a = \int_0^\infty au^{a-1} \mathbf{1}_{(0 \leq u \leq t)} du$  dans la définition de  $\Gamma(a+1)$  (et en le justifiant), utiliser le théorème précédent pour démontrer que  $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ .

En appliquant le théorème de Fubini–Tonelli à  $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ , on a le résultat suivant :

**Proposition (Produit de mesures à densité)**

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $g : F \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurables. On a :  $(f \cdot \mu) \otimes (g \cdot \nu) = (f \otimes g) \cdot (\mu \otimes \nu)$ , où  $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$ .  
Autrement dit,

$$(f(x)d\mu(x)) \otimes (g(y)d\nu(y)) = f(x)g(y)d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

On peut aussi écrire la conclusion de la proposition sous la forme naturelle suivante :

$$(f(x)d\mu(x))(g(y)d\nu(y)) = f(x)g(y)d\mu(x)d\nu(y).$$

Dans le cas de  $\mathbb{R}^2$  avec la mesure de Lebesgue, la mesure produit des mesures  $f(x)dx$  et  $g(y)dy$  est donc naturellement  $f(x)g(y)dxdy$ .

En décomposant une fonction  $f$  de signe quelconque en  $f = f_+ - f_-$ , on obtient le résultat suivant :

**Théorème (Théorème de Fubini–Lebesgue)**

Pour toute fonction mesurable  $f$  sur  $E \times F$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}$ , telle que

$$\int_{E \times F} |f(x, y)| d(\mu \otimes \nu)(x, y) < \infty,$$

on a

$$\int_{E \times F} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_E \left( \int_F f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left( \int_E f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

**NB.** Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E \left( \int_F |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \quad \text{ou} \quad \int_F \left( \int_E |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$

**Ex. 39.** Justifier que l'intégrale  $F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$  est bien définie. En écrivant  $\frac{1}{t} = \int_0^\infty e^{-tu} du$ , mettre  $F(x)$  sous la forme d'une intégrale double, et justifier l'interversion des intégrales en utilisant le théorème précédent. En déduire la valeur de  $F(x)$ . On pourra faire appel à l'Exercice 26.

## 5.3 Changements de variables

### 5.3.1 Intégration et mesure image

Soit  $\varphi : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$  une application mesurable. Soit  $\mu$  une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ . On rappelle la définition suivante :

**Définition**

La mesure image de  $\mu$  par  $\varphi$  est la mesure  $\varphi_*\mu$  sur  $F$  donnée par :

$$\text{pour tout } B \in \mathcal{B}, \quad \varphi_*\mu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)).$$

**Théorème (Théorème de transfert)**

a) Pour toute fonction mesurable positive  $f : F \rightarrow [0, +\infty]$ ,

$$\int_F f(y) d(\varphi_*\mu)(y) = \int_E f(\varphi(x)) d\mu(x).$$

b) Pour toute fonction mesurable  $f$  sur  $F$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $f$  est intégrable par rapport à  $\varphi_*\mu$  si et seulement si  $f \circ \varphi$  est intégrable par rapport à  $\mu$  et, dans ce cas,

$$\int_F f(y) d(\varphi_*\mu)(y) = \int_E f(\varphi(x)) d\mu(x).$$

Ce théorème est une formule de changement de variable : elle énonce que si, dans une intégrale en la variable  $x$ , on pose  $y = \varphi(x)$ , alors on remplace la mesure  $d\mu(x)$  par la mesure  $d(\varphi_*\mu)(y)$ . Cette formule n'est pas utile en pratique si on ne connaît pas la mesure image  $\varphi_*\mu$ . On va cependant voir que l'on peut la calculer lorsque  $\mu$  est la mesure de Lebesgue et  $\varphi$  est régulière. De plus, on utilisera très souvent cette formule en probabilités car on supposera justement que la mesure image est connue (ce sera la loi d'une variable aléatoire).

**Démonstration :** a) La formule est vraie si  $f = \mathbf{1}_B$  où  $B \in \mathcal{B}$  : c'est exactement la définition de  $\varphi_*\mu$ . Par suite, la linéarité de l'intégrale montre qu'elle est vraie pour toute fonction étagée positive. Finalement, si  $f$  est mesurable positive, alors  $f = \lim_{\uparrow} f_n$  pour une suite croissante  $(f_n)_n$  de fonctions étagées positives (sur  $F$ ), ce qui donne  $f \circ \varphi = \lim_{\uparrow} f_n \circ \varphi$  et donc, en appliquant le TCM, la formule pour la fonction  $f_n$  fournit à la limite la formule pour  $f$ .

b) Pour  $f$  à valeurs réelles de signe quelconque, appliquer le a) à  $|f|$  donne

$$\int |f|d(\varphi_*\mu) = \int |f \circ \varphi|d\mu,$$

ce qui montre que  $f$  est intégrable par rapport à  $\varphi_*\mu$  si et seulement si  $f \circ \varphi$  est intégrable par rapport à  $\mu$ . Supposons que c'est le cas. On a par définition de l'intégrale puis par a)

$$\int f d(\varphi_*\mu) = \int f_+ d(\varphi_*\mu) - \int f_- d(\varphi_*\mu) \stackrel{a)}{=} \int f_+ \circ \varphi d\mu - \int f_- \circ \varphi d\mu = \int (f_+ - f_-) \circ \varphi d\mu = \int f \circ \varphi d\mu.$$

Pour  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}$ , on applique ce qui précède à chaque composante. ■

### 5.3.2 Changements de variables dans $\mathbb{R}^d$

#### Cas linéaire

##### Proposition

Soit  $M$  une application linéaire  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . On a, pour  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\lambda_d(M(B)) = |\det M| \lambda_d(B).$$

Autrement dit, si  $M$  est inversible,

$$M_*\lambda_d = \frac{1}{|\det M|} \lambda_d.$$

En particulier, pour  $B = [0,1]^d$ , on a l'interprétation suivante du déterminant de  $M$  : c'est le volume du paralléloèdre engendré par les vecteurs colonnes de  $M$ .

Cette proposition permet de faire des changements de variables linéaires : si  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est positive, ou intégrable par rapport à  $\lambda_d$ , le théorème de transfert donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(M(x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)d(M_*\lambda_d)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{1}{|\det M|} dy = \frac{1}{|\det M|} \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

On aura besoin dans la suite du résultat suivant, qui est intéressant en soi :

##### Lemme

Si  $\mu$  est une mesure sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  invariante par translation (c'est-à-dire  $\mu(a + A) = \mu(A)$  pour tous  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  et  $a \in \mathbb{R}^d$ ) et telle que  $\mu([0,1]^d) < \infty$ , alors il existe une constante  $C \geq 0$  telle que  $\mu = C\lambda_d$ .

**Démonstration :** On écrit la preuve pour  $\mathbb{R}^2$ , mais le principe est général. Vu que  $\lambda_2([0,1]^2) = 1$ , posons  $C = \mu([0,1]^2)$  (qui est fini). Par un résultat (admis) du premier chapitre, il suffit de montrer que, pour tout pavé fermé  $P$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mu(P) = C\lambda_2(P)$  ce qui, par l'invariance par translation, se ramène à montrer que, pour tous  $a, b > 0$ ,

$$\mu([0,a] \times [0,b]) = Cab.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , le carré semi-ouvert  $[0,1[$  est l'union disjointe de  $n^2$  carrés semi-ouverts disjoints de côté  $\frac{1}{n}$ , qui ont tous la même mesure pour  $\mu$  du fait de l'hypothèse d'invariance par translation, donc cette mesure est

$$\mu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]^2\right) = \frac{C}{n^2};$$

alors, pour tous entiers  $k, l \geq 0$ ,

$$\mu\left(\left[0, \frac{k}{n}\right] \times \left[0, \frac{l}{n}\right]\right) = kl \frac{C}{n^2} = C \frac{k}{n} \frac{l}{n},$$

en décomposant de même ce rectangle en  $kl$  carrés semi-ouverts disjoints de côté  $\frac{1}{n}$ .

Soit ensuite  $a, b > 0$ . Pour tout  $n$ , on a l'encadrement

$$[0, a_n] \times [0, b_n] \subset [0, a] \times [0, b] \subset \left[0, a_n + \frac{1}{n}\right] \times \left[0, b_n + \frac{1}{n}\right],$$

où  $a_n = \lfloor \frac{na}{n} \rfloor$  et  $b_n = \lfloor \frac{nb}{n} \rfloor$  (approximations de  $a$  et  $b$  de la forme  $\frac{k}{n}$ , par en-dessous) d'où, en prenant la mesure  $\mu$ ,

$$Ca_n b_n \leq \mu([0, a] \times [0, b]) \leq C \left(a_n + \frac{1}{n}\right) \left(b_n + \frac{1}{n}\right)$$

ce qui donne l'égalité annoncée en passant à la limite vu que  $a_n \rightarrow a$  et  $b_n \rightarrow b$ . ■

**Démonstration (de la proposition) :** Si  $M$  n'est pas inversible, l'image de  $M$  est incluse dans un hyperplan  $H$  ; or les hyperplans ont une mesure nulle pour  $\lambda_d$ , donc  $\lambda_d(M(B)) \leq \lambda_d(H) = 0$  pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Puisque  $\det M = 0$  dans ce cas, la formule est vraie. (On pourrait objecter que  $M(B)$  n'est pas toujours borélien, mais cela n'est pas un vrai problème car il est inclus dans  $H$  qui est négligeable et on peut décider dans ce cas d'étendre naturellement  $\lambda_d$  par  $\lambda_d(M(B)) = 0$ )

Supposons  $M$  inversible. Alors  $\lambda_M : A \mapsto \lambda_M(A) = \lambda_d(M(A))$  est une mesure sur  $\mathbb{R}^d$  (c'est la mesure image  $(M^{-1})_* \lambda_d$ ), qui est invariante par translation (par linéarité de  $M$  et invariance par translation de  $\lambda_d$ ). De plus,  $\lambda_M([0, 1]^d) < \infty$  puisque  $M([0, 1]^d)$  est borné. En vertu du lemme précédent,  $\lambda_M$  est multiple de la mesure de Lebesgue.

Il existe donc une constante  $C_M \geq 0$  telle que, pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\lambda_d(M(A)) = C_M \lambda_d(A).$$

Vu que  $\lambda_d([0, 1]^d) = 1$ , on a  $C_M = \lambda_M([0, 1]^d)$ . On note que, pour toutes applications linéaires  $M$  et  $P$ ,

$$C_{MP} = C_M C_P.$$

En effet, pour  $A = [0, 1]^d$ ,  $C_{MP} = \lambda_d(MP(A)) = \lambda_d(M(P(A))) = C_M \lambda_d(P(A)) = C_M C_P \lambda_d(A) = C_M C_P$ .

Notons aussi que, si  $M$  est orthogonale ( ${}^t M M = I_d$ ), alors  $M$  et  $M^{-1}$  préservent les distances, donc  $M$  préserve les boules centrées en 0 : si  $B$  est la boule de rayon 1, alors  $M(B) = B$ , d'où

$$\lambda_d(B) = C_M \lambda_d(B),$$

or  $\lambda_d(B) > 0$ , donc on conclut que  $C_M = 1$  si  $M$  est orthogonale.

