Collection d'exercices

Table des matières

1 Manipulation d'événements, indépendance

1.1 À savoir faire/classiques

Exercice 1.1. On considère une suite $(A_k)_{k\geq 1}$ d'événements. Montrer que

a) si $\mathbb{P}(A_k) = 0$ pour tout k, alors $\mathbb{P}\big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\big) = 0$;

b) si $\mathbb{P}(A_k) = 1$ pour tout k, alors $\mathbb{P}\big(\bigcap_{k\geq 1} A_k\big) = 1$.

Exercice 1.2. Soit n un entier naturel non nul. En considérant un groupe de n personnes et en supposant que chaque année comporte 365 jours et que les jours de naissances sont tous équiprobables, on veut calculer la probabilité que deux personnes aient la même date d'anniversaire.

a) Proposer un espace probabilisé pour décrire cette expérience aléatoire.

b) Calculer la probabilité que deux personnes au moins soient nées le même jour.

c) Montrer que si $n \geq 23$, cette probabilité est supérieure à $1/2$.

Exercice 1.3. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité $1-p$.

a) On note A_n l'événement "Il n'y a que des Face lors des n premiers lancers". Interpréter l'événement $A = \bigcap_n A_n$, et calculer $\mathbb{P}(A)$.

b) On note B_i l'événement "Le $i^{\text{ème}}$ lancer est Pile". Interpréter l'événement $B = \bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{i\geq k} B_i$ et B^c, et montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.

Exercice 1.4. (*Faux positifs*). Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99% (lorsque cette maladie est effectivement présente). En revanche, pour un individu sain, la probabilité que le test soit positif est de $0,1\%$ (on dit que $0,1\%$ est le taux de faux positifs).

a) Un patient fait le test, qui est positif. Quelle est la probabilité (conditionnelle) que l'individu soit réellement malade ?

b) Le même patient refait le test, qui est de nouveau positif. Quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

Exercice 1.5. Un chimpanzé tape à la machine à écrire en appuyant chaque seconde sur une touche choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'il parvienne à écrire le texte complet de *Hamlet* (pas forcément du premier coup), c'est-à-dire qu'à un certain moment il écrive d'une traite le texte de cette pièce ?

1.2 Pour pratiquer

Exercice 1.6. Soit Ω un ensemble. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur Ω.

a) Décrire en français et sans utiliser les expressions "quel que soit" ni "il existe" les parties suivantes de Ω
$A = \bigcup_{a\in\mathbb{N}}\bigcup_{b\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq 1}\{\omega \in \Omega\,,\ a \leq X_n(\omega) \leq b\}$;

$B = \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{m\geq n} \{\omega \in \Omega\,,\ X_n(\omega) - X_m(\omega) \geq 0\}\,;$
$C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} \bigcup_{m\geq N} \left\{\omega \in \Omega\,,\ |X_n(\omega) - X_m(\omega)| > \frac{1}{k}\right\}\,.$

b) Faire l'opération de traduction inverse pour les parties suivantes de Ω

	l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$...
D	... ne soit pas bornée supérieurement ,
E	... tende vers $+\infty$,
F	... vérifie $\liminf_{n\to+\infty} X_n \leq 1$.

Exercice 1.7. On lance simultanément un dé à n faces et un dé à m faces. Quelle est la probabilité que le premier dé donne un résultat (strictement) supérieur au premier.

Exercice 1.8. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement (sans remise) n boules de l'urne, avec $1 \leq n \leq N$. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges ($M < N$) et les boules numérotées de $M+1$ à N sont blanches. Soit A_k l'événement {La k-ième boule tirée est rouge}.

a) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(A_k \cap A_m)$.

Exercice 1.9. On effectue des lancers successifs de dés : pour le n^{e} lancer, on utilise un dé à n faces équiprobables.

a) On note A_n l'événement "le n^{e} dé tombe sur 1". On note $A = \bigcup_{n\geq 2} A_n$. Interpréter l'événement A et montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

b) On note $B = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n$. Interpréter l'événement B et montrer que $\mathbb{P}(B) = 1$.

Exercice 1.10. On tire un nombre dans $[0, 1]$ uniformément au hasard.

a) Pour $x \in [0, 1]$, on note A_x l'événement "le nombre tiré vaut x". Que vaut $\mathbb{P}(A_x)$? Que vaut $\mathbb{P}(\bigcup_{x\in[0,1]} A_x)$?

b) On note B l'événement "le nombre tiré est algébrique". Exprimer l'événement B en fonction des événements A_x, et montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.

c) Un nombre calculable est un réel pour lequel il existe un algorithme (ou une machine de Turing) permettant de donner n'importe quelle décimale de ce nombre. Par exemple, π est un nombre calculable : on peut écrire un programme `pi`, tel que `pi(`n`)` renvoie la $n^{\text{ème}}$ décimale de π. On note C l'événement "le nombre tiré est calculable" : montrer que $\mathbb{P}(C) = 0$. En déduire qu'il existe des nombres non calculables.

Exercice 1.11. On propose un QCM à un étudiant : 5 réponses possibles sont proposées. L'étudiant connaît (et donne) la bonne réponse avec probabilité p, et s'il ne la connaît pas, il choisit une des 5 possibilités au hasard.

a) Quelle est la probabilité que la réponse donnée par l'étudiant soit la bonne ?

b) Le correcteur, une fois la copie en main, voit que l'étudiant a donné la bonne réponse. Quelle est la probabilité que l'étudiant connaissait en effet la bonne réponse ?

2 Variables aléatoires, calculs de lois, moments

2.1 Exercices généraux

Exercice 2.1. Montrer qu'une v.a. X positive dont l'espérance est nulle est nulle p.s.

Exercice 2.2. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que X et Y ont même loi. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Est-il vrai que $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi ? Est-il vrai que $X + Z$ et $Y + Z$ ont même loi ?

Exercice 2.3. Soit X une v.a. réelle, de fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$. On définit l'inverse généralisée de F : pour tout $y \in]0, 1[$, par $F^{-1}(y) := \inf\{x, F(x) \geq y\}$. Soit $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$. Montrer que $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

Exercice 2.4. (*Inégalité de Paley-Zygmund*). Soit Z une variable aléatoire réelle positive telle que $\mathbb{P}(Z > 0) > 0$. Montrer que pour tout $\theta \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}(Z \geq \theta\mathbb{E}[Z]) \geq (1-\theta)^2 \frac{\mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z^2]}.$$

2.2 Variables discrètes, les classiques

Exercice 2.5. Montrer que si U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ alors la partie entière de nU suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n-1\}$.

