Algèbres pré-Lie et algèbres de Lie tordues

d'après Travis Schedler

Ce texte détaille les objets et les résultats de l'article [13].

Notations. K est un corps commutatif quelconque. Les objets considérés (algèbres de Lie, algèbres associatives...) seront tous considérés sur K.

1 Algèbres pré-Lie

1.1 définition et exemples

Définition 1 Une *algèbre pré-Lie (à gauche)* ou *algèbre symétrique gauche* ou *algèbre de Vinberg* est un couple $(\mathfrak{g}, \circ)$ où $\mathfrak{g}$ est un K-espace vectoriel et $\circ : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, avec les compatibilités suivantes : pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z).$$

Remarque. Une algèbre pré-Lie à droite vérifie :

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (x \circ z) \circ y - x \circ (z \circ y).$$

Si $(\mathfrak{g}, \circ)$ est pré-Lie à droite, alors $(\mathfrak{g}, -\circ^{op})$ est pré-Lie à gauche : on se contentera d'étudier les algèbres pré-Lie à gauche.

Proposition 2 *Soit $(\mathfrak{g}, \circ)$ une algèbre pré-Lie. Alors $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ définit un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$.*

Preuve. Ce crochet est évidemment antisymétrique. Démontrons l'égalité de Jacobi.

$$\begin{array}{rcl} [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] & = & (x \circ y) \circ z - (y \circ x) \circ z - z \circ (x \circ y) - z \circ (y \circ x) \\ & & +(y \circ z) \circ x - (z \circ y) \circ x - x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y) \\ & & +(z \circ x) \circ y - (x \circ z) \circ y - y \circ (z \circ x) + y \circ (x \circ z) \\ & = & (x \circ y) \circ z - (z \circ y) \circ x - y \circ (z \circ x) + z \circ (y \circ x) \\ & & +(y \circ z) \circ x - (z \circ y) \circ x - y \circ (z \circ x) + z \circ (y \circ x) \\ & & +(z \circ x) \circ y - (x \circ z) \circ y - z \circ (x \circ y) + x \circ (z \circ y) \\ & = & 0 + 0 + 0. \end{array}$$

Donc $(\mathfrak{g}, [-,-])$ est une algèbre de Lie. $\square$

Remarques.

1. L'axiome pré-Lie peut alors être reformulé de la façon suivante :

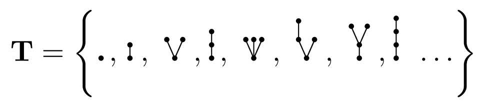
$$[x, y] \circ z = x \circ (y \circ z) - y \circ (x \circ z).$$

Autrement dit, $(\mathfrak{g}, \circ)$ est un $(\mathfrak{g}, [-,-])$-module à gauche.

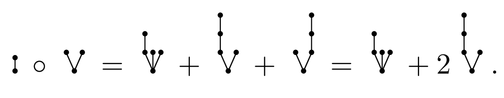
2. Il existe d'autres types d'algèbres induisant une structure d'algèbre de Lie par antisymétrisation : voir [5] pour d'autres exemples.

Exemples

1. Les algèbres associatives sont évidemment pré-Lie.
2. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie des dérivations de $K[x]$: $\mathfrak{g} = \{P(x)\partial \mid P(x) \in K[x]\}$, où ∂ est la dérivation par rapport à x. Le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ est donné par :
$$[P(x)\partial, Q(x)\partial] = (P(x)\partial Q(x))\partial - (Q(x)\partial P(x))\partial.$$
On pose :
$$(P(x)\partial) \circ (Q(x)\partial) = (P(x)\partial Q(x))\partial.$$
Il s'agit bien d'un produit pré-Lie induisant le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$: en effet,
$$\begin{array}{rl} & P(x)\partial \circ (Q(x)\partial \circ R(x)\partial) - (P(x)\partial \circ Q(x)\partial) \circ R(x)\partial \\ = & P(x)\partial(Q(x)\partial R(x))\partial - P(x)\partial Q(x)\partial R(x)\partial \\ = & P(x)\partial Q(x)\partial R(x)\partial + P(x)Q(x)\partial^2 R(x)\partial - P(x)\partial Q(x)\partial R(x)\partial \\ = & P(x)Q(x)\partial^2 R(x)\partial. \end{array}$$
Cette expression étant symétrique en $P(x)$ et $Q(x)$, on a bien un produit pré-Lie. Plus généralement, les algèbres de Lie $Der(K[X_1, \ldots, X_n])$ ou $Der(K[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}])$ sont pré-Lie.
3. Soit $\mathfrak{g}_{FdB} = Vect(e_i \mid i \geq 1)$ et soit $\lambda \in K$. On définit un produit sur $\mathfrak{g}_{FdB}$ par $e_i \circ e_j = (j+\lambda)e_{i+j}$. Pour tout $i, j, k \geq 1$:
$$\begin{array}{rcl} (e_i \circ e_j) \circ e_k - e_i \circ (e_j \circ e_k) & = & (j+\lambda)(k+\lambda)e_{i+j+k} - (k+\lambda)(j+k+\lambda)e_{i+j+k} \\ & = & -k(k+\lambda)e_{i+j+k}e_{i+j+k}. \end{array}$$
Cette expression étant symétrique en i, j, $\mathfrak{g}_{FdB}$ est pré-Lie. Le crochet associé est donné par $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$ et ne dépend dond pas de λ. Cette algèbre de Lie est l'algèbre de Faà di Bruno, associée au groupe des difféomorphismes formels de la droite tangeant à l'identité.
4. Soit $\mathbf{T}$ l'ensemble des arbres enracinés :