De façon générale, si  $M$  est inversible, il existe une matrice orthogonale  $O$  et une matrice symétrique  $S$  telles que  $M = OS$  (c'est la décomposition polaire : si  $S$  est une racine carrée symétrique de la matrice symétrique définie positive  ${}^t M M$ , on vérifie que  $O = M S^{-1}$  est orthogonale). Il existe alors  $P$  orthogonale et  $D$  diagonale telles que  $S = P D P^{-1}$  (diagonalisation de  $S$  en base orthonormale). Ainsi,  $M = O P D P^{-1}$  donc par le cas orthogonal

$$C_M = C_O C_P C_D C_{P^{-1}} = C_D.$$

Comme  $\det M = \det(O P D P^{-1}) = \det D$ , il reste seulement à voir que, dans le cas où  $D$  est diagonale,  $C_D = |\det D|$ . Mais si  $D$  est diagonale, de coefficients diagonaux  $a_1, \dots, a_d$ , alors  $D([0, 1]^d) = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_d]$  donc  $C_D = \lambda_D([0, 1]^d) = |a_1| \cdots |a_d| = |\det D|$ . Ceci conclut la preuve. ■

## Cas des $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes

On a vu que l'image de  $\lambda_d$  par une application linéaire bijective  $M$  est  $\frac{1}{|\det M|} \lambda_d$ . Dans le cas de l'image par une application *non linéaire*  $\varphi$ , on peut néanmoins vouloir appliquer *localement* le cas linéaire. En effet, une application  $\varphi : U \rightarrow D$  (où  $U$  et  $D$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ) est **différentiable** si, près de chaque point  $x \in U$ , elle peut s'approcher par une application linéaire  $d\varphi_x$  appelée sa différentielle :

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + d\varphi_x(h) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(|h|).$$

L'application linéaire  $d\varphi_x$  a pour matrice la **matrice jacobienne** de  $\varphi = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq d}$  en  $x$  :

$$\text{Jac}_\varphi(x) = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq d},$$

et son déterminant est le **jacobien** de  $\varphi$  en  $x$  :

$$J_\varphi(x) = \det(\text{Jac}_\varphi(x)).$$

Par le cas linéaire, on s'attend à ce que l'image de  $\lambda_d$  par  $\varphi$  soit, au voisinage de  $y = \varphi(x)$ , proche de  $\frac{1}{|J_\varphi(x)|} \lambda_d = |J_{\varphi^{-1}}(y)| \lambda_d$  (à condition que  $J_\varphi(x) \neq 0$ ). Puisque le facteur  $|J_{\varphi^{-1}}(y)|$  dépend du point  $y$  près duquel on considère la mesure, cela suggère que la mesure image est (partout) la mesure à densité  $|J_{\varphi^{-1}}(z)| d\lambda_d(z)$  et donc, en intégrant, que  $\int f(\varphi(x)) dx = \int f(y) |J_{\varphi^{-1}}(y)| dy$ . Ceci est justifié si  $\varphi : U \rightarrow D$  est un  **$\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme**, c'est-à-dire que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , bijective, et que  $\varphi^{-1}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  (la dernière condition revient aussi à dire que  $J_\varphi(x) \neq 0$  pour tout  $x \in U$ ) :

**Théorème (Théorème de changement de variable dans  $\mathbb{R}^d$ )**

Soit  $U, D$  des ouverts de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, et  $\varphi : U \rightarrow D$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

a) Si  $f$  est positive, alors

$$\int_D f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)| dx$$

et

$$\int_U f(\varphi(x)) dx = \int_D f(y) |J_{\varphi^{-1}}(y)| dy.$$

b) Si  $f$  est intégrable sur  $D$ , la première égalité précédente a un sens (autrement dit,  $u \mapsto f(\varphi(u)) |J_\varphi(u)|$  est intégrable sur  $U$ ) et est vraie. Si  $f \circ \varphi$  est intégrable sur  $U$ , alors il en est de même de la deuxième.

c) En particulier, la mesure image de  $\lambda_d$  par  $\varphi$  est la mesure de densité  $|J_{\varphi^{-1}}|$  par rapport à  $\lambda_d$  :

$$\varphi_*(\lambda_d)|_U = |J_{\varphi^{-1}}| \cdot (\lambda_d)|_D.$$

(Ici,  $(\lambda_d)|_D$  est la restriction de  $\lambda_d$  à  $D$ , puisque  $\varphi$  n'est définie que sur  $D$ )

**Ex. 40.** On rappelle la définition de la fonction  $\Gamma : a \mapsto \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$  sur  $]0, +\infty[$ . Pour  $a, b > 0$ , écrire le produit  $\Gamma(a)\Gamma(b)$  comme une intégrale sur  $]0, +\infty[^2$  en les variables  $x$  et  $y$ , et effectuer le changement de variables  $x = uv, y = u(1-v)$ . En déduire que

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

où  $B(a,b)$  est la fonction Bêta d'Euler  $B(a,b) = \int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1} dv$ .

**Ex. 41.** Soit  $a, b > 1$ . Calculer l'aire de l'ouvert  $D$  délimité par les courbes d'équation  $y = ax, y = x/a, y = b/x$  et  $y = 1/(bx)$  et contenant le point  $(1,1)$ . On posera  $x = u/v$  et  $y = uv$ .

Deuxième partie

— Probabilités —



# Chapitre 6

## Fondements des probabilités

L'objectif de ce chapitre est de constater que la théorie de l'intégration développée dans la première partie du cours fournit un cadre rigoureux pour les probabilités. La théorie sera donc la même, mais l'interprétation en est différente : on cherche à fournir un modèle mathématique pour une « expérience aléatoire ». Une première partie va donc consister à relire les résultats de théorie de l'intégration en ayant en tête cette intuition. Ceci va de pair avec un nouveau vocabulaire, que l'on va commencer par introduire.

### 6.1 Espaces de probabilités

#### Définition

Un **espace de probabilités** (ou espace probabilisé) est un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  où la mesure  $P$  a pour masse totale 1 :

$$P(\Omega) = 1.$$

On appelle  $P$  une **probabilité**, ou une **mesure de probabilité**. L'ensemble  $\Omega$  est parfois appelé l'**univers**, ou l'**espace des éventualités**. Les parties mesurables  $A \in \mathcal{A}$  sont appelés des **événements**. Un événement est **presque sûr** si  $P(A) = 1$  ; on dit aussi que  $A$  est réalisé **presque sûrement** (en abrégé, *p.s.*).

Une interprétation en est la suivante :

- $\Omega$  représente l'ensemble de toutes les éventualités possibles dans l'expérience aléatoire considérée (on parle aussi de l'ensemble des *réalisations* possibles du hasard).
- $\mathcal{A}$  est l'ensemble des « événements », c'est-à-dire des ensembles d'éventualités dont on peut évaluer la probabilité.
- Pour  $A \in \mathcal{A}$ ,  $P(A)$  représente la probabilité d'occurrence de l'événement  $A$ . On peut s'en faire diverses intuitions, qui pourront être justifiées par la théorie qui va suivre :
  - un point de vue *a priori*, où par exemple des considérations de symétrie ou un calcul lié aux propriétés physiques de l'expérience permettent de justifier la répartition des probabilités (par exemple, pour un dé équilibré, l'occurrence de chaque face devrait avoir même probabilité, donc  $1/6$ ) ;
  - un point de vue *a posteriori*, où  $P(A)$  est vu comme la fréquence asymptotique de réalisation de l'événement  $A$  si on répète l'expérience un grand nombre de fois (par exemple, si on tire le même dé un grand nombre de fois, on observe que chaque face apparaît en moyenne approximativement lors de  $1/6$  des tirages).

On pourra appliquer toutes les propriétés des mesures, comme la  $\sigma$ -additivité, la continuité croissante ou décroissante, la sous-additivité, le principe d'inclusion-exclusion : on renvoie à la Section 2.2 (en prenant  $\mu = P$ ).

**NB.** Malgré l'importance théorique de l'espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , on verra dans la suite qu'une particularité fondamentale de la théorie des probabilités est qu'il ne sera souvent pas nécessaire de spécifier l'espace de probabilités car on ne le verra qu'à travers les variables aléatoires.

Dans toute la suite, on se donne un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

### 6.2 Variables aléatoires

#### Définition

Une **variable aléatoire** (en abrégé, *v.a.*) est une application mesurable  $X : \Omega \rightarrow E$ , où  $(E, \mathcal{E})$  est un espace mesurable.

On précisera parfois variable aléatoire à valeurs dans  $E$ , et on parle de **variable aléatoire réelle** si l'espace d'arrivée est  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

La définition suivante est fondamentale.

### Définition

La **loi** d'une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow E$  est la mesure image de  $P$  par  $X$ . C'est donc la mesure de probabilité  $P_X$  sur  $(E, \mathcal{E})$  donnée par

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) \quad \text{pour } B \in \mathcal{E}.$$

On dit que  $X$  **suit la loi**  $\mu$  (et on abrège parfois  $X \sim \mu$ ) si la loi de  $X$  est  $\mu$ .

**Notation pratique.** On utilisera en général la notation  $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$ , de sorte que la définition s'écrit

$$P_X(B) = P(X \in B).$$

De même, on écrira par exemple, pour une variable aléatoire réelle  $X$ ,  $\{\sin(X) \geq 0\} = \{\omega \in \Omega \mid \sin(X(\omega)) \geq 0\}$ .

### Proposition

Si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur un ensemble  $(E, \mathcal{E})$ , il existe un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow E$  dont la loi est  $\mu$ .

**Démonstration :** Le plus simple est de choisir  $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (E, \mathcal{E}, \mu)$ , et  $X = \text{Id}_E$ . C'est ce qu'on appelle l'espace canonique. ■

**NB.** En raison de ce résultat, toute mesure de probabilité peut être vue comme la loi d'une certaine variable aléatoire et on aura donc tendance à utiliser le mot « loi » pour parler d'une mesure de probabilité, sans qu'elle soit nécessairement associée à une variable aléatoire particulière.

Deux familles de lois méritent une attention particulière : les lois dites discrètes et continues. *Attention, ce ne sont que des cas particuliers et de nombreuses lois ne sont ni discrètes ni continues.*

## 6.2.1 Variables aléatoires discrètes

### Définition

Une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow E$  est **discrète** s'il existe un ensemble dénombrable  $D \subset E$  tel que, presque sûrement,  $X \in D$ .

Par abus de langage, on dira que  $X$  est à valeurs dans  $D$ .

Cette définition dépend seulement de la loi de  $X$ , et revient à dire que  $P_X$  est une mesure discrète. En effet, pour tout  $B \in \mathcal{E}$ ,

$$P_X(B) = P(X \in B) = P(\{X \in B \cap D\} \uplus \{X \in B \cap D^c\}) = P(X \in B \cap D) + P(X \in B \cap D^c)$$

et  $P(X \in B \cap D^c) \leq P(X \in D^c) = 0$  donc

$$P_X(B) = P(X \in B \cap D) = P\left(\bigsqcup_{x \in B \cap D} \{X = x\}\right) = \sum_{x \in B \cap D} P(X = x),$$

c'est-à-dire que

$$P_X = \sum_{x \in D} p_x \delta_x, \quad \text{où } p_x = P(X = x) \text{ pour } x \in D.$$

Si  $X$  est une variable discrète, se donner la loi de  $X$  revient donc à se donner les valeurs  $p_x = P(X = x)$  pour  $x \in D$ , dont la somme vaut 1 :

$$1 = P(X \in D) = \sum_{x \in D} P(X = x) = \sum_{x \in D} p_x.$$

**Ex. 42.** On lance deux dés à six faces. Donner la loi de la somme des deux résultats.

### Définition

— Si  $E$  est un ensemble, et  $x \in E$ , la **loi de Dirac en  $x$**  est la loi d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs

dans  $E$  telle que

$$P(X = x) = 1.$$

On dit que  $X$  est constante (p.s.). Ce n'est donc pas une variable « aléatoire » mais plutôt « déterministe ».

- Si  $E$  est un ensemble fini, de cardinal  $|E| = n$ , la **loi uniforme sur  $E$**  est la loi d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $E$  telle que

$$\text{pour tout } x \in E, \quad P(X = x) = \frac{1}{n}.$$

C'est un choix naturel dans les situations où les différentes issues de l'expérience jouent des rôles symétriques.

- La **loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0,1]$**  est la loi (notée  $\mathcal{B}(p)$ ) d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\{0,1\}$  telle que

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

On peut voir  $X$  comme le résultat du lancer d'une pièce biaisée ayant probabilité  $p$  de tomber sur pile.

## 6.2.2 Variables aléatoires continues (ou à densité).

### Définition

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est **continue**, ou à **densité**, si sa loi admet une densité  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue. La fonction  $f$  est appelée la **densité** de  $X$ . Autrement dit,  $X$  a pour densité  $f$  si la fonction  $f$  est mesurable positive et vérifie, pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,

$$P_X(A) = P(X \in A) = \int_A f(x)dx = \int \mathbf{1}_A(x)f(x)dx,$$

et donc en particulier  $\int f(x)dx = P(X \in \mathbb{R}^d) = 1$ .

Ainsi, une fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une densité si et seulement si  $f$  est positive et  $\int f(x)dx = 1$ .

### Propriétés

Si  $X$  est une variable aléatoire de densité  $f$ , alors

- pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $P(X = x) = 0$ . Autrement dit, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , presque sûrement,  $X \neq x$ .
- presque sûrement,  $X \in \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > 0\}$ .
- si  $X$  a aussi pour densité  $g$ , alors  $f = g$  presque partout.