Exercice 2.6. *Absence de mémoire pour la loi géométrique.*

a) Soit T une v.a. géométrique de paramètre θ. Calculer $\mathbb{P}(T > n)$ pour tout entier naturel, puis montrer que $\mathbb{P}(T > n + p \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > p)$.

b) Soit T une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que pour tous entiers non nuls n et p, on a $\mathbb{P}(T > n) > 0$ et $\mathbb{P}(T > n + p \,|\, T > n) = \mathbb{P}(T > p)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

Exercice 2.7. Soit X et Y deux v.a. indépendantes, de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Calculer la loi de $X + Y$.

Exercice 2.8. *(Indépendance et indépendance deux à deux)*. On suppose données, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ deux variables de Bernoulli ϵ_1 et ϵ_2, indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$ avec $\mathbb{P}(\epsilon_i = +1) = \mathbb{P}(\epsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$, $(i = 1, 2)$.

a) Montrer que la v.a. $\epsilon_1\epsilon_2$ est indépendante d'une part de ϵ_1, et d'autre part de ϵ_2.

b) La v.a. $\epsilon_1\epsilon_2$ est-elle indépendante du couple (ϵ_1, ϵ_2) ?

Exercice 2.9. Montrer que, si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 2.10. Une truite pond des oeufs au fond du torrent. Leur nombre N suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Chaque oeuf survit avec une probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres. On note M le nombre d'oeufs qui survivent.

a) Donner la loi jointe de (N, M). Donner la loi marginale et l'espérance de M.

b) M et $N - M$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.11. Calculer la fonction génératrice des lois de Bernoulli(p), Binomiale(n, p), Géométrique(p) et de Poisson(λ).

Exercice 2.12. Soient X et Y deux v.a. indépendantes, suivant une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Calculer la fonction génératrice de $X + Y$. Qu'en déduire ?

Exercice 2.13. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. et soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de $(X_i)_{i\geq 1}$. On pose $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (et $Y = 0$ si $N = 0$).

a) Montrer que la fonction génératrice de Y satisfait $G_Y(s) = G_N(G_{X_1}(s))$

b) En déduire $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathrm{Var}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[N]$ et $\mathrm{Var}(X_1), \mathrm{Var}(N)$.

c) Reprendre l'exercice 10 : donner la fonction génératrice de M, et retrouver la loi de M.

Exercice 2.14. *(La ruine du joueur)*. Un joueur va au casino avec une somme d'argent $a \in \mathbb{N}$. À chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité p et perdre 1 euro avec une probabilité $1 - p$. Le but du joueur est de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $N \geq a$, $N \in \mathbb{N}$. Cependant, il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $q_N(a)$ sa probabilité de succès (atteindre N avant la ruine).

a) Donner $q_N(0)$ et $q_N(N)$.

b) Soit $a > 0$. En raisonnant sur ce qui s'est passé à la première partie, montrer la relation

$$q_N(a) = pq_N(a + 1) + (1 - p)q_N(a - 1)\,.$$

c) Déduire la valeur de $q_N(a)$ pour tout $a \in \{0, \dots, N\}$ si $p = 1/2$; si $p \neq 1/2$.

2.3 Variables discrètes, pour pratiquer

Exercice 2.15. On lance deux dés à 6 faces numérotés de 1 à 6. On note X et Y les variables aléatoires correspondant aux résultats des deux dés. On pose $W = X + Y$ et $Z = X - Y$.

a) Les variables W et Z sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}(W, Z)$.

b) Donner la loi jointe et les lois marginales de (W, Z).

Exercice 2.16. Soit $\lambda > 0$ un réel. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, la variable aléatoire $X(X-1)\dots(X-k+1)$ est intégrable et calculer son espérance. Calculer $\mathbb{E}[X^m]$ pour $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ et vérifier que pour chacune de ces valeurs de m, $\mathbb{E}[X^m]$ est le nombre de partitions d'un ensemble à m éléments lorsque $\lambda = 1$. *On peut démontrer que cette assertion est vraie pour tout* $m \geq 1$.

Exercice 2.17. *(Urne de Polya)*. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. À chaque tour, une boule est prélevée de l'urne, et est remplacée par deux boules de la même couleur (que celle que l'on vient de prélever). On souligne qu'après n tours, il y a $n+2$ boules dans l'urne. On note B_n le nombre de boules blanches dans l'urne après n tours, et on cherche à déterminer la loi de B_n pour tout $n \geq 1$.

a) Donner la loi de B_1 et de B_2.

b) Pour $n \geq 1$, donner $\mathbb{P}(B_n = k \mid B_{n-1} = k)$ et $\mathbb{P}(B_n = k + 1 \mid B_{n-1} = k)$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

c) En déduire par récurrence sur n que $\mathbb{P}(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n + 1\}$.

Exercice 2.18. Soit S une variable aléatoire à valeurs dans $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire une permutation aléatoire dont la taille n est elle aussi aléatoire. On suppose que la loi de S est donnée par

$$\mathbb{P}(S=\sigma) = \frac{1}{\ell(\sigma)!}(1-p)^{\ell(\sigma)-1}p\,, \qquad \forall\, \sigma \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n\,,$$

où $p \in]0,1[$ et où $\ell(\sigma)$ désigne la taille de σ, c'est-à-dire l'entier n tel que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

a) Vérifier que cela définit bien la loi d'une variable aléatoire discrète.

b) Donner la loi de $\ell(S)$. Donner la loi de S sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot \mid \ell(S)=n)$.

c) Calculer la probabilité de l'événement $A =$ "S n'a aucun point fixe".

Exercice 2.19. Soient $2n$ personnes, n hommes et n femmes, réparties de manière aléatoire dans deux groupes de n personnes. On note X le nombre de femmes dans le premier groupe.

a) Donner la loi de X.

b) Calculer $\mathbb{E}[X]$. *Indic.* Écrire $X = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{A_i}$ où $A_i =$"la $i^{\text{ème}}$ femme est dans le premier groupe".

c) Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

d) Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\mathbb{P}(|X - \frac{n}{2}| > x\sqrt{n}) \leq \frac{1}{4x^2}$.