Soit $\mathfrak{g}_{\mathbf{T}} = Vect(\mathbf{T})$. On définit un produit sur $\mathbf{T}$ par :
$$t \circ t' = \sum_{s' \text{ sommet de } t'} \text{greffe de } t \text{ sur } s'.$$
Par exemple,



Il s'agit bien d'un produit pré-Lie : si t, t', t'' sont trois arbres enracinés,
$$\begin{array}{rcl} t \circ (t' \circ t'') - (t \circ t') \circ t'' & = & \displaystyle\sum_{s'' \in t'',\, s' \in t' \cup t''} \text{greffe de } t' \text{ sur } s'',\ t \text{ sur } s' \\ & & \displaystyle - \sum_{s'' \in t'',\, s' \in t'} \text{greffe de } t' \text{ sur } s'',\ t \text{ sur } s' \\ & = & \displaystyle\sum_{s', s'' \in t''} \text{greffe de } t \text{ sur } s',\ t' \text{sur } s''. \end{array}$$
Cette expression est symétrique en t et t'. D'autre part, on peut montrer que cette algèbre pré-Lie est librement engendrée par $\bullet$ [2].

5. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie $\mathbb{N}$-graduée, connexe (autrement dit, $\mathfrak{g}_0 = 0$). On pose alors, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, homogènes,
$$x \circ y = \frac{deg(y)}{deg(x) + deg(y)}[x, y].$$
Ceci a bien un sens car $deg(x) + deg(y) > 0$ par connexité de $\mathfrak{g}$. Alors, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, homogènes,
$$x \circ y - y \circ x = \frac{deg(y)}{deg(x) + deg(y)}[x, y] - \frac{deg(x)}{deg(x) + deg(y)}[y, x] = [x, y],$$
donc ce produit induit par antisymétrie le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$. D'autre part, si $x, y, z \in \mathfrak{g}$, homogènes,
$$\begin{aligned}
& (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) - (y \circ x) \circ z + y \circ (x \circ z) \\
= \ & \frac{deg(z)}{deg(x) + deg(y) + deg(z)} \frac{deg(y)}{deg(x) + deg(y)}[[x, y], z] \\
& - \frac{deg(y) + deg(z)}{deg(x) + deg(y) + deg(z)} \frac{deg(z)}{deg(y) + deg(z)}[x, [y, z]] \\
& - \frac{deg(x)}{deg(x) + deg(y)} \frac{deg(z)}{deg(x) + deg(y) + deg(z)}[[y, x], z] \\
& + \frac{deg(x) + deg(z)}{deg(x) + deg(y) + deg(z)} \frac{deg(z)}{deg(x) + deg(z)}[y, [x, z]] \\
= \ & \frac{deg(z)}{deg(x) + deg(y) + deg(z)} ([[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]) \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$
Donc $\mathfrak{g}$ est pré-Lie.

Remarque. Une algèbre pré-Lie commutative est associative. En effet, si $x, y, z \in \mathfrak{g}$, algèbre pré-Lie associative et commutative, alors $(x \circ y) \circ z = (y \circ x) \circ z$ et donc l'axiome pré-Lie implique que $x \circ (y \circ z) = y \circ (x \circ z)$. En utilisant la commutativité, on obtient $(y \circ z) \circ x = y \circ (z \circ x)$ et donc $\circ$ est associatif.