**Démonstration :** a) On a  $\lambda_d(\{x\}) = 0$ , donc  $f\mathbf{1}_{\{x\}} = 0$  presque partout, d'où

$$P(X = x) = \int_{\{x\}} f(t)dt = \int f(t)\mathbf{1}_{\{x\}}(t)dt = 0.$$

b) Si  $f$  est nulle sur  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  (autrement dit,  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in B$ ), alors  $P(X \in B) = \int_B f(t)dt = 0$  donc p.s.,  $X \in B^c$ . Le résultat correspond au cas où  $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\}$ , car  $f$  est évidemment nulle sur  $B$ .

c) L'ensemble  $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > g(x)\}$  vérifie  $P(X \in B) = \int \mathbf{1}_B(x)f(x)dx = \int \mathbf{1}_B(x)g(x)dx$  d'où

$$0 = \int \mathbf{1}_B(x)(f(x) - g(x))dx,$$

or la fonction dans l'intégrale est positive, donc elle est nulle presque partout. Comme  $\mathbf{1}_B(x)(f(x) - g(x)) > 0$  si  $x \in B$ , on en déduit que  $\lambda_d(B) = 0$ . On a donc  $f(x) \leq g(x)$  pour presque tout  $x$ . De même par symétrie  $g(x) \leq f(x)$  pour presque tout  $x$ , donc  $f = g$  presque partout. ■

### Définition

- La **loi uniforme sur  $[a,b]$**  (où  $a < b$ ) est la loi (notée  $\mathcal{U}([a,b])$ ) de densité

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

(Si  $X$  suit la loi uniforme sur  $[a,b]$ , alors  $X \in [a,b]$  p.s.)

- Plus généralement, si  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  est tel que  $0 < \lambda_d(A) < \infty$ , la **loi uniforme sur  $A$**  est la loi (notée  $\mathcal{U}(A)$ ) de densité

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbf{1}_A(x).$$

(Si  $X$  suit la loi uniforme sur  $A$ , alors  $X \in A$  p.s.)

- La **loi exponentielle de paramètre sur  $\lambda \in ]0, +\infty[$**  est la loi (notée  $\mathcal{E}(\lambda)$ ) de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

(Si  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , alors  $X > 0$  p.s.)

- La **loi normale (ou gaussienne) de moyenne  $m \in \mathbb{R}$  et de variance  $\sigma^2 \in ]0, +\infty[$**  est la loi (notée  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ) de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

L'appellation est justifiée en vérifiant que  $m$  est la moyenne et  $\sigma^2$  la variance de cette loi (voir plus loin).

La loi  $\mathcal{N}(0,1)$ , appelée loi normale standard, a donc pour densité  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

**Ex. 43.** Soit  $r > 0$ . Soit  $Z$  une variable aléatoire de loi uniforme dans le disque  $D$  de centre  $(0,0)$  et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On note  $R$  la distance entre  $(0,0)$  et  $Z$ .

1. Montrer que, pour tous  $a, b$  tels que  $0 \leq a \leq b \leq r$ ,  $P(R \in [a, b]) = \int_a^b \frac{2t}{r^2} dt$ .
2. En déduire que  $R$  suit la loi de densité  $f : t \mapsto f(t) = \frac{2t}{r^2} \mathbf{1}_{[0, r]}(t)$ .

**Ex. 44.** Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0,1]$ . On pose  $X = \max(U, \frac{1}{2})$ .

1. Calculer  $P(X = \frac{1}{2})$ , et en déduire que  $X$  n'a pas de densité.
2. Justifier que  $X$  n'est pas discrète.

## Tribu engendrée

### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ . La **tribu engendrée** par  $X$  est

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{A}.$$

C'est la tribu sur  $\Omega$  qui contient tous les événements qui ne dépendent que de  $X$ . La proposition suivante montre que, de même, les fonctions mesurables par rapport à  $\sigma(X)$  sont celles qui ne dépendent que de  $X$  :

### Proposition

Soit  $X, Y$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ . La v.a.  $Y$  est mesurable par rapport à  $\sigma(X)$  si et seulement s'il existe une fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $Y = f(X)$  p.s.

## 6.3 Espérance

### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Son **espérance** est son intégrale :

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega),$$

ce qui, en tant qu'intégrale d'une fonction mesurable, est bien défini dans les deux cas suivants :

- si  $X \geq 0$  (et dans ce cas  $E[X] \in [0, \infty]$ )
- si  $X$  est intégrable, c'est-à-dire  $E[|X|] = \int |X| dP < \infty$ .

On a en particulier  $E[\mathbf{1}_B] = P(B)$  si  $B \in \mathcal{A}$  et, pour toute constante  $c \in \mathbb{R}$ ,  $E[c] = c$ ,  $P(\Omega) = c$ .

**N.B.** Les variables aléatoires bornées sont intégrables : si  $|X| \leq M$  p.s., alors  $E[|X|] \leq E[M] = M < \infty$ .

L'espérance  $E[X]$  est la **moyenne** de la variable aléatoire  $X$  : c'est en effet une généralisation d'un barycentre à coefficients positifs car c'est une « somme » (intégrale) des valeurs de  $X$  pondérées par la probabilité  $P$ , et  $P$  attribue des poids positifs et de masse totale égale à 1. Ainsi, l'espérance renseigne sur l'ordre de grandeur des valeurs prises par  $X$ .

Une autre interprétation est la suivante : si  $X$  est le gain à un jeu de hasard, alors  $E[X]$  est le prix que le casino doit faire payer au joueur pour rendre le jeu *équitable* : supposons que le joueur rejoue indéfiniment au même jeu (de façon *indépendante*), alors si le prix à payer était plus grand que  $E[X]$ , la fortune du joueur tendrait vers  $-\infty$  (il serait donc ruiné au bout d'un certain temps), tandis que pour un prix plus petit, sa fortune tendrait vers  $+\infty$  (et c'est le casino qui serait ruiné, en imaginant que le joueur a pu emprunter temporairement de quoi couvrir ses pertes éventuelles). *Ceci sera justifié par la loi des grands nombres*. De façon plus courante, l'espérance sert donc aussi à calculer des prix d'actifs financiers.

Un théorème important qui permet de faire la plupart des calculs d'espérance est le théorème de transfert (voir page p.39), qui s'écrit dans le cadre des espaces de probabilités comme suit :

**Proposition (Théorème de transfert)**

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  et  $\varphi$  une fonction mesurable  $E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $E[\varphi(X)]$  est bien définie. Alors

$$E[\varphi(X)] = \int_E \varphi(x) dP_X(x).$$

Ceci montre que l'espérance de toute fonction d'une variable aléatoire  $X$  ne dépend que de la loi  $P_X$  de  $X$ , et non de la façon exacte donc  $X$  est définie comme fonction sur  $\Omega$ .

• Si  $X$  est discrète à valeurs dans  $E$ , on a, par le théorème de transfert, pour toute fonction  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  positive (ou telle que  $\varphi(X)$  est intégrable),

$$E[\varphi(X)] = \sum_{x \in E} \varphi(x) P(X = x).$$

• Si  $X$  est continue sur  $\mathbb{R}^d$ , de densité  $f$ , le théorème de transfert donne, pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  positive (ou telle que  $\varphi(X)$  est intégrable),

$$E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x) dx.$$

**Ex. 45.** Étudier la bonne définition des espérances suivantes et les calculer si elles ont un sens :

1.  $E[X]$ , où  $X$  suit la loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, 6\}$  :  $P(X = k) = \frac{1}{6}$  pour  $k = 1, \dots, 6$ ;
2.  $E[X]$  et  $E[X^2]$  où, pour des réels  $a < b$ ,  $X$  suit la loi uniforme sur  $[a, b]$ , de densité  $\frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a, b]}$ ;
3.  $E[X]$  où  $X$  suit la loi de Cauchy, de densité  $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ;
4.  $E[s^X]$  où  $s \in \mathbb{R}$  et, pour un réel  $\lambda > 0$ ,  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  :  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ ;
5.  $E[X]$  où  $X = \max(U, \frac{1}{2})$  et  $U$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Tous les résultats vus pour les intégrales sont toujours valables. Écrivons-en quelques-uns à titre d'exemple :

**Proposition (Inégalité de Markov)**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle **positive**. Pour tout  $a > 0$ ,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

**Corollaire**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle **positive**.

- si  $E[X] < \infty$ , alors  $X < \infty$  presque sûrement. (Attention, la réciproque est fautive !)
- Si  $E[X] = 0$ , alors  $X = 0$  presque sûrement.

**Proposition**

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires **positives**.

- (TCM) Si la suite  $(X_n)_n$  est croissante et converge vers  $X$ , alors  $\lim_n \uparrow E[X_n] = E[X]$ .
- (TCM pour les séries) On a  $E\left[\sum_{n \geq 0} X_n\right] = \sum_{n \geq 0} E[X_n]$ .

**Ex. 46.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $X_n = \min(n, X)$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$ .

**Proposition (Théorème de convergence dominée)**

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires réelles, et  $X$  une variable aléatoire réelle. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  p.s. et s'il existe  $Z$  intégrable telle que  $|X_n| \leq Z$  p.s., alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X].$$

**Ex. 47.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , intégrable. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $X_n = X \mathbf{1}_{\{|X| < n\}}$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$ .

On pourra utiliser les théorèmes de Fubini ou encore les théorèmes pour les intégrales (espérances) à paramètre.

## 6.4 Variance

Enfin, on définit aussi les espaces  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , abrégés en  $L^1$  et  $L^2$ , les espaces des v.a. réelles respectivement intégrables et de carré intégrable. On rappelle dans ce cas l'inclusion  $L^2 \subset L^1$  : en effet, pour tout v.a. réelle  $X$ , par l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $E[|X|] = E[|1 \cdot X|] \leq E[X^2]^{1/2} E[1]^{1/2} = E[X^2]^{1/2}$ . Autrement dit, les v.a. de carré intégrable sont intégrables.

**Définition**

Soit  $X$  une variable aléatoire de carré intégrable. La **variance** de  $X$  est le réel positif

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2].$$

L'**écart-type** de  $X$  est le réel positif

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

La variance de  $X$  est la moyenne du carré de l'écart entre  $X$  et sa moyenne. C'est donc une mesure de la « dispersion » de la loi de  $X$  autour de son espérance  $E[X]$ , de même que l'écart-type. L'écart-type de  $X$  a l'intérêt d'être homogène à  $X$ , c'est le point a) ci-dessous :

**Propriétés**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, de carré intégrable.

- a) pour tout réel  $a$ ,  $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$  et  $\sigma(aX) = |a| \sigma(X)$ .
- b)  $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$ .

**Ex. 48.** Calculer  $\text{Var}(X)$ , où  $X$  suit la loi uniforme sur  $[a, b]$ , pour des réels  $a < b$ .

**Ex. 49.** Soit  $X$  une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que  $Z = \frac{X - E[X]}{\sigma(X)}$  est centrée ( $E[Z] = 0$ ) et standardisée ( $\text{Var}(Z) = 1$ ).
2. Si  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in ]0, \infty[$  sont tels que  $\frac{X - m}{\sigma}$  est centrée et standardisée, montrer que  $E[X] = m$  et  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .
3. Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , montrer que  $\frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Calculer l'espérance et la variance de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et en déduire celles de  $X$ .

**Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**

Si  $X$  est une variable aléatoire de carré intégrable et  $a > 0$ , alors

$$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$

**Démonstration :** Pour tout  $a > 0$ , on a, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $|X(\omega) - E[X]| \geq a$  si et seulement si  $|X(\omega) - E[X]|^2 \geq a^2$ , donc

$$\{|X - E[X]| \geq a\} = \{|X - E[X]|^2 \geq a^2\}$$

et par conséquent

$$P(|X - E[X]| \geq a) = P(|X - E[X]|^2 \geq a^2).$$

Or, en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive  $(X - E[X])^2$ , on a

$$P(|X - E[X]|^2 \geq a^2) \leq \frac{1}{a^2} E[|X - E[X]|^2].$$

La conclusion vient de la définition de la variance. ■

**Ex. 50.** Si  $X$  est une variable aléatoire de carré intégrable, et  $\alpha \geq 1$ , montrer que l'inégalité de Tchebychev s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$P(|X - E[X]| \geq \alpha \sigma(X)) \leq \frac{1}{\alpha^2},$$

et en déduire deux intervalles (non aléatoires) contenant  $X$  avec probabilité au moins 75 %, et au moins 99 %.

## 6.5 Vecteurs aléatoires

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est aussi appelée *vecteur aléatoire*.