Exercice 2.20. On considère n personnes sur un réseau social : on suppose que les personnes i et j sont reliées avec probabilité p, indépendamment des autres relations du réseau. Plus formellement, on considère $(X_{\{i,j\}})_{\{i,j\}\subset\{1,\dots,n\}}$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p, représentant les liens entre les personnes du réseau : les personnes i et j sont reliées si et seulement si $X_{\{i,j\}} = 1$. On souhaite savoir s'il y a des personnes "isolées" dans le réseau : on note A_i l'événement "la i^{e} personne n'est reliée à personne", et $W_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ le nombre de personnes isolées (parmi les n personnes).

a) Calculer $\mathbb{P}(A_i)$ et $\mathbb{E}(W_n)$.

b) Montrer que $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) = p(1-p)^{2n-3}$ pour $i \neq j$. Calculer $\mathrm{Var}(W_n)$, et en déduire que $\mathrm{Var}(W_n) \leq n(1-p)^{n-1}[1+np(1-p)^{n-2}]$.

On suppose dans la suite que $p = \alpha\,\frac{\ln n}{n}$, pour un $\alpha > 0$.

c) Montrer que l'on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n) = 0$ si $\alpha > 1$, et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n) = +\infty$ si $\alpha < 1$.

d) Soit $\{W_n \geq 1\}$ l'événement qu'il existe au moins une personne isolée. Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n \geq 1) = 0$.

e) Montrer que $\mathbb{P}(W_n = 0) \leq \mathbb{P}\big(|W_n - \mathbb{E}(W_n)| \geq \mathbb{E}(W_n)\big) \leq \frac{\mathrm{Var}(W_n)}{\mathbb{E}(W_n)^2}$. En déduire que si $\alpha < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n = 0) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n \geq 1) = 1$.

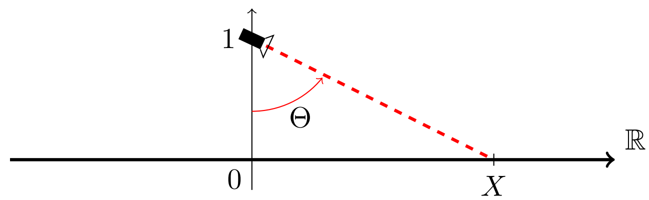
2.4 Variables réelles, les classiques

Exercice 2.21. Calculer les espérances et variance des variables $\mathcal{U}([a,b])$, Exponentielle(λ), Normale, de Cauchy, Gamma(a,λ).

Exercice 2.22. Montrer qu'une v.a. X est indépendante d'elle-même si et seulement si elle est p.s. constante. *Indication :* déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 2.23. Soit U une v.a. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Donner la loi de $-\frac{1}{a}\ln U$ pour $a > 0$.

Exercice 2.24. On suspend un laser à 1 m au dessus du sol. L'angle qu'il forme avec la verticale est aléatoire, notée Θ, et suit la loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On note X le point marqué au sol par le laser (voir la Figure ci-dessous). Donner la densité de la loi de X.



Exercice 2.25. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer les lois de $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.

Exercice 2.26. Soit (X_1, X_2) un couple de v.a. admettant la densité de probabilité :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right),$$

où $\rho \in [0, 1[$. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les densités marginales de X_1 et X_2. A quelle condition les v.a. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.27. *(Box-Müller).* Soit U, V deux variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $[0, 1]$. On pose

$$X = \sqrt{-2\ln V} \times \cos(2\pi U), \qquad Y = \sqrt{-2\ln V} \times \sin(2\pi U)$$

Montrer que X et Y sont deux variables $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes.

Exercice 2.28. Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $k = 1, 2, \cdots, n$, $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

a) Calculer la loi de $(S_1, \cdots, S_n)$.

b) Montrer que $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet la densité de probabilité

$$f_n(t) = \lambda^n e^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t).$$

c) Que vaut la fonction caractéristique de S_n ?

d) Calculer de deux manières $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}\,(S_n)$.

2.5 Variables réelles, pour pratiquer

Exercice 2.29. Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées). On suppose que X_1 admet une densité.

a) Montrer que pour tout $i \neq j$, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$.

b) En déduire que $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n) = \mathbb{P}(X_1 < \cdots < X_n)$, et calculer cette quantité.

c) Calculer $\mathbb{P}(X_n > \max_{1\leq i\leq n-1} X_i)$.

Exercice 2.30. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans l'intervalle réel $]0, \pi/2[$ de densité f_X et soit $Y = \sin(X)$. On suppose que Y suit une loi uniforme sur $]0,1[$. Quelle est la densité de X ?

Exercice 2.31. Soit $Z = (X, Y)$ une variable aléatoire uniforme sur le disque unité $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$. Donner les lois marginales de X et Y.

Exercice 2.32. Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer les loi des v.a. $U = \min(X_1, X_2)$ et $V = \max(X_1, X_2)$. En déduire les densités de probabilité correspondantes. Que vaut $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$?

Exercice 2.33. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $Z = XY$.

Exercice 2.34. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de Y/X.

Exercice 2.35. Soit L une v.a. positive admettant une densité de probabilité f et X une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de L. On définit deux v.a. L_1 et L_2 par $L_1 = XL$ et $L_2 = (1-X)L$, (cela modélise par exemple la rupture d'une chaîne moléculaire de longueur initiale aléatoire L).

a) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) ainsi que les lois de L_1 et L_2.
b) Que peut-on dire lorsque $f(x) = \lambda^2 x \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$, $(\lambda > 0)$?
c) Déterminer la loi de $Z = \min(L_1, L_2)$ dans ce cas.

Exercice 2.36. On appelle variable Gamma de paramètre $a > 0$ une variable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ dont la loi admet la densité : $e^{-t}t^{a-1}/\Gamma(a)$.

a) Soit Z_a une v.a. gamma de paramètre a. Calculer explicitement les moments entiers : $\mathbb{E}((Z_a)^n)$, en fonction de a et de $n \in \mathbb{N}$.
b) Soient Z_a et Z_b deux variables gamma indépendantes de paramètres respectifs a et b. Montrer que les variables $Z_a/(Z_a + Z_b)$ et $Z_a + Z_b$ sont indépendantes et expliciter la loi de $Z_a/(Z_a + Z_b)$.

Exercice 2.37. *Entropie et loi normale.* Pour un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ de densité f_X, on définit l'entropie de (la loi de) X par

$$H_X := -\int_{\mathbb{R}^n} \log(f_X(x)) f_X(x) \mathrm{d}x = -\mathbb{E}\big(\log f_X(X)\big),$$

si $f_X |\log f_X|$ est intégrable (par convention $0 \log 0 = 0$).

a) Exprimer H_{aX+b} en fonction de H_X, pour $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.
b) Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Calculer H_X.
c) Soit Y une variable aléatoire à densité, d'espérance nulle et de variance 1. Montrer que $H_Y \leq H_X$ où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. *Indication. Noter que l'on a l'identité* $H_X = -\mathbb{E}(\log f_X(Y))$. *Autrement dit, la variable aléatoire* $\mathcal{N}(0, 1)$ *est celle qui maximise l'entropie parmi les variables aléatoires centrées réduites.*

2.6 Fonction caractéristique, les classiques

Exercice 2.38. Montrer que X est une variable aléatoire symétrique (i.e. X et $-X$ ont la même loi) si et seulement si φ_X est à valeurs réelles.

