Partiel n° 1 — 5 novembre 2024

(Durée : 2h15)

Les réponses doivent être *justifiées proprement.*
En particulier, lorsque l'on utilisera un énoncé du cours, on veillera à vérifier les hypothèses nécessaires ; par exemple, on n'écrira pas une intégrale sans avoir préalablement justifié quelle est *bien définie.*

Question de cours. Énoncer le théorème de convergence dominée, en incluant toutes les hypothèses nécessaires.

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Montrer que l'application $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ définie par

$$\nu(A) = \int f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu$$

est une mesure sur E. *(Justifier correctement les étapes.)*

À quelle condition la mesure ν est-elle finie ?

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(0) = 0$ et, pour $k \geq 1$, $f_n(k) = 2 \cdot 2^{-2nk} - 2^{-nk}$. On pose $f = \sum_{n \geq 0} f_n$.

a) Montrer que $f(0) = 0$ et que, pour $k \geq 1$, $f(k) = \frac{1}{1+2^{-k}}$.

b) Soit $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Que vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu$?
(Justifier comme toujours la définition de l'intégrale.)

c) A-t-on dans ce cas $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} \Big(\sum_{n \geq 0} f_n(k) \Big) \mathrm{d}\mu(k) = \sum_{n \geq 0} \Big(\int_{\mathbb{N}} f_n(k) \mathrm{d}\mu(k) \Big)$?

Correction a posteriori : pour que l'exercice soit intéressant, il faut prendre seulement $n \geq 1$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |\sin(x)|^{1/n} f(x) \mathrm{d}x$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable ;

b) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n^{-k} \binom{n}{k}$;
Indications : (i) écrire la somme comme l'intégrale d'une fonction à préciser par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. (ii) on rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

c) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{ne^{-x}}{1 + nx} \mathrm{d}x.$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On introduit la fonction F définie, pour $t \in]0, +\infty[$, par

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) \mathrm{d}x \, .$$

a) Montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-tx} f(x)$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que $\lim_{t \to \infty} F(t) = 0$.

c) Montrer que, pour tout $u > 0$, la fonction F est dérivable sur $]u, +\infty[$, de dérivée donnée par $F'(t) = -\int_0^{\infty} xe^{-tx} f(x) \mathrm{d}x$.

Dans le reste de l'exercice, on considère la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ (qui est bornée sur $\mathbb{R}_+$) ; on rappelle que l'on a vu en TD que la fonction f *n'est pas* Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On donne la formule suivante, qui sera utile par la suite :

$$\text{pour tous } t > 0 \text{ et } a > 0 \quad \int_a^\infty e^{-tx} \sin(x)\mathrm{d}x = \frac{e^{-at}}{1+t^2}\big(t\sin(a) - \cos(a)\big)\,. \tag{$*$}$$

d) En utilisant la question c) et la formule $(*)$, montrer que l'on a

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)\,.$$

En déduire que $\lim_{t\downarrow 0} F(t) = \frac{\pi}{2}$.

Il est donc naturel de vouloir dire que l'on a $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, mais il reste à montrer que cela coïncide avec la définition habituelle, c'est-à-dire que l'on a bien

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x\,.$$

e) Montrer que, pour tout $a > 0$ on a

$$\left|F(t) - \int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \le \int_0^a |1 - e^{-tx}|\mathrm{d}x + \frac{1}{a}\left|\int_a^{+\infty} e^{-tx}\sin(x)\mathrm{d}x\right|.$$

f) En utilisant la formule $(*)$, montrer que pour tout $a > 0$ et tout $t > 0$ on a $\left|\int_a^{+\infty} e^{-tx}\sin(x)\mathrm{d}x\right| \le 2$.

g) Montrer que pour tout $a > 0$ on a

$$\left|\frac{\pi}{2} - \int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \le \frac{2}{a}\,.$$

h) Conclure que $\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice bonus. Soit λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, où $d \ge 2$. Montrer que $\lambda_d(\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\}) = 0$.