### Définition

Soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire. Les **lois marginales** de  $X$  sont la loi de  $X_1$ , la loi de  $X_2, \dots$ , la loi de  $X_n$ . La loi de  $X$  est appelée la **loi jointe** de  $X_1, \dots, X_n$ .

Attention, il ne suffit pas de connaître les lois marginales pour connaître la loi jointe.

**Ex. 51.** Soient deux variables aléatoires  $Y$  et  $Z$  indépendantes et de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ . On définit les couples  $(X_1, X_2) = (Y, Z)$  et  $(X'_1, X'_2) = (Y, Y)$ . Vérifier qu'ils ont mêmes lois marginales mais qu'ils n'ont pas la même loi jointe.

Dans le cas de variables aléatoires discrètes ou à densité, on peut déduire les lois marginales à partir des lois jointes (mais pas l'inverse).

### Proposition

Soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $E = E_1 \times \dots \times E_d$ . Alors les lois marginales sont données, pour  $i = 1, \dots, d$ , par

$$\text{pour tout } x_i \in E_i \quad P(X_i = x_i) = \sum_{x_1 \in E_1} \dots \sum_{x_{i-1} \in E_{i-1}} \sum_{x_{i+1} \in E_{i+1}} \dots \sum_{x_d \in E_d} P(X = (x_1, \dots, x_d)).$$

Par exemple, si  $(X, Y)$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $E \times F$ , les lois marginales de  $X$  et  $Y$  sont données par

$$\text{pour } x \in E, \quad P(X = x) = \sum_{y \in F} P((X, Y) = (x, y)), \quad \text{pour } y \in F, \quad P(Y = y) = \sum_{x \in E} P((X, Y) = (x, y)).$$

### Proposition

Soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  une variable aléatoire continue à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  de densité  $f$ . Alors  $X_1, \dots, X_d$  ont aussi des densités  $f_1, \dots, f_d$ , données, pour  $i = 1, \dots, d$ , par

$$f_i : x_i \mapsto f_i(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_d.$$

Par exemple, si  $(X, Y)$  dans  $\mathbb{R}^2$  a pour densité  $f_{(X, Y)}$ , alors  $X$  et  $Y$  ont pour densités

$$f_X : x \mapsto f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X, Y)}(x, y) dy \quad \text{et} \quad f_Y : y \mapsto f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X, Y)}(x, y) dx.$$

**Ex. 52.** Soit  $Z = (X, Y)$  une variable aléatoire de loi uniforme sur le disque unité  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Déterminer les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .

## Interprétations probabilistes

Le tableau suivant résume les correspondances entre la théorie de l'intégration et les probabilités :

Intégration	Probabilités
espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$	espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
point $x \in E$	éventualité, réalisation $\omega \in \Omega$
espace $E$	univers, ensemble des éventualités $\Omega$
partie mesurable $A \in \mathcal{A}$	événement $A \in \mathcal{A}$
fonction mesurable $f : E \rightarrow F$	variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow F$
$A \cup B$	$A$ ou $B$
$A \cap B$	$A$ et $B$
$A$ et $B$ disjoints ( $A \cap B = \emptyset$ )	$A$ et $B$ incompatibles
complémentaire $A^c = E \setminus A$	négation $A^c = \Omega \setminus A$ (aussi noté $\bar{A}$ )
$A \subset B$	$A$ implique $B$
mesure $\mu$	probabilité $P$
$A^c$ est négligeable ( $\mu(A^c) = 0$ )	$A$ est presque sûr ( $P(A) = 1$ )
presque partout, ... (en abrégé, p.p.)	presque sûrement, ... (en abrégé, p.s.)
mesure image de $\mu$ par $f$	loi de $X$ (mesure image de $P$ par $X$ )
intégrale $\int_E f d\mu$	espérance (moyenne) $E[X] = \int_{\Omega} X dP$

# Chapitre 7

## Indépendance

Dans ce chapitre, on introduit la notion d'indépendance d'événements et d'indépendance de variables aléatoires.

### 7.1 Indépendance d'événements

#### 7.1.1 Probabilité conditionnelle

##### Définition

Si  $A, B \in \mathcal{A}$  sont deux événements, avec  $P(B) > 0$ , la **probabilité de  $A$  sachant  $B$**  est

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

C'est la probabilité que  $A$  se réalise si on a l'information que  $B$  est réalisé.

**Ex. 53.** Mon voisin a deux enfants. Si on apprend que l'un est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre est une fille ?

On note que  $P_{|B} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  : c'est la mesure de densité  $\frac{\mathbf{1}_B}{P(B)}$  par rapport à  $P$ . On peut donc considérer l'espérance par rapport à cette probabilité et elle est donnée, pour toute variable aléatoire  $X$  positive (ou intégrable), par

$$E[X | B] = P_{|B} = \int_{\Omega} X dP_{|B} = \frac{1}{P(B)} \int X \mathbf{1}_B dP = \frac{E[X \mathbf{1}_B]}{P(B)}.$$

##### Proposition

Soit  $(B_n)_{1 \leq n \leq N}$  une suite (avec  $N \in \mathbb{N}$  ou  $N = \infty$ ) d'événements qui partitionne  $\Omega$ , c'est-à-dire telle que

$$\Omega = \bigsqcup_{1 \leq n \leq N} B_n.$$

Pour tout événement  $A$ , et toute variable aléatoire  $X$  positive ou intégrable,

a) (**Formule des probabilités totales**)

$$P(A) = \sum_{n=1}^N P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^N P(B_n)P(A | B_n) \quad \text{et} \quad E[X] = \sum_{n=1}^N E[X \mathbf{1}_{B_n}] = \sum_{n=1}^N P(B_n)E[X | B_n]$$

b) (**Formule de Bayes**) pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

$$P(B_n | A) = \frac{P(B_n)P(A | B_n)}{\sum_{k=1}^N P(B_k)P(A | B_k)}.$$

**Démonstration :** a) La première formule se déduit du fait que  $A = \bigsqcup_n (A \cap B_n)$ , et la deuxième vient de  $X = \sum_n X \mathbf{1}_{B_n}$ . À noter que si  $N = \infty$ , la deuxième formule requiert le TCM (si  $X \geq 0$ ) ou le TCD (si  $X$  est intégrable, avec domination par  $|X|$ ).

b) La formule de Bayes se déduit directement de  $P(B_n | A) = \frac{P(B_n \cap A)}{P(A)}$ , en utilisant ensuite  $P(B_n \cap A) = P(B_n)P(A | B_n)$  pour le numérateur et a) pour le dénominateur. ■

**Ex. 54.** Un laboratoire pharmaceutique a mis au point un test capable de détecter la présence d'une maladie qui touche en moyenne 1 personne sur 1000. Ce test n'est pas infallible : si le patient est malade, le test est positif avec probabilité 99 %, et si le patient est sain, le test est négatif avec probabilité 99,8 %. On effectue le test sur un patient choisi au hasard. Il est positif. Quelle est la probabilité que le patient soit malade ? Commenter.

### 7.1.2 Événements indépendants

#### Définition

Deux événements  $A, B$  sont **indépendants** si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

Si  $P(B) > 0$ , ceci revient donc à  $P(A | B) = P(A)$  : savoir que  $B$  est réalisé n'affecte pas la probabilité que  $A$  soit réalisé ou non. Cela correspond bien au sens courant d'« indépendance ». On généralise la définition à  $n$  événements :

#### Définition

Les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont **indépendants** si, pour tous  $i_1 < \dots < i_k$ ,

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Autrement dit, par exemple, pour vérifier que  $A, B, C$  sont indépendants, il faut vérifier que l'on a  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$  mais aussi que  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ,  $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ ,  $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ . *Attention, il ne suffit pas de vérifier la première égalité, ou les trois suivantes.*

**Ex. 55.** On considère un lancer de deux pièces équilibrées. Montrer que les événements

$A = \{\text{la 1}^{\text{re}} \text{ pièce tombe sur pile}\}$ ,  $B = \{\text{la 2}^{\text{e}} \text{ pièce tombe sur pile}\}$ , et  $C = \{\text{les pièces tombent du même côté}\}$  sont indépendants 2 à 2, mais pas indépendants.

## 7.2 Indépendance de variables aléatoires

#### Définition

Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , à valeurs dans  $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$  sont **indépendantes** si

$$\text{pour tous } B_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}_n \quad P(\{X_1 \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n).$$

Intuitivement,  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes si la connaissance de certaines d'entre elles n'apporte aucune information sur les autres : cela correspond encore à la notion intuitive d'« indépendance ».

**Ex. 56.** (*Paradoxe des anniversaires*) Quelle est la probabilité que, parmi  $n$  personnes choisies au hasard, au moins 2 aient leur anniversaire le même jour ? En donner une minoration en utilisant l'inégalité  $1 - x \leq e^{-x}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . L'évaluer pour  $n = 23$ . Donner une majoration de la probabilité qu'au moins 3 aient leur anniversaire le même jour.

#### Définition

La **loi binomiale de paramètres**  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in [0, 1]$  est la loi (notée  $\mathcal{B}(n, p)$ ) d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, n\}$  telle que

$$\text{pour } k = 0, \dots, n, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Une interprétation importante est la suivante : la loi  $\mathcal{B}(n,p)$  est la loi du nombre de piles obtenus en  $n$  lancers indépendants d'une pièce de monnaie qui tombe sur pile avec probabilité  $p$  :

**Proposition**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in [0,1]$ . Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes, de loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors leur somme

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Remarquons que  $S = \text{Card}\{1 \leq k \leq n \mid X_k = 1\}$ .

**Démonstration :** On note tout d'abord que, comme  $X_1, \dots, X_n$  sont à valeurs dans  $\{0,1\}$ , leur somme  $S$  est à valeurs dans  $\{0, \dots, n\}$ . Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ . On décompose selon les valeurs de  $X_1, \dots, X_n$  : on a

$$\{S = k\} = \bigsqcup_{\substack{i_1, \dots, i_n \in \{0,1\} \\ i_1 + \dots + i_n = k}} \{X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\}$$

et cette union est dénombrable (même finie) et disjointe donc

$$P(S = k) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \in \{0,1\} \\ i_1 + \dots + i_n = k}} P(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n).$$

Pour tous  $i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}$  tels que  $i_1 + \dots + i_n = k$ , par indépendance entre  $X_1, \dots, X_n$  on a  $P(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p^k(1-p)^{n-k}$ . Par ailleurs, le nombre de  $n$ -uplets  $(i_1, \dots, i_n)$  tels que  $i_1 + \dots + i_n = k$  est égal au nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble qui en possède  $n$  (car il suffit de choisir quels indices valent 1), c.-à-d.  $\binom{n}{k}$ . Donc  $P(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . ■

**Définition**

La loi de Poisson de paramètre  $\lambda \in ]0, +\infty[$  est la loi (notée  $P(\lambda)$ ) d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Cette loi apparaît souvent comme loi d'un nombre d'événements « rares » qui se produisent parmi une « longue » suite de tirages indépendants. Un énoncé plus précis est le suivant, qui résulte d'un calcul simple :

**Proposition**

Soit  $(p_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels dans  $[0,1]$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$ . Si, pour tout  $n$ ,  $S_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p_n)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

### 7.2.1 Lien avec la loi produit

La définition d'indépendance rappelle la mesure produit : on peut la réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} P_{(X_1, \dots, X_n)}(B_1 \times \dots \times B_n) &= P_{X_1}(B_1) \cdots P_{X_n}(B_n) \\ &= P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}(B_1 \times \dots \times B_n). \end{aligned}$$

On a ici noté  $P_{(X_1, \dots, X_n)}$  la loi (jointe) du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$ . Ceci nous donne le résultat suivant :

**Théorème (Indépendance et loi produit)**

Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes si et seulement si la loi jointe du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  est le produit des lois marginales de  $X_1, \dots, X_n$  :

$$P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}.$$

On a alors, pour toute fonction  $f$  mesurable positive, ou telle que  $f(X_1, \dots, X_n)$  est intégrable,

$$E[f(X_1, \dots, X_n)] = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dP_{X_1}(x_1) \cdots dP_{X_n}(x_n),$$

où l'ordre d'intégration est quelconque, et en particulier, pour toutes fonctions  $f_1, \dots, f_n$  mesurables positives,

ou telles que  $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  sont intégrables,

$$E[f_1(X_1) \cdots f_n(X_n)] = E[f_1(X_1)] \cdots E[f_n(X_n)].$$

Le second point est la traduction directe du théorème de Fubini et la dernière formule est le cas particulier  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ , pour lequel la formule se simplifie à l'aide de la linéarité de l'intégrale. On en déduit en particulier le résultat suivant pour les vecteurs aléatoires à densité.