Exercice 2.39. *(loi de Cauchy).* Donner la fonction caractéristique :

a) si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$;

b) si Y possède la densité $f(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ (exponentielle symétrique) ;

c) si Z suit une loi de Cauchy de paramètre λ, c'est-à-dire si X a pour densité $\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}$ (Indication : on pourra utiliser la question précédente).

Exercice 2.40. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, et $\varphi(t)$ sa fonction caractéristique.

a) Montrer que $\varphi'(t) = -t\sigma^2\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En déduire $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.41. Montrer, en utilisant la fonction caractéristique, que

a) la somme de deux v.a. de Poisson indépendantes est une v.a. de Poisson ;

b) la somme de deux v.a. Gaussiennes indépendantes est une v.a. Gaussienne ;

c) la somme de deux v.a. de Cauchy indépendantes est une v.a. de Cauchy.

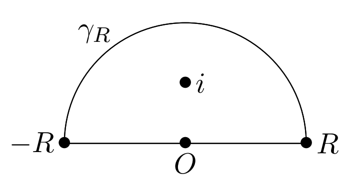
Exercice 2.42. *(TCL).* On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$ et on note $\varphi(t)$ la fonction caractéristique de X. On considère la variable aléatoire $Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$.

a) Donner la fonction caractéristique de Y_n, $\Phi_n(t)$, en fonction de φ, t et n.

b) Montrer que, lorsque $x \to 0$, on a $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2)$.

c) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\log \Phi_n(t) \to -\frac{1}{2}\sigma^2 t^2$, et donc que $\Phi_n(t) \to \Phi(t)$ où $\Phi(t)$ est la fonction caractéristique d'une loi que l'on précisera.

Exercice 2.43. *Fonction caractéristique de la loi de Cauchy.* Soit X une variable aléatoire de loi Cauchy(a, b), c'est-à-dire de densité $x \mapsto f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{(x-a)^2+b^2}$. Montrer que la fonction caractéristique de X est donné par : $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{iat}\mathrm{e}^{-b|t|}$.
Indication : Considérer la fonction $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{itz}}{1+z^2}$ et appliquer le théorème des résidus avec le contour suivant



Exercice 2.44. Soit $\alpha \in]0, 2[$ fixé.

a) On pose $\psi(t) := 1-(1-\cos t)^{\alpha/2}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\cos t)^k$ où les c_k sont positifs et vérifient $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$. En déduire que $\psi(t)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle.

b) Soit $\psi_n(t) := \psi(\sqrt{2}n^{-1/\alpha}t)^n$. Montrer que $\psi_n(t)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X_n. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = e^{-|t|^\alpha}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que $\varphi_\alpha(t) = \exp(-|t|^\alpha)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle.

Une variable aléatoire réelle de fonction caractéristique $e^{-|t|^\alpha}$ est dite de loi α-stable symétrique ; noter que pour $\alpha = 2$ on retrouve une loi normale. Sa densité n'est pas explicite mais donnée par la formule $f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-itx-|t|^\alpha}\mathrm{d}t$; on peut montrer qu'elle vérifie $f(x) \sim c|x|^{-(1+\alpha)}$ quand $|x| \to \infty$.

c) Montrer que si $(X_k)_{k\geq 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi α-stable symétrique alors pour tout $n \geq 1$ $n^{-1/\alpha}(X_1 + \cdots + X_n)$ est de loi α-stable symétrique.

Considérons la réciproque. Soit X est une v.a. symétrique telle que, pour $(X_k)_{k\geq 1}$ des v.a. indépendantes de même loi que X, pour tout n $n^{-1/\alpha}(X_1 + \cdots + X_n)$ est de même loi que X. Montrer qu'alors X est de loi α-stable symétrique.

3 Convergence de variables aléatoires

3.1 Convergence, quelques classiques

Exercice 3.1. Soit (X_n) une suite de v.a. de loi géométrique, $X_n \sim \mathrm{Geom}(p_n)$, avec $p_n \to 0$. Montrer que $(p_n X_n)_n$ converge en loi vers une variables exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3.2. Soit (X_n) une suite de v.a. de loi Binomiale de paramètres $(n, \lambda/n)$. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable de Poisson de paramètre λ.

Exercice 3.3. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. positives indépendantes de densité $e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. On pose $M_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$.

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.

b) Déterminer la fonction de répartition de $T_n := M_n - \log n$.

c) Montrer que la fonction de répartition de T_n converge, et donner sa limite F.

d) F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire ? Si oui, cette variable aléatoire possède-t-elle une densité ? Si oui, la donner.

Exercice 3.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 - \cos 2n\pi x\,, \quad \text{si} \quad x \in]0,1[\\ f_n(x) &= 0\,, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n, une v.a. de densité f_n. Montrer que la suite (X_n) converge en loi, bien que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas.

Exercice 3.5. *(Pas de Césaro pour la convergence en probabilité).* Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes. La fonction de répartition de X_n est donnée par

$$F_n(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = 1 - \frac{1}{x+n} \text{ si } x > 0.$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0, mais pas $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Exercice 3.6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^2 vers une variable aléatoire X, alors la suite $(X_n^2)_{n\geq 1}$ converge dans L^1 vers X^2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3.7. Montrer que X_n converge vers X en probabilité si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\Big] = 0\,.$$

Exercice 3.8. Montrer que X_n converge presque sûrement vers X si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ on a $\mathbb{P}(\sup_{n\geq N} |X_n - X| > \epsilon) \to 0$ quand $N \to \infty$.

Exercice 3.9. *(Lemme de Slutsky).* On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. qui converge en loi vers X, et $(Y_n)_{n\geq 1}$ qui converge en loi vers une constante a.

a) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers a.
b) Montrer que (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, a).
c) Donner un exemple où $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ en loi, mais où (X_n, Y_n) ne converge pas en loi vers (X, Y).
d) On suppose que (X_n) est une suite de v.a. i.i.d., d'espérance nulle, et admettant un moment d'ordre 2. On pose $V_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Donner la limite en loi de

$$\frac{1}{\sqrt{nV_n}} \sum_{i=1}^n X_i\,.$$

3.2 Borel-Cantelli, loi des grands nombres : les classiques

Exercice 3.10. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes, telle que $X_n \sim \mathrm{Bern}(p_n)$.

a) Montrer que si $\sum_n p_n < +\infty$, alors $X_n \to 0$ p.s.
b) Montrer que si $\sum_n p_n = +\infty$, alors p.s. X_n ne converge pas vers 0.

