# Examen partiel du 13 novembre 2023

Durée : 2 heures 15 minutes

*Pour seul document, une feuille A4 de notes manuscrites, recto-verso, à votre nom, est autorisée. Tout appareil électronique est interdit.*

*Toute réponse doit être soigneusement rédigée et justifiée.*

**Exercice 1.** Soit $a > 0$. On considère la mesure $\mu$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta_{2^n} = \delta_1 + a\delta_2 + a^2\delta_4 + a^3\delta_8 + \cdots$$

**1.** Que valent les mesures d'ensembles suivantes : $\mu(\{0\})$, $\mu(\{1\})$, $\mu([0,1])$, $\mu(\mathbb{R})$ ? $\mu$ est-elle une mesure finie ?
**2.** Justifier si les intégrales suivantes sont bien définies, et les calculer (en fonction de $a$) :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) d\mu(x), \qquad \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu(x), \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \, d\mu(x), \qquad \int_{\mathbb{R}} \sin(\pi x) d\mu(x).$$

**Exercice 2.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $E$ dans $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction mesurable de $E$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $n$, $f_n$ est intégrable, que $f$ est intégrable, et que $\|f_n - f\|_1 \to 0$, c'est-à-dire

$$\int_E |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**1.** Justifier que $\int f_n d\mu$ converge vers $\int f d\mu$ quand $n \to \infty$.
**2.** Construire une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que, pour tout $k$,

$$\|f_{n_k} - f\|_1 \leq \frac{1}{2^k}.$$

**3.** Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k$, donner une majoration de

$$\mu\big(\{x \in E \,|\, |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big),$$

afin d'en déduire que

$$\sum_{k \geq 0} \mu\big(\{x \in E \,|\, |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) < \infty.$$

**4.** En déduire que la fonction $N_\varepsilon : x \mapsto N_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\}}$ est intégrable (sur $E$). Que peut-on en déduire pour l'ensemble $\{x \in E \mid N_\varepsilon(x) = \infty\}$ ?
**5.** En déduire la mesure de l'ensemble $A = \bigcup_{n \geq 1} \{x \in E \,|\, N_{1/n}(x) = \infty\}$.
**6.** Conclure que pour presque tout $x \in E$, la suite $(f_{n_k}(x))_{k \geq 0}$ converge vers $f(x)$. *Décrire les éléments de $A^c$.*

$\rightsquigarrow$ *On a donc montré que si une suite de fonctions converge dans $L^1$, alors elle possède une sous-suite qui converge simplement presque partout.*

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq Ce^{x^2}$, où $C$ est une constante. On admet la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
**1.** Montrer que la suite de terme général

$$I_n(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2} f(x) dx$$

est bien définie pour $n \geq 2$, et converge, et donner sa limite.
**2.** Montrer que la suite de terme général

$$J_n(f) = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2} f(x) dx$$

converge, et donner sa limite. *Indication : on pourra commencer par faire un changement de variable.*
En déduire un équivalent de la suite $(I_n(f))_{n \geq 0}$, si $f(0) \neq 0$.
**3.** On considère la fonction suivante, sur $]1, +\infty[$ :

$$I : t \mapsto I(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2} f(x) dx.$$

**3.a)** Montrer que $I$ est continue sur $]1, +\infty[$.
**3.b)** Montrer que $I$ est dérivable sur $]1, +\infty[$, et donner sa dérivée (sous forme intégrale).
**3.c)** On suppose de plus $|f(x)| \leq cx^2$ pour $x \in [-1, 1]$, où $c$ est une constante. Soit $u > 1$. Justifier que $\int_{[u,\infty[} I(t) dt$ existe et l'exprimer à l'aide d'une intégrale de la forme $I_t(g) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2} g(x) dx$ pour une fonction $g$ à préciser.
**4.** On suppose que $f(0) = 0$, et que $f$ est deux fois dérivable en 0, avec $f''(0) \neq 0$.
**4.a)** À l'aide de développements limités, déterminer la limite de la fonction $g : x \mapsto g(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{x^2}$ en 0.
**4.b)** En remarquant que $g = h'$, où $h : x \mapsto h(x) = \frac{f(x)}{x}$, exprimer $I_n(g)$ en fonction de $I_n(f)$.
**4.c)** En déduire un équivalent de $I_n(f)$.