**Proposition**

Soit  $X_1, \dots, X_d$  des variables aléatoires réelles.

a) Si, pour  $i = 1, \dots, d$ ,  $X_i$  a pour densité  $f_i$ , et  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes, alors la loi de  $(X_1, \dots, X_d)$  a pour densité la fonction

$$f : (x_1, \dots, x_d) \mapsto f_1(x_1) \cdots f_d(x_d).$$

b) Inversement si la loi de  $(X_1, \dots, X_d)$  a une densité qui s'écrit sous la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_d(x_d),$$

alors  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes, et pour  $i = 1, \dots, d$ , la densité de  $X_i$  est proportionnelle à  $g_i$ , et est donc

$$f_i : x \mapsto f_i(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g_i(y) dy} g_i(x).$$

### 7.2.2 Covariance

**Définition**

La **covariance** de deux variables aléatoires réelles de carré intégrable  $X$  et  $Y$  est

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

**Proposition**

a) Pour toute variable aléatoire  $X$ ,  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ .

b) Pour toutes variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de carré intégrable,  $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ .

c) Pour toutes variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  de carré intégrable,

$$\text{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

**Démonstration :** a) est immédiat, et b) s'obtient en développant et par linéarité de l'espérance. Pour c), même principe :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + \cdots + X_n) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n (X_i - E[X_i])\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{1 \leq i, j \leq n} (X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])\right] = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

(par la symétrie  $\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_j, X_i)$ ), d'où la formule. ■

Une conséquence du théorème p.55 plus haut, liant indépendance et loi produit est que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et positives (ou intégrables), alors  $E[XY] = E[X]E[Y]$ .

Autrement dit, si deux v.a.  $X, Y$  de carré intégrable sont indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Ex. 57.** (La réciproque est fautive) Soient  $U, V$  deux variables aléatoires de carré intégrable, indépendantes et de même loi. On pose  $X = U + V$  et  $Y = U - V$ . Montrer que  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , mais qu'en général  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (prendre par exemple  $U, V$  de loi  $\mathcal{B}(p)$ ).

On a alors la conséquence suivante de la proposition précédente.

### Corollaire

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires réelles, de carrés intégrables et (deux à deux) **indépendantes**, alors

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

**Ex. 58.** Calculer l'espérance et la variance de la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

## 7.3 Propriétés de l'indépendance

La définition de l'indépendance de variables aléatoires peut aussi s'introduire en définissant la notion plus fondamentale d'indépendance d'une famille de tribus, qui sera utile en *Probabilités 2* :

### Définition

Les tribus  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$  sont **indépendantes** si, pour tous  $A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ , ces événements sont indépendants.

Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont **indépendantes** si les tribus engendrées  $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$  le sont.

### Définition (Indépendance d'une famille infinie)

On dit qu'une famille infinie d'événements, de variables aléatoires ou de tribus, est indépendante si toute sous-famille finie est indépendante.

On donne deux façons générales d'obtenir de nouvelles variables aléatoires indépendantes à partir d'une première famille de variables indépendantes :

### Propriétés

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes.

a) Pour toutes fonctions mesurables  $(f_n)_{n \geq 1}$ , les variables aléatoires  $(f_n(X_n))_{n \geq 1}$  sont indépendantes.

b) (**Indépendance par paquets**) Pour tous  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots$ , les variables aléatoires

$$Y_1 = (X_1, \dots, X_{i_1}), Y_2 = (X_{i_1+1}, \dots, X_{i_2}), \dots$$

sont indépendantes.

En combinant a) et b), ceci montre que si on regroupe  $X_1, \dots, X_n$  en paquets disjoints, ces paquets sont indépendants, et donc toutes les familles de v.a. définies comme fonctions qui dépendent de paquets disjoints sont indépendantes : si  $X, Y, Z, T$  sont indépendantes et à valeurs réelles, alors  $X + Z$  et  $YT$  sont indépendantes, de même que  $\frac{X}{T}$ ,  $Y^2$  et  $\sqrt{|Z|}$ , par exemple.

L'indépendance entre événements et entre variables aléatoires sont liées :

### Proposition

Une suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  d'événements sont indépendants si et seulement si leurs fonctions indicatrices  $(\mathbf{1}_{A_n})_{n \geq 1}$  sont indépendantes.

Comme les opérations sur les ensembles correspondent à des opérations sur les fonctions indicatrices ( $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ ,  $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$  et  $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ ), les propriétés précédentes s'adaptent donc aux événements : si  $A, B, C, D$  sont des événements indépendants, alors  $A^c \cap B$  et  $C \cup D$  sont indépendants, de même que  $A^c \cup (B \cap D^c)$  et  $C$ , par exemple.

### Définition

La **loi géométrique de paramètre**  $p \in ]0, 1[$  est la loi (notée  $\mathcal{G}(p)$ ) d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Une interprétation importante de la loi  $\mathcal{G}(p)$  est comme étant la loi de l'instant où l'on obtient pile pour la première fois dans une suite de lancers indépendants d'une pièce qui a probabilité  $p$  de tomber sur pile : c'est la loi du « temps de premier succès » dans une suite d'expériences indépendantes ayant chacune pour probabilité de succès  $p$ . Ceci s'exprime par la proposition suivante.

### Proposition

Soit  $p \in ]0,1]$ . Si  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors la variable aléatoire

$$N = \min\{n \geq 1 \mid X_n = 1\}$$

est finie presque sûrement, et suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

**Démonstration :** Vérifions d'abord  $N < \infty$  p.s., c'est-à-dire que p.s., il existe  $n \geq 1$  tel que  $X_n = 1$ . La suite d'événements  $A_n = \{X_1 = 0, \dots, X_n = 0\}$  est décroissante, donc

$$\liminf_n P(A_n) = P\left(\bigcap_n A_n\right).$$

Or  $P(A_n) = (1-p)^n \rightarrow 0$  car  $1-p < 1$  vu l'hypothèse, et  $\bigcap_n A_n = \{\forall n \geq 1, X_n = 0\} = \{N = \infty\}$ , donc l'égalité précédente donne  $P(N = \infty) = 0$ , c.-à-d.  $P(N < \infty) = 1$ .

Ainsi,  $N$  prend ses valeurs dans  $1, 2, 3, \dots$  et, pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$\{N = k\} = \{X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\}$$

donc, par indépendance entre  $X_1, \dots, X_k$ ,

$$P(N = k) = P(X_1 = 0) \cdots P(X_{k-1} = 0)P(X_k = 1) = (1-p)^{k-1}p,$$

ce qui conclut. On aurait aussi pu déduire  $P(N < \infty) = 1$  à partir du calcul de  $P(N = k)$ , car

$$P(N < \infty) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{N = k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p = \frac{1}{1-(1-p)}p = 1. \quad \blacksquare$$

# Chapitre 8

## Caractériser une loi

On sera souvent amené à déterminer la loi d'une variable aléatoire. Une première approche, qui découle de la définition, consistera à utiliser l'une des équivalences données par la proposition suivante :

### Proposition

Soit  $X$  et  $Y$  des v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $X$  et  $Y$  ont même loi ;
- (ii) pour toute partie  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $P(X \in A) = P(Y \in A)$  ;
- (iii) pour tout pavé fermé  $A$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $P(X \in A) = P(Y \in A)$  ;
- (iv) pour toute fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $E[f(X)] = E[f(Y)]$  ;
- (v) pour toute fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact  $f$ ,  $E[f(X)] = E[f(Y)]$ .

Souvent, on utilisera plutôt le calcul d'une fonction associée à  $X$  et qui caractérise sa loi : fonction de répartition, fonction génératrice ou fonction caractéristique.

### 8.1 Fonction de répartition (variables aléatoires réelles)

#### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Sa **fonction de répartition** est la fonction

$$\begin{cases} F_X : \mathbb{R} & \rightarrow [0,1] \\ t & \mapsto F_X(t) = P(X \leq t). \end{cases}$$

On constate que  $F_X$  ne dépend que de la loi de  $X$  :  $F_X(t) = P_X([-\infty, t])$ , donc on pourra dire aussi que  $F_X$  est la fonction de répartition de la loi de  $X$ .

#### Proposition

- a) La loi de  $X$  est déterminée par sa fonction de répartition : si  $F_X(t) = F_Y(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $X$  et  $Y$  ont même loi.
- b) La fonction  $F_X$  est croissante, continue à droite, et admet pour limites 0 en  $-\infty$  et 1 en  $+\infty$ .
- c) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la limite de  $F_X$  en  $t$  à gauche est  $F_X(t^-) = P(X < t)$ . Ainsi,  $F_X$  est continue en  $t$  si et seulement si  $P(X = t) = 0$ .
- d) Toute fonction qui vérifie les propriétés de b) est la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

#### Proposition

- a) Si  $X$  est une variable aléatoire discrète,  $F_X$  est une fonction constante entre les éléments de

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X = x) > 0\},$$

et telle que le saut en  $x \in E$  a pour hauteur  $P(X = x)$ .

- b) Si  $X$  est une variable aléatoire de densité  $f_X$ , on a  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ .

Ainsi, si  $f_X$  est continue par morceaux,  $F_X$  est la primitive de  $f_X$  nulle en  $-\infty$  ; de plus, on a la dérivée  $(F_X)'(x) = f_X(x)$  pour tout  $x$  où  $f_X$  est continue. Inversement, si  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors  $X$  admet pour densité  $f_X = F_X'$

**Ex. 59.** Déterminer et représenter la fonction de répartition des variables aléatoires suivantes :

1.  $X$ , de loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, 6\}$ ;
2.  $X = \max(U, 1/2)$ , où  $U$  est de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .
3.  $X = \max(U, V)$ , où  $U, V$  sont indépendantes et de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

## 8.2 Fonction génératrice (variables aléatoires entières)

### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . La **fonction génératrice** de  $X$  est la fonction

$$G_X : s \mapsto G_X(s) = E[s^X] = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X = n).$$

Notons tout de suite que  $G_X$  est au moins définie sur  $[-1, 1]$ , en effet c'est une série entière et comme la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$  converge,  $G_X(1)$  et  $G_X(-1)$  convergent absolument. Ainsi le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

### Proposition

La fonction génératrice  $G_X$  caractérise la loi de  $X$  : si pour deux variables  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  on a  $G_X(s) = G_Y(s)$  pour tout  $s \in ]-1, 1[$ , alors  $X$  et  $Y$  ont même loi.

**Démonstration :** Comme le rayon de convergence de  $G_X$  et  $G_Y$  est  $\geq 1$ , on peut dériver terme à terme sur  $]-1, 1[$  (on peut aussi appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour le justifier) : pour tout  $s \in ]-1, 1[$ , pour tout  $k \geq 0$ ,

$$G_X^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)s^{n-k}P(X=n) = k!P(X=k) + \frac{k!}{1!}sP(X=1) + \frac{k!}{2!}s^2P(X=2) + \cdots$$

d'où  $G_X^{(k)}(0) = k!P(X=k)$  et de même pour  $Y$ . Comme  $G_X$  et  $G_Y$  sont égales sur  $]-1, 1[$ , leurs dérivées successives en 0 sont les mêmes d'où, pour tout  $k$ ,  $P(X=k) = P(Y=k)$ , ce qui implique que  $X$  et  $Y$  ont même loi (puisqu'elles sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ). ■

On peut remarquer que la dérivée  $G'_X$  est croissante sur  $[0, 1[$ , donc admet toujours une limite (dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ) en 1 à gauche, même si  $G_X$  n'y est pas dérivable. On la note  $G'_X(1^-)$ , et est égale à l'espérance de  $X$  :

### Proposition

On a  $E[X] = G'_X(1^-) \in [0, \infty]$ .