Exercice 3.11. *(Loi des grands nombres L^4).* Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $E[X_n] = 0$, et admettant un moment d'ordre 4 fini. On note $m_4 := \mathbb{E}[(X_1)^4] < +\infty$, et $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1)^2] < +\infty$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

a) Calculer $\mathbb{E}[(S_n)^4]$.
b) En déduire une majoration de $\mathbb{P}\big(|\frac{1}{n}S_n| \geq \epsilon\big)$ pour tout $\epsilon > 0$.
c) Conclure que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} |\frac{1}{n}S_n| > \epsilon\big) = 0$, et en déduire que $\mathbb{P}$-p.s. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}S_n = 0$ $(= \mathbb{E}[X_1])$.

Exercice 3.12. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $\mathbb{E}[|X_1|] = +\infty$. On veut montrer que presque sûrement, la suite $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)_{n\geq 1}$ n'a pas de limite réelle.

a) Montrer que si une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels est telle $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ converge vers une limite réelle, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$.
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = +\infty$ et conclure.

3.3 Pour pratiquer

Exercice 3.13. Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. telle que X_n suive une loi exponentielle de paramètre λ_n. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Montrer que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire $\mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 3.14. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$? Que vaut $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n)$?

b) Utiliser le théorème central limite pour montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 3.15. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, et de même loi de Bernoulli de paramètre p, $(0 < p < 1)$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = X_n X_{n+1}$, et $V_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Montrer que $\frac{1}{n} V_n$ converge p.s. vers p^2.

Exercice 3.16. Soit $(\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \infty$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \geq 1$, X_n suive la loi exponentielle de paramètre θ_n.

a) Étudier la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. Quelle hypothèse n'a-t-on pas utilisée ?

b) Reprendre la question précédente avec la convergence dans L^1.

c) Étudier, dans le cas où $\theta_n = n$ puis dans le cas où $\theta_n = \ln n$, la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 3.17. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. *indépendantes*. On suppose que $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ converge en loi. On note $\varphi_n(t)$ la fonction caractéristiue de S_n.

a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi_n(t) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$ et $|t| \leq \delta$.

b) Soit $(n_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers strictement croissante. On note $\psi_k(t)$ la fonction caractéristique de $S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$. Montrer que pour $|t| \leq \delta$ on a $\psi_k(t) = \varphi_{n_k}(t)/\varphi_{n_{k-1}}(t)$.

c) Montrer que $\lim_{k\to\infty} \psi_k(t) = 1$ pour tout $|t| \leq \delta$, puis que $\lim_{k\to\infty} \psi_k(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que $S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$ converge en loi (et donc en probabilité) vers 0.

d) En déduire que (S_n) est une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité, et conclure que S_n converge en probabilité vers une variable aléatoire S.

   On a ainsi montré que, pour une somme de variables aléatoires indépendantes*, la converge en loi est équivalente à la convergence en probabilité. En réalité, un théorème de Lévy assure que dans ce cas elle est aussi équivalente à la convergence presque sûre... cf. Quéffelec-Zuily Théorème II.21.*

e) **Application.** Soit $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante de réels telle que $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$; notons que par le critère des séries alternées, $\sum_{k=1}^n (-1)^k \alpha_k$ converge. Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de loi $\mathbb{P}(Y_k = +1) = \mathbb{P}(Y_k = -1) = 1/2$. On pose $S_n := \sum_{k=1}^n \alpha_k Y_k$. Montrer que S_n converge en loi si et seulement si $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 < +\infty$. Donner la fonction caractéristique de la limite. En conclure que S_n converge en probabilité si et seulement si $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 < +\infty$.

Exercice 3.18. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoire indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1.

a) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > \epsilon) = +\infty$. En déduire que presque sûrement, $\liminf_{n\to\infty} X_n = 0$.

b) Étudier selon les valeurs de α la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha \log n)$.

c) En déduire que presque sûrement on a, $\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{X_n}{\log n}\right) = 1$.

Exercice 3.19. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et telles que $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_n) < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On cherche à montrer que p.s. $\sup_n S_n = +\infty$ et $\inf_n S_n = -\infty$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq n^{1/4}) \to 1/2$ quand $n \to +\infty$. (*Indication* : TCL)
En déduire que $\mathbb{P}(\sup_n S_n = +\infty) \geq 1/2$.

b) En utilisant la loi du 0-1, montrer que $\mathbb{P}(\sup_n S_n = +\infty) = 1$. Conclure que p.s. $\sup_n S_n = +\infty$ et $\inf_n S_n = -\infty$.

Exercice 3.20. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoire réelles indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ. On pose $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$, et $W_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

a) Montrer que p.s., $W_\infty := \lim_{n\to+\infty} W_n$ existe (mais peut valoir $+\infty$).

b) Montrer que si $\lambda > 1$, alors $\mathbb{E}[W_\infty] < +\infty$, et en dédurie que $W_\infty < +\infty$ p.s.

c) Montrer que $\lim_{n\to\infty}(Y_n)^{1/n} = \frac{1}{\lambda}e^{-\gamma}$ p.s., où $\gamma = -\int_0^\infty (\ln x)e^{-x}dx = -\Gamma'(1)$ est la constante d'Euler-Mascheroni. En déduire que $W_\infty < +\infty$ si $\lambda > e^{-\gamma}$ et $W_\infty = +\infty$ si $\lambda < e^{-\gamma}$.

d) Considérons maintenant le cas $\lambda = e^{-\gamma}$. En appliquant l'Exercice 3.19, montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} Y_n = +\infty$ p.s., et en déduire que $W_\infty = +\infty$.

Exercice 3.21. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] \leq e^{\lambda^2/2}$. En déduire que

$$\mathbb{E}\big[\exp(\lambda S_n)\big] \leq e^{-\lambda^2 n/2}.$$

b) En appliquant l'inégalité de Markov à $e^{\lambda S_n}$, vérifier que pour tout $a > 0$, et tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\lambda a}\mathbb{E}\big[e^{\lambda S_n}\big] \leq \exp\big(-\lambda a + \lambda^2 n/2\big)$$

c) Montrer que pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$. (Indication : appliquer l'inégalité précédente avec $\lambda = a/n$.) En déduire que, pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{P}\Big(S_n \geq 2\sqrt{n \log n}\Big) \leq \frac{1}{n^2}.$$

d) On note $N_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{S_k \geq 2\sqrt{k\log k}\}}$, et $N_\infty = \lim_{n\to\infty} N_n$ (la limite existe car N_n est croissante). Montrer que $\mathbb{E}[N_\infty] < +\infty$, puis que $\mathbb{P}(N_\infty < +\infty) = 1$. Interprétez.

Exercice 3.22. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a. de loi $\mathbb{P}(X_k = +1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$. On fixe $\alpha \geq 0$, et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} X_k \,.$$

a) Montrer que si $\alpha > 1/2$, alors $(S_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^2 vers une variable aléatoire S_∞. Donner la fonction caractéristique $\varphi(t)$ de S_∞, et montrer qu'elle est intégrable.

b) Montrer que si $\alpha \leq 1/2$, alors la fonction caractéristique $\varphi_n(t)$ de S_n converge vers la fonction φ donnée par $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \neq 0$. Cette fonction est-elle la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle ?

c) Soit $\alpha < 1/2$. Montre que $n^{\alpha - \frac{1}{2}} S_n$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dont on précisera la variance σ^2. Que se passe-t-il quand $\alpha = 1/2$?

d) Soit $\alpha \leq 1/2$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \geq \ln\ln n) = \frac{1}{2}$, puis que $\mathbb{P}(\sup_n S_n = +\infty) \geq 1/2$. En utilisant la loi du 0-1 de Kolmogorov, montrer que $\mathbb{P}(\sup_n S_n = +\infty) = 1$, puis conclure que presque sûrement on a $\sup_n S_n = +\infty$ et $\inf_n S_n = -\infty$.

Exercice 3.23. *Cube de grande dimension.* Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. On pose $M_n := \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

a) On pose $\epsilon_n := \frac{\ln\ln n}{n}$ pour $n \geq 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n > -\frac{1}{2} + \epsilon_n) = 0$.

b) Soit $C_n = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[^n$ un cube n-dimensionnel, de volume 1. On introduit le cube plus petit $\widetilde{C}_n = \left]-(\frac{1}{2} - \epsilon_n), (\frac{1}{2} - \epsilon_n)\right[^n$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in C_n \setminus \widetilde{C}_n\big) = 1.$$

c) Vérifier que $(X_1, \dots, X_n)$ suit une loi uniforme sur C_n. En déduire que $\mathrm{Vol}(C_n \setminus \widetilde{C}_n)$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Autrement dit, quand $n \to \infty$, presque tout le volume d'un cube n-dimensionnel est contenu dans "l'écorce" $C_n \setminus \widetilde{C}_n$ *d'épaisseur $\epsilon_n = \frac{\ln\ln n}{n}$, qui tend vers* 0.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 4.1. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables de Bernouilli *indépendantes* de paramètre $1/2$. On considère la variable aléatoire

$$\begin{aligned} L_n &= \text{longueur maximale d'une séquence de 1 parmi } X_1, \ldots, X_n \\ &= \max\left\{k \;;\; \exists 1 \le i \le n-k+1, X_i = X_{i+1} = \cdots = X_{i+k-1} = 1\right\} \end{aligned}$$

a) Montrer que, pour tout $k \ge 1$, $\mathbb{P}(L_n < k) \le \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{\lfloor n/k \rfloor}$.
   Indication : découper l'intervalle $[\![1, n]\!]$ en $\lfloor n/k \rfloor$ intervalles de longueur k, et un intervalle de longueur inférieure à k.

b) Pour tout $\epsilon > 0$, on définit $A_n^\epsilon = \{L_n < (1-\epsilon)\log_2 n\}$ ($\log_2 n = \ln n / \ln 2$). Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, p.s. il n'y a qu'un nombre fini de A_n^ϵ réalisés.

c) En déduire que p.s., $\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n}{\log_2 n} \ge 1$.

d) Montrer que pour tout $k \ge 1$, $\mathbb{P}(L_n \ge k) \le n \times \frac{1}{2^k}$.

e) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(L_n \ge (1+\epsilon)\log_2 n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Peut-on appliquer le Lemme de Borel-Cantelli ?
   On a montré – avec la question 3. – que $\frac{L_n}{\log_2(n)}$ *converge vers* 1 *en probabilité. Pour montrer la convergence* $\mathbb{P}$*-p.s. il faut utiliser une astuce : considérer des sous-séquences.*

f) Soit $\epsilon > 0$. On définit la séquence $n_j = \lfloor j^{2/\epsilon} \rfloor$ pour $j \ge 1$. Montrer que p.s., il n'y a qu'un nombre fini de j tels que $L_{n_j} \ge (1+\epsilon)\log_2(n_j)$.

g) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n}{\log_2 n} = \limsup_{j\to\infty} \frac{L_{n_j}}{\ln n_j}$ (le long de la sous-séquence n_j).
   Indication : observer que pour $n \in [\![n_{j-1}, n_j]\!]$ on a $L_{n_{j-1}} \le L_n \le L_{n_j}$, et utiliser que $\ln(n_j)/\ln(n_{j-1}) \to 1$ quand $j \to \infty$.
   En déduire que p.s. $\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n}{\log_2 n} \le 1$.

h) Conclure.

Exercice 4.2. *Développement de la fonction* ζ *en produit eulérien (Garet-Kurtzman, 2e édition).* On note pour $s > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\,.$$

On va montrer (entre autre) la formule $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathfrak{P}}(1-p^{-s})^{-1}$ pour tout $s > 1$, où $\mathfrak{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

a) Montrer que $\lim_{s\downarrow 1} \zeta(s) = +\infty$.

On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$, et on définit pour $s > 1$ la mesure de probabilité suivante (appelée loi zêta de paramètre s) :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*\,, \quad \mu_s(\{i\}) = \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{i^s}\,.$$

b) Vérifier que μ_s définit bien une mesure de probabilité.

c) Soit $A_k = p_k\mathbb{N}^*$ pour tout $k \geqslant 1$. Montrer que $\{1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c$ et en déduire :

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n\to\infty} \mu_s\Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c\Big).$$

d) Montrer que les évènements $(A_k)_{k\geqslant 1}$ sont indépendants sous μ_s.

e) Montrer que pour $s > 1$ on a $\ln(\zeta(s)) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-\ln(1-p_k^{-s}))$ et $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1-p_k^{-s})$.

f) Montrer alors que les séries $\sum_{k=1}^{\infty} -\ln(1-\frac{1}{p_k})$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$ sont divergentes.