**Démonstration :** Comme observé précédemment, on peut dériver terme à terme sur  $]-1, 1[$  : pour tout  $s \in ]-1, 1[$ ,

$$G'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} P(X=k) = E[X s^{X-1} \mathbf{1}_{\{X \geq 1\}}].$$

Or, presque sûrement,  $s \mapsto X s^{X-1} \mathbf{1}_{\{X \geq 1\}}$  est croissante, positive, et converge vers  $X$  quand  $s \rightarrow 1^-$ . Par le théorème de convergence monotone, on en déduit la proposition. (Formellement, il faut appliquer le théorème à une suite ; pour cela, comme la croissance de  $G'_X$  assure que sa limite en  $1^-$  existe, c'est aussi la limite de  $G'_X(s_n)$  où  $s_n = 1 - \frac{1}{n}$ , et on peut alors raisonner sur la suite  $Z_n = X s_n^{X-1} \mathbf{1}_{\{X \geq 1\}}$  comme précédemment) ■

### Proposition

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  **indépendantes**. Alors, pour tout  $s \in [-1, 1]$ , on a  $G_{X_1 + \dots + X_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s)$ .

**Démonstration :** On a, pour tout  $s$ ,

$$G_{X_1 + \dots + X_n}(s) = E[s^{X_1 + \dots + X_n}] = E[s^{X_1} \cdots s^{X_n}] = E[s^{X_1}] \cdots E[s^{X_n}] = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s). \quad \blacksquare$$

**Ex. 60.** Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes, de lois  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $\mathcal{P}(\mu)$ .

1. Calculer la fonction génératrice de  $X$  et  $Y$ . Retrouver la valeur de  $E[X]$ .
2. En déduire la loi de  $Z = X + Y$

### 8.3 Méthode de la fonction test (variables à densité)

Une méthode générale pour déterminer une densité est d'utiliser le théorème de transfert (qui correspond au point (iv) de la proposition en début de chapitre) :

**Proposition**

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est continue et a pour densité  $f$  si et seulement si pour toute fonction  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable positive (appelée fonction test), on a la formule de transfert  $E[h(X)] = \int h(x)f(x)dx$ .

La méthode de la fonction test se déroule de la manière suivante : 1. On se donne une fonction test  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable quelconque ; 2. Après diverses manipulations, on écrit  $E[h(Y)]$  sous la forme  $\int h(y)f_Y(y)dy$ , pour une fonction  $f_Y$  à déterminer ; 3. On conclut grâce à la méthode de la fonction test que  $f_Y$  est la densité de la variable aléatoire  $Y$ .

**Exemple.** Si  $X$  est une v.a. réelle continue de densité  $f$  alors pour  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ , on peut déterminer la densité de  $Y = aX + b$ . En effet, on peut utiliser le théorème de transfert pour  $X$ , pour écrire

$$E[h(Y)] = E[h(aX + b)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(ax + b)f(x)dx.$$

En utilisant le changement de variable  $y = ax + b$  ( $x = \frac{y-b}{a}$ ,  $dx = \frac{1}{a}dy$ ), on en conclut que

$$E[h(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\frac{1}{a}f\left(\frac{y-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)f_Y(y)dy,$$

avec  $f_Y(y) = \frac{1}{a}f\left(\frac{y-b}{a}\right)$ . Ainsi, la méthode de la fonction test montre que  $Y = aX + b$  a pour densité  $\frac{1}{a}f\left(\frac{y-b}{a}\right)$ .

**Ex. 61.** Soit  $\lambda, a > 0$ . Montrer que si  $X$  suit la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ , alors  $e^{-\lambda X}$  suit la loi  $\mathcal{U}([0,1])$ .

**Image d'un vecteur aléatoire à densité par un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.**

Si  $X = (X_1, \dots, X_d)$  a pour densité  $f$ , et si presque sûrement  $X \in U$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , alors pour tout  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $\varphi : U \rightarrow V$  (où  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ) la variable aléatoire  $(Y_1, \dots, Y_d) = \varphi(X_1, \dots, X_d)$  admet une densité. C'est une conséquence du théorème de changement de variable et de la Proposition 43 ci-dessus. On calcule la densité avec la méthode de la fonction test : pour toute fonction mesurable positive  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} E[h(Y_1, \dots, Y_d)] &= E[h(\varphi(X_1, \dots, X_d))] = \int h(\varphi(x_1, \dots, x_d))dP_{(X_1, \dots, X_d)}(x_1, \dots, x_d) \\ &= \int_U h(\varphi(x_1, \dots, x_d))f(x_1, \dots, x_d)dx_1 \cdots dx_d \\ &= \int_V h(y_1, \dots, y_d)f(\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_d))|J_{\varphi^{-1}}(y_1, \dots, y_d)|dy_1 \cdots dy_d \end{aligned}$$

à l'aide du théorème de changement de variable. La dernière expression est aussi  $E[h(Z_1, \dots, Z_d)]$  où  $(Z_1, \dots, Z_d)$  a pour densité

$$(y_1, \dots, y_d) \mapsto f(\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_d))|J_{\varphi^{-1}}(y_1, \dots, y_d)|$$

(c'est bien une densité : cette fonction est positive, et on voit que son intégrale vaut 1 en prenant  $g = 1$  ci-dessus). Comme l'égalité  $E[h(Y_1, \dots, Y_d)] = E[h(Z_1, \dots, Z_d)]$  vaut pour toute fonction mesurable positive  $g$ , on en déduit que  $(Y_1, \dots, Y_d)$  et  $(Z_1, \dots, Z_d)$  ont même loi, donc la fonction ci-dessus est aussi la densité de  $(Y_1, \dots, Y_d)$ .

La formule n'est pas à retenir, il vaut mieux faire le calcul à chaque fois (ce qui réduit le risque d'erreur).

**Ex. 62.** Pour  $c > 0$ , on note  $\gamma(c)$  la loi gamma de paramètre  $c$ , qui a pour densité

$$f_c : x \mapsto f_c(x) = \frac{1}{\Gamma(c)}x^{c-1}e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Soit  $a, b > 0$  et  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes de lois  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$ . On pose  $U = \frac{X}{X+Y}$  et  $V = X+Y$ .

1. Calculer la loi du couple  $(U, V)$ .
2.  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ? Quelles sont leurs lois ?

## 8.4 Fonction caractéristique (variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ )

### Définition

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . La **fonction caractéristique** de  $X$  est la fonction

$$\left| \begin{array}{ll} \Phi_X : \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{it \cdot X}], \end{array} \right.$$

où  $\cdot$  désigne le produit scalaire (ou le produit usuel si  $d = 1$ ) et  $i^2 = -1$ .

Comme  $|e^{it \cdot X}| = 1$  et  $\mathbb{E}[1] = 1 < \infty$ , la fonction  $t \mapsto e^{it \cdot X}$  est intégrable par rapport à  $P$ . Ainsi,  $\Phi_X$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^d$  et vérifie d'ailleurs  $|\Phi_X(t)| \leq 1$  par inégalité triangulaire.

Si  $X$  a pour densité  $f$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi_X(t) = \int e^{itx} f(x) dx$$

donc  $\Phi_X$  est la (conjuguée de la) transformée de Fourier de  $f$ .

### Proposition

La fonction  $\Phi_X$  caractérise la loi de  $X$  : si pour deux variables  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  on a  $\Phi_X(t) = \Phi_Y(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$ , alors  $X$  et  $Y$  ont la même loi.

Les propriétés suivantes s'obtiennent via les théorèmes de continuité et dérivation sous l'intégrale.

### Proposition

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

- La fonction  $\Phi_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\Phi_X(0) = 1$ .
- Si  $X$  est intégrable, alors  $\Phi_X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\Phi_X'(0) = i\mathbb{E}[X]$ .
- De manière générale, si  $\mathbb{E}[|X|^m] < \infty$ , alors  $\Phi_X$  est de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\Phi_X^{(m)}(0) = i^m \mathbb{E}[X^m]$ .

**Ex. 63.** Soit  $Z$  une variable aléatoire de  $\mathcal{N}(0,1)$ , c'est-à-dire de densité  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

- Justifier que  $\Phi_Z$  est dérivable, et donner une expression intégrale de  $\Phi_Z'(t)$ .
- En intégrant par parties, montrer que  $\Phi_Z$  est solution de l'équation différentielle  $y' = -ty$ .
- En déduire la fonction  $\Phi_Z$ , puis la fonction caractéristique d'une variable  $X$  de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

### Proposition

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , alors

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}^d, \quad \Phi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \Phi_{X_1}(t) \cdots \Phi_{X_n}(t).$$

**Démonstration :** On a, pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\Phi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{it \cdot (X_1 + \dots + X_n)}] = \mathbb{E}[e^{it \cdot X_1} \cdots e^{it \cdot X_n}] = \mathbb{E}[e^{it \cdot X_1}] \cdots \mathbb{E}[e^{it \cdot X_n}] = \Phi_{X_1}(t) \cdots \Phi_{X_n}(t). \quad \blacksquare$$

**Ex. 64.** Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes, de lois  $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$  et  $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$ . Déterminer la loi de  $Z = X + Y$  à l'aide des fonctions caractéristiques.

# Chapitre 9

## Suites de variables aléatoires

Au terme du chapitre précédent, on dispose de toutes les notions fondamentales pour définir et étudier des questions de probabilités. L'objectif de ce chapitre est maintenant d'en faire usage pour aboutir aux deux principaux théorèmes de la théorie des probabilités : la loi des grands nombres et le théorème central limite. Ces deux résultats portent sur le comportement asymptotique de suites de variables aléatoires. On commence donc par introduire divers outils et définitions, notamment des notions de convergence pour les suites de variables aléatoires, dont l'intérêt va bien au-delà des théorèmes qui sont le but principal de ce chapitre.

Dans tout ce chapitre, on se donne un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

### 9.1 Suites d'événements : deux outils

#### 9.1.1 Intersection dénombrable d'événements presque sûrs

##### Lemme

Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements presque sûrs, c'est-à-dire que  $P(A_i) = 1$  pour tout  $i \in I$ , et si  $I$  est dénombrable, alors  $\bigcap_{i \in I} A_i$  est presque sûr.

**Démonstration :** En effet le complémentaire de  $\bigcap_{i \in I} A_i$  est  $\bigcup_{i \in I} (A_i)^c$  et, comme  $I$  est dénombrable, par sous-additivité,

$$P\left(\bigcup_{i \in I} (A_i)^c\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i^c) = 0. \quad \blacksquare$$

Ainsi, une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre. Ceci peut se voir comme un échange de quantificateurs : si, pour tout  $i \in I$ , p.s.  $A_i$  a lieu, et que  $I$  est dénombrable, alors p.s., pour tout  $i \in I$ ,  $A_i$  a lieu.

#### 9.1.2 Lemme de Borel-Cantelli

Considérons une suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  d'événements. On définit à partir de ceux-ci deux nouveaux événements : la **limite supérieure** de la suite  $(A_n)_{n \geq 0}$

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k = \{\text{il existe une infinité d'indices } n \text{ tels que } A_n \text{ se réalise}\}$$

et la **limite inférieure** de la suite  $(A_n)_{n \geq 0}$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} A_k = \{\text{à partir d'un certain rang, } A_n \text{ se réalise}\}.$$

On peut noter que  $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n (A_n)^c$ , ou encore (pour faire le lien avec les notions de limites supérieure et inférieure pour les suites de réels) que  $\mathbf{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbf{1}_{A_n}$  et  $\mathbf{1}_{\liminf_n A_n} = \liminf_n \mathbf{1}_{A_n}$ .

##### Théorème (Lemme de Borel-Cantelli)

Soit  $(A_n)_{n \geq 0}$  une suite d'événements et soit  $N = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{A_n\}}$  le nombre d'événements  $A_n$  qui se réalisent.

a) On suppose que  $\sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty$ . Alors

$$P(\limsup_n A_n) = 0 \quad \text{ou de manière équivalente} \quad N < +\infty \text{ p.s.}$$

b) On suppose que **les événements  $(A_n)_n$  sont (deux à deux) indépendants** et que  $\sum_{n \geq 0} P(A_n) = \infty$ .

Alors

$$P(\limsup_n A_n) = 1 \quad \text{ou de manière équivalente} \quad N = +\infty \text{ p.s.}$$

**Démonstration :** a) Par le théorème de convergence monotone pour les séries positives, on a

$$E[N] = \sum_{n \geq 0} E[\mathbf{1}_{A_n}] = \sum_{n \geq 0} P(A_n),$$

donc si  $\sum_n P(A_n) < \infty$ , alors  $E[N] < \infty$ , d'où  $N < \infty$  p.s., comme annoncé car  $P(\limsup_n A) = P(N = \infty)$ .

b) Montrons d'abord une propriété utile :

**Lemme**

Pour toute suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  d'événements indépendants,  $P\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) = \prod_{n \geq 0} P(A_n)$ .

**Démonstration :** Pour tout  $N$ , on note  $B_N = A_0 \cap \dots \cap A_N$ . Alors la suite  $(B_N)_N$  est décroissante, donc

$$\liminf_N P(B_N) = P\left(\bigcap_N B_N\right) = P\left(\bigcap_n A_n\right).$$

Or, vu l'indépendance,  $P(B_N) = P(A_0) \dots P(A_N)$ , qui converge vers  $\prod_{n \geq 0} P(A_n)$ , d'où le lemme. ■

On suppose les  $(A_n)_n$  indépendants, et  $\sum_n P(A_n) = \infty$ . On a

$$P(\limsup_n A_n) = P\left(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \liminf_n P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right).$$

Or, pour tout  $n$ , en utilisant le lemme (pour la suite  $(A_n^c)_n$ ),

$$P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k \geq n} (A_k)^c\right) = 1 - \prod_{k \geq n} P((A_k)^c) = 1 - \prod_{k \geq n} (1 - P(A_k))$$

et, par l'inégalité  $1 - x \leq e^{-x}$ , on a

$$0 \leq \prod_{k \geq n} (1 - P(A_k)) \leq \prod_{k \geq n} e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k \geq n} P(A_k)} = 0$$

car la série diverge, d'où  $P(\bigcup_{k \geq n} A_k) = 1$ . Et donc  $P(\limsup_n A_n) = 1$ , comme annoncé. ■

**Ex. 65.** (Démonstration alternative de b)) On note  $N_n = \sum_{i=0}^n \mathbf{1}_{A_i}$  et  $m_n = \sum_{i=0}^n P(A_i) = E[N_n]$ ; on suppose que  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = +\infty$ .

1. Calculer  $\text{Var}(N_n)$  et montrer que  $\text{Var}(N_n) \leq m_n$ .
2. Montrer que  $P(N \leq \frac{1}{2}m_n) \leq P(N_n \leq \frac{1}{2}m_n) \leq 4/m_n$ . (Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.)
3. Montrer que  $P(N < +\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(N \leq \frac{1}{2}m_n) = 0$  et conclure.

**Ex. 66.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi  $\mathcal{B}(p)$ , où  $p \in ]0, 1[$ .

1. Montrer que la suite contient presque sûrement une infinité de 1.
2. Montrer que la suite contient presque sûrement une infinité de fois la séquence "01".
3. Montrer que la suite contient presque sûrement une infinité de fois n'importe quelle séquence finie.

## 9.2 Loi d'une suite de variables aléatoires

Si  $X_1, X_2, \dots$  sont des variables aléatoires réelles alors, on l'a vu, pour tout  $d \geq 1$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_d)$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  (dont la loi décrit notamment les corrélations possibles entre  $X_1, \dots, X_d$ ). Pour voir  $(X_n)_{n \geq 1}$  comme une « suite aléatoire », il faut munir l'espace  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  des suites réelles d'une tribu adaptée.

### Définition

La tribu produit infini, aussi appelée tribu cylindrique, sur  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est la tribu

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}} = \sigma(\mathcal{C})$$

où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des « cylindres », c'est-à-dire des événements qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées :

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 0} \{B_0 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid B_0, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

On peut vérifier alors que  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $(E, \mathcal{B})$  si et seulement si, pour tout  $n \geq 1$ ,  $X_n$  est une variable aléatoire réelle.

En conséquence de la définition de  $\mathcal{B}$ , pour décrire la loi de la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$ , il suffit de donner la loi de  $(X_1, \dots, X_n)$  pour tout  $n \geq 1$ . En particulier, si la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  est indépendante, alors (par définition) les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes pour tout  $n$ , donc la loi du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  est la loi produit des lois de  $X_1, \dots, X_n$ , de sorte que la loi de la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  ne dépend que des lois de  $X_1$ , de  $X_2$ , etc. ; c'est la loi « produit infini » de ces lois.

Notons que l'on n'a pas justifié rigoureusement l'existence de cette loi produit infini, et donc de suites de variables aléatoires indépendantes ayant des lois prescrites. Faisons-le dans le cas particulier important d'une suite de tirages à pile ou face équilibrés (ce cas permettrait d'ailleurs d'obtenir un cas plus général).

### Proposition

Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On note  $X_1, X_2, \dots$  les chiffres (bits) de son développement en base 2 :  $X_i \in \{0, 1\}$  et

$$U = \overline{0, X_1 X_2 \dots} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}. \quad (*)$$

(Autrement dit,  $X_n = \lfloor 2^n U \rfloor - 2 \lfloor 2^{n-1} U \rfloor$ .) Alors les variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$ , sont indépendantes et suivent toutes la loi  $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ .

Inversement, pour une telle suite  $(X_n)_{n \geq 1}$ , la variable aléatoire  $U$  définie par (\*) suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Démonstration :** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Pour tous  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \in \{0, 1\}$ , on a

$$P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_N = \varepsilon_N) = P(U \in [x, x + 2^{-N}[),$$

où  $x = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n 2^{-n}$ . Cette probabilité vaut donc  $\int_{[x, x+2^{-N}[} \mathbf{1}_{[0,1]}(t) dt = 2^{-N}$ . En sommant sur les  $2^{N-1}$  choix possibles de  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}$ , on obtient, pour  $\varepsilon_N \in \{0, 1\}$ ,

$$P(X_N = \varepsilon_N) = 2^{N-1} 2^{-N} = \frac{1}{2},$$

ce qui montre que  $X_N$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ . Par le même argument, il en va de même de  $X_1, \dots, X_{N-1}$ . On a donc, pour tous  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \in \{0, 1\}$ ,

$$P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_N = \varepsilon_N) = 2^{-N} = P(X_1 = \varepsilon_1) \cdots P(X_N = \varepsilon_N),$$

ce qui montre que  $X_1, \dots, X_N$  sont indépendantes. Ceci est vrai pour tout  $N$ , d'où la conclusion.

La seconde partie résulte de la première vu que  $U$  s'exprime en fonction de la suite  $(X_n)_n$  dont on a décrit la loi. ■

On a donc défini une suite infinie  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ . On peut utiliser cette suite pour définir une suite infinie  $(Y_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{U}([0, 1])$ . En effet, il suffit d'utiliser le fait que  $\mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  sont en bijection l'un avec l'autre (par dénombrabilité) : on peut donc réindexer la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  en  $(X_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ . En posant  $Y_j = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} X_{i,j}$ , on obtient que  $Y_j \sim \mathcal{U}([0, 1])$  par la proposition précédente et les variables  $(Y_j)_{j \geq 1}$  sont indépendantes grâce à l'indépendance par paquets.

Signalons l'abréviation courante suivante : «  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite de v.a. i.i.d. » signifie que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire qu'elles suivent toutes la même loi).

### 9.3 Convergence d'une suite de variables aléatoires

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle.

Les définitions suivantes s'étendent aisément au cas de vecteurs aléatoires.

#### 9.3.1 Convergence en probabilité

##### Définition

La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  **converge vers  $X$  en probabilité**, ce que l'on note aussi  $X_n \xrightarrow[n]{(p)} X$ , si

$$\text{pour tout } \delta > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \delta) \xrightarrow[n]{} 0.$$

Notons que la limite est unique (à égalité presque sûre près) :

##### Propriété

Si  $X_n \xrightarrow[n]{(p)} X$  et  $X_n \xrightarrow[n]{(p)} X'$ , alors  $X = X'$  p.s..

Donnons un exemple fondamental, qui illustre également l'utilisation de l'inégalité de Tchébychev.

##### Proposition (Loi faible des grands nombres $L^2$ )

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable (c'est-à-dire que  $\mathbb{E}[(X_1)^2] < \infty$ ). Alors on a la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n]{(p)} \mathbb{E}[X_1].$$

**NB.** Comme les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$ , ont même loi, elles ont même espérance :  $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \dots$ , et de même  $\mathbb{E}[(X_1)^2] = \mathbb{E}[(X_2)^2] = \dots$ .

**Démonstration :** Notons  $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ . Cette variable aléatoire vérifie

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}(\mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n}(\mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_1]) = \mathbb{E}[X_1]$$

et

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2} (\text{Var}(X_1) + \cdots + \text{Var}(X_n))$$

car  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes. Comme  $X_1, \dots, X_n$  ont même loi, cela donne

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} (\text{Var}(X_1) + \cdots + \text{Var}(X_1)) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n}.$$

Soit  $\delta > 0$ . L'inégalité de Tchébychev fournit donc ici

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]| > \delta\right) = \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]| > \delta\right) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\delta^2} = \frac{\text{Var}(X_1)}{n\delta^2} \xrightarrow[n]{} 0.$$

C'est le résultat annoncé. ■

Supposons que  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de v.a. i.i.d. de loi  $\mathcal{B}(1/2)$  (c'est-à-dire une suite de tirages à pile ou face indépendants, équilibrés). Alors  $X_1$  est bornée, donc de carré intégrable, et la proposition donne

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n]{(p)} \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}.$$

Or les  $X_i$  valent 0 ou 1, donc  $X_1 + \cdots + X_n$  est aussi le nombre d'indices entre 1 et  $n$  pour lesquels  $X_i = 1$ , de sorte que  $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$  est la proportion de tirages parmi  $X_1, \dots, X_n$  qui valent 1 (ou encore le nombre de « piles »). On a donc obtenu que quand le nombre de tirages tend vers  $+\infty$ , la probabilité que la proportion de piles s'écarte de  $1/2$  de plus que  $\delta$  converge vers 0. C'est une première forme de la loi des grands nombres, dite faible car la convergence a lieu en probabilité. Elle n'assure cependant pas que, pour chaque suite de tirages, on observe une convergence des proportions vers  $1/2$ ; ce serait une « convergence presque sûre ».

### 9.3.2 Convergence presque sûre

Ce qui suit n'est pas une définition à proprement parler mais plutôt une redite ; on l'écrit ainsi pour la mettre en parallèle avec les autres modes de convergence.

#### Définition

La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  **converge vers  $X$  presque sûrement**, noté  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ , si, presque sûrement,  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $X$ , c'est-à-dire si

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1.$$

Autrement dit  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $X$  p.s. s'il existe un événement  $\Omega' \subset \Omega$  tel que  $P(\Omega') = 1$  et, pour toute réalisation  $\omega \in \Omega'$ , la suite réelle  $(X_n(\omega))_{n \geq 0}$  converge vers  $X(\omega)$ .

#### Proposition

a) Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ , alors  $X_n \xrightarrow{(p)} X$ .

b) On a  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  si et seulement si, pour tout  $\delta > 0$ ,  $P(\limsup_n \{|X_n - X| > \delta\}) = 0$ . En particulier, si

$$\sum_{n \geq 0} P(|X_n - X| > \delta) < \infty$$

pour tout  $\delta > 0$ , alors  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ .

c) Si  $X_n \xrightarrow{(p)} X$ , alors il existe une sous-suite  $(X_{\varphi(k)})_k$  qui converge vers  $X$  p.s..