Exercice 4.3. *Loi de Dirichlet.* On rappelle qu'une variable aléatoire $X \sim \Gamma(a,\lambda)$ est de densité $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$, où $a,\lambda > 0$.

a) Démontrer que si $X \sim \Gamma(a,\lambda)$, alors les moments de X sont donnés par :

$$\forall \alpha > a\,, \qquad \mathbb{E}\left[X^\alpha\right] = \lambda^{-\alpha}\frac{\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)}\,.$$

b) Montrer que si $X_1 \sim \Gamma(a,\lambda)$ et $X_2 \sim \Gamma(b,\lambda)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \Gamma(a+b,\lambda)$. Déduire au passage l'identité

$$\beta(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$

Soient $X_1,\cdots,X_n$ des variables aléatoires telles que $X_i \sim \Gamma(a_i,1)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On pose $a^* = \sum_{i=1}^n a_i$ et $a_i^* = a^* - a_i$, puis on définit $S = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_i = \dfrac{X_i}{S}$.

c) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, démontrer que le couple $(X_i, S - X_i)$ a pour loi $\Gamma(a_i,1)\otimes\Gamma(a_i^*,1)$, c'est-à-dire les variables X_i et $S - X_i$ sont indépendantes, de lois $X_i \sim \Gamma(a_i,1)$ et $S - X_i \sim \Gamma(a_i^*,1)$.

d) De même, démontrer que Y_i et S sont indépendantes et de loi $Y_i \sim \mathrm{Beta}(a_i,a_i^*)$ et $S \sim \Gamma(a_i + a_i^*,1)$, où la loi $\mathrm{Beta}(a,b)$ est de densité $\frac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

e) Montrer que le n-uplet $(Y_1,\cdots,Y_{n-1},S)$ a pour densité

$$\frac{1}{B(a_1,\ldots,a_n)}\Big(\prod_{i=1}^{n-1} y_i^{a_i-1}\Big)\Big(1-\sum_{i=1}^{n-1} y_i\Big)^{a_n-1}\mathbb{1}_\Delta(y_1,\cdots,y_{n-1})\frac{\mathrm{e}^{-s}}{\Gamma(a^*)}s^{a^*-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(s)$$

où

$$B(a_1,\ldots,a_n) := \frac{\prod_{i=1}^n\Gamma(a_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)}\,, \qquad \Delta := \Big\{(t_1,\cdots,t_{n-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}\,,\ \sum_{i=1}^{n-1} t_i = 1\Big\}\,.$$

Le vecteur $(Y_1,\cdots,Y_{n-1})$ est-il indépendant de S ?

Soient $X_1',\cdots,X_n'$ des variables indépendantes avec $X_i' \sim \Gamma(a_i+b_i,1)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On définit comme précédemment $b^* = \sum_{i=1}^n b_i$, $b_i^* = b^* - b_i$ et $S' = \sum_{k=1}^n X_k$.

f) Justifier que $S' \sim \Gamma(a^* + b^*, 1)$, puis déduire que $\mathbb{E}\left[(S')^{-b^*}\right] = \dfrac{\Gamma(a^*)}{\Gamma(a^* + b^*)}$

g) Montrer la relation :

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^n Y_i^{b_i}\Big] = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(a_i + b_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(a_i)}\,\mathbb{E}\big[(S')^{-b^*}\big]$$

et en déduire

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^n Y_i^{b_i}\Big] = \frac{B(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)}{B(a_1, \ldots, a_n)}\,.$$

Indication : appliquer deux fois le théorème de transfert, d'abord à $\prod_{i=1}^n \Gamma(a_i)\mathbb{E}[\prod_{i=1}^n Y_i^{b_i}]$, *et ensuite à* $\prod_{i=1}^n \Gamma(a_i + b_i)\mathbb{E}[(S')^{-b^*}]$.

Exercice 4.4. *Une version locale du théorème central limite.* Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et $Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n)$.

a) Montrer que S_n a pour densité $f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et que Z_n a pour densité

$$f_{Z_n}(x) \;=\; \sqrt{n}\,\frac{(\sqrt{n}x + n)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-(\sqrt{n}x+n)}\,\mathbb{1}_{]-\sqrt{n},\infty[}(x)\,.$$

b) On pose $D_n := \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; la formule de Stirling donne $\lim_{n\to\infty} D_n = 1$.

i) Montrer que

$$f_{Z_n}(x) = \frac{D_n}{\sqrt{2\pi}} g_n(x)\mathbb{1}_{]-\sqrt{n},+\infty[}(x)\,, \quad \text{avec} \;\; g_n(x) := \Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^{n-1} e^{-x\sqrt{n}}\,.$$

ii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

iii) Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} f_{Z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,.$$

Il s'agit d'une version locale *du TCL, qui n'est pas vraie en général...*

c) Donnons une démonstration alternative du fait que $\lim_{n\to\infty} D_n = 1$.

i) Soit $\varepsilon \in (0,1)$ fixé. Montrer qu'il existe un n_ε tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$

$$(1-\varepsilon)D_n \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \leq \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} f_{Z_n}(x)\mathrm{d}x \leq (1+\varepsilon)D_n \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

ii) En déduire que pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a

$$(1+\varepsilon)^{-1}\frac{\mathbb{P}(|Z_n| \leq 1/\varepsilon)}{\mathbb{P}(|Z| \leq 1/\varepsilon)} \leq D_n \leq (1-\varepsilon)^{-1}\frac{\mathbb{P}(|Z_n| \leq 1/\varepsilon)}{\mathbb{P}(|Z| \leq 1/\varepsilon)}\,,$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

iii) Montrer que $\mathbb{P}(|Z_n| > 1/\varepsilon) \leq \varepsilon^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(|Z| > 1/\varepsilon) \leq \varepsilon^2$. En déduire que pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a

$$\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \leq D_n \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)}\,.$$

Conclure que $\lim_{n\to\infty} D_n = 1$.

d) Montrer que l'on peut déduire de la question b) le TCL pour Z_n : montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$F_{Z_n}(t) := \int_{-\infty}^{t} f_{Z_n}(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 4.5. *Construction de suites de variables aléatoires indépendantes à partir de la mesure de Lebesgue.* (Ouvrard Tome 2, à partir de p.52)

a) **Développement dyadique d'un réel $x \in [0,1[$.** Pour $x \in [0,1[$, on définit les suites $(D_n(x))_{n\geq 1}$ et $(R_n(x))_{n\geq 0}$ par récurrence de la façon suivante : $R_0(x) = x$ et pour $n \geq 1$

$$D_n(x) = \lfloor 2R_{n-1}(x) \rfloor\,, \qquad R_n(x) = 2R_{n-1}(x) - D_n(x)\,.$$

i) Montrer que l'on a $D_n(x) \in \{0,1\}$ et $R_n(x) \in [0,1[$, et que pour tout $n \geq 1$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} D_j(x) + \frac{1}{2^n} R_n(x)\,.$$