**Démonstration :** a) On suppose  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ . Soit  $\delta > 0$ . Vu la convergence, on a presque sûrement  $|X_n - X| \leq \delta$  pour  $n$  grand, et donc l'événement contraire, « pour tout  $n$ , il existe  $k \geq n$  tel que  $|X_k - X| > \delta$  », est négligeable :

$$0 = P(\forall n, \exists k \geq n, |X_k - X| > \delta) = \lim_n \downarrow P(\exists k \geq n, |X_k - X| > \delta).$$

Or  $P(\exists k \geq n, |X_k - X| > \delta) \geq P(|X_n - X| > \delta)$ , donc cette dernière probabilité converge vers 0.

b) On a  $X_n \not\xrightarrow{p.s.} X$  si et seulement si il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour une infinité de  $n$ ,  $|X_n - X| > \frac{1}{N}$ . Autrement dit,

$$1 - P(X_n \rightarrow X) = P\left(\bigcap_N \limsup_n \{|X_n - X| > \frac{1}{N}\}\right) = \lim_N \uparrow P\left(\limsup_n \{|X_n - X| > \frac{1}{N}\}\right).$$

L'équivalence b) en résulte rapidement. Le cas particulier est une conséquence du lemme de Borel–Cantelli de la Section 9.1.

c) Si  $X_n \rightarrow X$  en probabilité, on peut construire la suite  $\varphi(k)$  par récurrence de telle sorte que, pour tout  $k$ ,  $\varphi(k+1) > \varphi(k)$  et

$$P\left(|X_{\varphi(k+1)} - X| > \frac{1}{k+1}\right) \leq 2^{-(k+1)}.$$

Alors, pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\sum_k P(|X_{\varphi(k)} - X| > \delta) \leq \delta^{-1} + \sum_{k \geq \delta^{-1}} P(|X_{\varphi(k)} - X| > \delta) \leq \delta^{-1} + \sum_k P(|X_{\varphi(k)} - X| > \frac{1}{k}) \leq \delta^{-1} + \sum_k 2^{-k} < \infty,$$

donc le b) s'applique à la suite  $(X_{\varphi(k)})_k$ , qui converge donc p.s. vers  $X$ . ■

#### Théorème (Loi forte des grands nombres)

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, intégrables (c'est-à-dire telles que  $E[|X_1|] < \infty$ ). Alors on a

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E[X_1].$$

**Démonstration :** Dans le cas particulier où les variables sont dans  $L^4$  (c'est-à-dire  $E[(X_1)^4] < \infty$ ), qui couvre le cas borné (tirages à pile-ou-face, sondages...), on peut donner une preuve très courte qui s'apparente à celle de la loi faible des grands nombres  $L^2$ . Notons  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . On peut supposer  $E[X_1] = 0$  (car ensuite, on peut écrire

$X_n = (X_n - E[X_1]) + E[X_1]$  pour s'y ramener). En développant puis en regroupant les termes, et en notant  $X = X_1$ ,

$$\begin{aligned} E[(S_n)^4] &= E\left[\sum_{1 \leq i,j,k,l \leq n} X_i X_j X_k X_l\right] = \sum_{1 \leq i,j,k,l \leq n} E[X_i X_j X_k X_l] \\ &= nE[X^4] + 4n(n-1)E[X]E[X^3] + 6n(n-1)(n-2)E[X]^2E[X^2] + 3n(n-1)E[X^2]^2 + n(n-1)(n-2)(n-3)E[X]^4 \\ &= nE[X^4] + 3n(n-1)E[X^2]^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 3n^2E[X^2]^2 \end{aligned}$$

d'où (par le TCM pour les séries positives),

$$E\left[\sum_{n \geq 1} \left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] = \sum_{n \geq 1} \frac{E[(S_n)^4]}{n^4} < \infty,$$

et par conséquent  $\sum_n \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 < \infty$  p.s. Ainsi, p.s. le terme général  $\frac{(S_n)^4}{n^4}$  tend vers 0 et en particulier  $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$  p.s., ce que l'on voulait démontrer. ■

Pour des tirages à pile ou face, ce résultat traduit l'observation : pour (presque) toute suite de tirages, la proportion de piles converge vers 1/2. Plus généralement, si la probabilité de pile est  $p$ , la proportion de piles converge vers  $p$ . Ceci justifie l'interprétation de la probabilité  $P(A)$  *a posteriori* comme fréquence d'occurrence de l'événement  $A$  si on répète l'expérience **de façon indépendante** un grand nombre de fois.

### 9.3.3 Convergences $L^1$ et $L^2$

En tant que fonctions mesurables, on peut définir pour les variables aléatoires les normes  $L^1$  et  $L^2$  et donc les convergences associées :

#### Définition

La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  de variables aléatoires  $L^1$  **converge vers  $X$  dans  $L^1$**  si  $\|X_n - X\|_1 \xrightarrow[n]{} 0$ , c'est-à-dire si

$$E[|X_n - X|] \xrightarrow[n]{} 0.$$

La suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  de variables aléatoires  $L^2$  **converge vers  $X$  dans  $L^2$**  si  $\|X_n - X\|_2 \xrightarrow[n]{} 0$ , c'est-à-dire si

$$E[|X_n - X|^2] \xrightarrow[n]{} 0.$$

#### Proposition

Si  $X_n \xrightarrow[n]{L^p} X$  (où  $p = 1$  ou  $2$ ), alors  $X_n \xrightarrow[n]{(p)} X$ .

**Démonstration :** En effet, pour tout  $\delta > 0$ ,

$$P(|X_n - X| > \delta) = P(|X_n - X|^p > \delta^p) \leq \frac{E[|X_n - X|^p]}{\delta^p} \xrightarrow[n]{} 0.$$

En revanche, aucune implication n'existe en général entre convergence presque sûre et convergence  $L^1$  ou convergence  $L^2$ . On a par contre la propriété suivante qui résulte directement du TCD.

#### Proposition

a) Si  $X_n \xrightarrow[n]{} X$  p.s., et si  $|X_n| \leq Z$  pour tout  $n$ , où  $E[Z] < \infty$ , alors  $X_n \xrightarrow[n]{L^1} X$ .

b) Si  $X_n \xrightarrow[n]{} X$  p.s., et si  $|X_n| \leq Z$  pour tout  $n$ , où  $E[Z^2] < \infty$ , alors  $X_n \xrightarrow[n]{L^2} X$ .

Par ailleurs, la convergence  $L^2$  implique la convergence  $L^1$  :

#### Proposition

Si  $X_n \xrightarrow[n]{L^2} X$ , alors  $X_n \xrightarrow[n]{L^1} X$ .

**Démonstration :** Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables  $|X_n - X|$  et 1,

$$\|X_n - X\|_1 = E[|X_n - X|] \leq E[|X_n - X|^2]^{1/2} E[1]^{1/2} = \|X_n - X\|_2,$$

d'où le résultat. ■

## 9.4 Convergence en loi

### 9.4.1 Définition et propriétés

#### Définition

La suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  **converge vers  $X$  en loi**, noté  $X_n \xrightarrow[n]{(loi)} X$ , si, pour toute fonction continue bornée  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\varphi(X_n)] = E[\varphi(X)]$ .

Une remarque essentielle est que la variable aléatoire  $X$  pourrait être remplacée par n'importe quelle variable aléatoire ayant la même loi : la variable aléatoire limite n'est pas unique, mais sa loi est unique. C'est pourquoi on peut aussi dire que  $X_n$  **converge en loi vers la loi  $\mu$** , noté  $X_n \xrightarrow[n]{(loi)} \mu$  si  $X_n \xrightarrow[n]{(loi)} X$  où  $X$  suit la loi  $\mu$ .

De plus, on note que cette convergence ne dépend que de la loi de  $X_n$  pour chaque  $n$ , et non pas de la loi jointe de  $(X_n)_{n \geq 0}$  : il s'agit en fait de la convergence de la loi de  $X_n$  vers la loi de  $X$ . En cela, cette convergence est différente des précédentes.

On dispose de nombreuses manières souvent plus pratiques de démontrer une convergence en loi.

#### Théorème

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(X_n)_n$  converge vers  $X$  en loi.
- (ii) pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée,  $E[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n]{} E[\varphi(X)]$ .
- (iii) pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue à support compact,  $E[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n]{} E[\varphi(X)]$ .
- (iv) en tout point  $t \in \mathbb{R}$  où la fonction de répartition  $F_X$  est continue (c'est-à-dire que  $P(X = t) = 0$ ),
 
$$F_{X_n}(t) \xrightarrow[n]{} F_X(t).$$
- (v) pour tout réel  $t$ ,  $\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n]{} \Phi_X(t)$ . (L'équivalence de (v) avec (i) est appelée le **théorème de Lévy**)

Le point (iv) s'avère notamment utile quand  $X_n$  est définie comme min ou max de v.a. indépendantes.

Le point (v) s'avère notamment utile quand  $X_n$  est définie comme somme de v.a. indépendantes.

La convergence en loi est plus faible que toutes les autres, en effet :

#### Proposition

- a) Si  $X_n \xrightarrow[n]{(p)} X$ , alors  $X_n \xrightarrow[n]{(loi)} X$ .
- b) Dans le cas où  $X$  est constante égale à  $c \in \mathbb{R}$ ,  $X_n \xrightarrow[n]{(p)} c$  équivaut à  $X_n \xrightarrow[n]{(loi)} c$ .

Signalons un cas particulier :

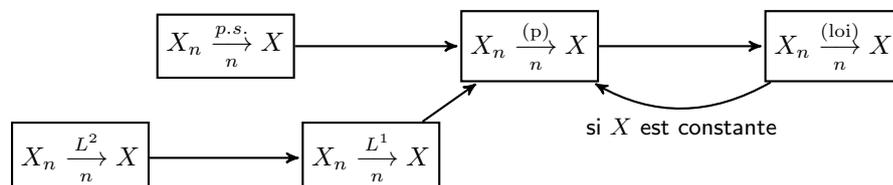
#### Proposition

Si les v.a.  $X_n$  sont à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , alors  $X_n \xrightarrow[n]{(loi)} X$  si et seulement si, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ,

$$P(X_n = x) \xrightarrow[n]{} P(X = x).$$

**NB.** Par cette proposition, la propriété citée lors de la définition de la loi de Poisson p. 55 peut se voir comme une convergence en loi : si  $X_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p_n)$  où  $np_n \xrightarrow[n]{} \lambda > 0$ , alors  $X_n \xrightarrow[n]{(loi)} \mathcal{P}(\lambda)$ .

Le schéma suivant résume les implications entre les modes de convergence :



### 9.4.2 Théorème central limite

On rappelle que la loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ , a pour fonction caractéristique

$$\Phi : t \mapsto e^{itm - t^2 \sigma^2 / 2}.$$

En particulier, la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  a pour fonction caractéristique  $t \mapsto e^{-t^2/2}$ .

#### Théorème (Théorème central limite)

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable. On note  $m = E[X_1]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ . Alors on a

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

**NB.** Le cas particulier  $\sigma^2 = 0$  correspond au cas où presque sûrement  $X_n = m$  (variables “aléatoires” constantes) et est donc sans intérêt (on pose  $\mathcal{N}(0, 0) = \delta_0$ ). On suppose dorénavant  $\sigma > 0$ .

Signalons une autre écriture de cet énoncé :

$$\sqrt{n} \left( \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m \right) \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

De plus, si  $Z$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  alors  $\sigma Z$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , de sorte que l'on peut aussi écrire ces énoncés sous la forme

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left( \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m \right) \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Ceci montre que l'« erreur » dans la loi des grands nombres est de l'ordre de  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  et qu'elle est approximativement distribuée selon une loi normale.

On peut aussi en donner une expression plus élémentaire, à l'aide de l'équivalence (iv) précédente :

$$\text{pour tous } a < b, \quad P \left( a \leq \frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq b \right) \xrightarrow[n]{} \int_a^b e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

(on peut appliquer (iv) en tout  $t \in \mathbb{R}$  car la loi limite est continue).

**Démonstration :** On utilise l'équivalence (v) du théorème. Remarquons d'abord que, quitte à remplacer  $X_n$  par  $X_n - E[X_n]$ , on peut supposer que  $m = E[X_n] = 0$ . On a, pour tout  $n$ ,

$$\Phi_{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}}(t) = E \left[ e^{it \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}} \right] = E \left[ e^{it \frac{X_1}{\sqrt{n}}} \cdots e^{it \frac{X_n}{\sqrt{n}}} \right] = E \left[ e^{it \frac{X_1}{\sqrt{n}}} \right] \cdots E \left[ e^{it \frac{X_n}{\sqrt{n}}} \right] = E \left[ e^{it \frac{X_1}{\sqrt{n}}} \right]^n$$

car  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et de même loi. On en déduit donc que

$$\Phi_{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}}(t) = \Phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n.$$

Notons maintenant (voir Section 8.4) que, si  $E[(X_1)^2] < \infty$ , alors  $\Phi_{X_1}$  a un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par

$$\Phi_{X_1}(t) = 1 + itE[X_1] - \frac{t^2}{2} E[(X_1)^2] + o(t^2) = 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2} + o(t^2)$$

(vu que  $E[X_1] = 0$ ). Comme  $\frac{t}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ , on a donc, pour tout réel  $t$ ,

$$\Phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2n} + o_n \left( \frac{1}{n} \right),$$

et par suite

$$\Phi_{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left( 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2n} + o_n \left( \frac{1}{n} \right) \right)^n = \exp \left( n \ln \left( 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2n} + o_n \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right) = \exp \left( -\frac{t^2 \sigma^2}{2} + o_n(1) \right),$$

autrement dit

$$\Phi_{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow[n]{} \exp \left( -\frac{t^2 \sigma^2}{2} \right) = \Phi_Z(t),$$

où  $Z$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Vu l'équivalence (v), il en résulte que  $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers  $Z$ , ce que l'on voulait démontrer. ■