En déduire que $x = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} D_j(x)$.

ii) Pour $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ on note $I_\varepsilon = [\sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\varepsilon_j, \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\varepsilon_j + 2^{-n}[$. Montrer que si $x \in I_\varepsilon$ alors $D_j(x) = \varepsilon_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Réciproquement, montrer que si $D_j(x) = \varepsilon_j$ pour $1 \leq j \leq n$ alors $x \in \bar{I}_\varepsilon = [\sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\varepsilon_j, \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\varepsilon_j + 2^{-n}]$

b) **Construction d'une suite de variables de Bernoulli indépendantes.** On considère l'espace probabilisé $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$. On définit les variables aléatoires $X_i : [0,1[\to \{0,1\}$ par $X_i(x) = D_i(x)$.

i) Montrer que pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ on a

$$\mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\big) = 2^{-n}\,.$$

ii) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Conclure que $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

c) **Construction d'une suite de variables $\mathcal{U}([0,1])$ indépendantes.**

i) Montrer qu'il existe sur l'espace probabilisé $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, \lambda)$ une famille $(X_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

ii) On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} X_{i,j}$. Montrer que les variables aléatoires $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont bien définies, qu'elles sont indépendantes.

iii) On pose $Y_i^{(n)} := \sum_{j=1}^n 2^{-j} X_{i,j}$ pour $n \geq 1$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ $Y_i^{(n)}$ a la même loi que $Z_n : x \mapsto \sum_{j=1}^n 2^{-j} D_j(x)$.

iv) En déduire que Y_i a la même loi que $Z : x \mapsto \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} D_j(x) = x$. Conclure que $(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

d) **Construction d'une suite de variables indépendantes de lois données.** Soient $\mu_1, \mu_2, \dots$ une suite de mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, de fonctions de répartitions $F_i(t) := \mu_i(]-\infty, t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

i) Pour tout i, on note $\varphi_i(x) = \inf\{t\,,\, F_i(t) \geq x\}$ le pseudo-inverse (ou pseudo-réciproque) de F_i. Montrer que si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $\varphi_i(U)$ est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est F_i.

ii) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on pose $W_i := \varphi_i(Y_i)$. Montrer que $(W_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de lois respectives μ_i.

Exercice 4.6. *Fonction caractéristique de la loi Normale ; loi log-normale.* Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

a) Démontrer que $z \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{e}^{zx} \mathrm{d}x$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) Calculer cette expression pour $z \in \mathbb{R}$ et en déduire que les deux fonctions $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{e}^{z^2/2}$ et $z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{e}^{zx} \mathrm{d}x$ sont égales, puis obtenir que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{e}^{itx} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-t^2/2}\,.$$

Montrer alors que la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \Phi(t) = \mathrm{e}^{i\mu t} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,.$$

c) On considère l'intégrale à paramètres $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{e}^{itx} \mathrm{d}x$. Montrer que φ est solution de $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et retrouver le résultat précédent.

d) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

i) Donner la densité $f_Y(y)$ de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$ (dite de loi log-normale). Calculer $\mathbb{E}(Y^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) Calculer $\mathbb{E}(e^{(n+2i\pi)X})$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}(\sin(2\pi X)\mathrm{e}^{nX}) = 0$.

iii) On considère maintenant la variable aléatoire positive W, de densité donnée par

$$f_W(t) = (1 + \sin(2\pi \ln t)) f_Y(t) \qquad \forall t > 0\,.$$

Vérifier que f_W est bien une densité de probabilité, et montrer que $\mathbb{E}(W^n) = \mathbb{E}(Y^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette dernière question donne un exemple de deux variables aléatoires de lois différentes mais qui ont les mêmes moments entiers !

Exercice 4.7. *Vecteur aléatoire de grande dimension.* Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1, admettant un moment d'ordre 4 fini, noté $m_4 := \mathbb{E}(X_i^4) > 1$. On va s'intéresser aux propriétés du vecteur aléatoire $V_n := (X_1, \dots, X_n)$.

a) On pose $Z_n = \|V_n\|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathrm{Var}(Z_n)$.

b) Montrer que que $\mathrm{Var}(\|V_n\|) > 0$ et en déduire que $\mathbb{E}(\|V_n\|) < \sqrt{n}$.

c) En appliquant la loi des grands nombres à Z_n, montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\|V_n\| = 1$ p.s.

d) Soit $R > 0$ un réel.

   i) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mathbb{P}\big(\|V_n\| \geq \sqrt{n} + R\big) \leq \mathbb{P}\big(Z_n - n \geq 2R\sqrt{n}\big) \leq \frac{m_4 - 1}{4R^2}\,.$$

   ii) De même, montrer que si $n \geq R^2$ alors

$$\mathbb{P}\big(\|V_n\| \leq \sqrt{n} - R\big) \leq \mathbb{P}\big(Z_n - n \leq -R\sqrt{n}\big) \leq \frac{m_4 - 1}{R^2}\,.$$

Autrement dit, $\|V_n\|$ *est* concentré *autour de* $\sqrt{n}$. *On a montré que* $(\|V_n\| - \sqrt{n})_{n\geq 1}$ *est une suite de variables aléatoires* tendue.

e) Le but de cette question est de montrer que $\|V_n\| - \sqrt{n}$ converge en loi vers une loi normale dont on précisera la variance. On note $F_n(t) := \mathbb{P}(\|V_n\| - \sqrt{n} \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$

   i) On pose $\bar{Z}_n = \frac{1}{n}Z_n - 1$. En appliquant le théorème central limite, montrer que pour toute suite $t_n \to t \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sqrt{n}\bar{Z}_n \leq t_n) = F_Z(t)$ où $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et préciser la valeur de σ^2.

   ii) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq \sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x-1)$.

   iii) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$F_n(t) \geq \mathbb{P}\big(\sqrt{n}\bar{Z}_n \leq 2t\big)\,,$$

   et aussi

$$F_n(t) \leq \mathbb{P}\big(\sqrt{n}\bar{Z}_n \leq 2t + n^{-1/4}\big) + \mathbb{P}\big((\bar{Z}_n)^2 > n^{-3/4}\big)\,.$$

   iv) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big((\bar{Z}_n)^2 > n^{-3/4}\big) = 0$ et en conclure que $\|V_n\| - \sqrt{n}$ converge en loi vers $\frac{1}{2}Z$, dont on précisera la loi