1.2 Algèbre enveloppante d'une algèbre pré-Lie

Soit V un espace vectoriel et soit $S(V)$ l'algèbre symétrique associée. Elle est munie de sa structure d'algèbre de Hopf habituelle, obtenue en posant $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ pour tout $v \in V$. Autrement dit, si $v_1, \ldots, v_n \in V$,
$$\Delta(v_1 \ldots v_n) = \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n\}} v_I \otimes v_{\{1, \ldots, n\} - I},$$
où pour tout $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, v_J est le produit des v_j, $j \in J$. La cogèbre sous-jacente à cette algèbre de Hopf est notée $coS(V)$.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt implique les cogèbres $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $coS(\mathfrak{g})$ sont isomorphes : en choisissant une base $(v_i)_{i \in I}$ une base de $\mathfrak{g}$ indexée par un ensemble I totalement ordonné, on obtient un isomorphisme de cogèbres en envoyant l'élément de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt $v_{i_1}^{a_1} \ldots v_{i_n}^{a_n} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, avec $i_1 < \ldots < i_n$ dans I, sur $v_1^{a_1} \ldots v_n^{a_n} \in S(\mathfrak{g})$. Il ne s'agit pas d'un morphisme d'algèbres de Hopf (sauf si $\mathfrak{g}$ est abélienne) et cet isomorphisme dépend du choix de la base de $\mathfrak{g}$ choisie ainsi que de l'ordre total choisi sur l'ensemble d'indices I (sauf si, là encore, $\mathfrak{g}$ est abélienne). Il n'est donc pas canonique.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est pré-Lie, on peut décrire un isomorphisme "canonique" entre les cogèbres $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $coS(\mathfrak{g})$. Pour cela, on munit $coS(\mathfrak{g})$ d'un nouveau produit, noté $\star$, défini par récurrence à l'aide du produit pré-Lie de $\mathfrak{g}$. Ce produit fait de $coS(\mathfrak{g})$ une algèbre de Hopf isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et on définit un isomorphisme d'algèbres de Hopf en envoyant $v \in \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur $v \in \mathfrak{g} \subseteq coS(\mathfrak{g})$. Voici les formules définissant le produit $\star$:

Théorème 3 *[11, 4] Soit $(\mathfrak{g}, \circ)$ une algèbre pré-Lie. Soit $S_+(\mathfrak{g})$ l'idéal d'augmentation de $S(\mathfrak{g})$. On étend le produit $\circ$ sur $S_+(\mathfrak{g})$ de la façon suivante : si $a, b, c \in S_+(\mathfrak{g})$, $x \in \mathfrak{g}$,*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (xa) \circ b & = & x \circ (a \circ b) - (x \circ a) \circ b, \\ a \circ (bc) & = & \sum (a' \circ b)(a'' \circ c). \end{array} \right.$$

On définit alors un produit sur $S_+(\mathfrak{g})$ par :

$$a \star b = \sum a'(a'' \circ b),$$

avec la convention $1 \circ b = b$ pour tout b. Ce produit est étendu à $S(\mathfrak{g})$ en faisant de 1 l'élément neutre pour $\star$. Alors muni de ce produit et de son coproduit usuel, $S(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf.

Remarque. On peut étendre $\circ$ à $S(\mathfrak{g})$ en posant $1 \circ b = b$ pour tout $b \in S(\mathfrak{g})$ et $a \circ 1 = \varepsilon(a)1$ pour tout $a \in S(\mathfrak{g})$. On peut alors combiner les deux dernières formules du théorème 3 sous la forme suivante :

$$a \star (bc) = \sum a'(a'' \circ b)(a''' \circ c),$$

pour tous $a, b, c \in S(\mathfrak{g})$.

La preuve donnée dans [11] se fait par récurrence. En particulier, le fait que l'extension $\circ$ est bien définie (premier point, le choix de la lettre x du mot xa étant arbitraire) utilise l'axiome pré-Lie. Les caculs sont directs mais plutôt complexes. Le but de l'article de Schedler est d'expliquer comment trouver et démontrer ces formules plus simplement. Commençons par donner quelques applications.

Exemples. Si $x, y, z, t \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{array}{rcl} x \circ (yz) & = & (x \circ y)z + y(x \circ z) \\ (xy) \circ z & = & x \circ (y \circ z) - (x \circ y) \circ z \\ x \circ (yzt) & = & (x \circ y)zt + y(x \circ z)t + yz(x \circ t) \\ (xy) \circ (zt) & = & (x \circ (y \circ z))t + (y \circ z)(x \circ t) + (x \circ z)(y \circ t) \\ & & +z(x \circ (y \circ t)) - ((x \circ y) \circ z)t - z((x \circ y) \circ t) \\ (xyz) \circ t & = & (x \circ y) \circ (z \circ t) + ((x \circ y) \circ z) \circ t - y \circ ((x \circ z) \circ t) + (y \circ (x \circ z)) \circ t. \end{array}$$

En conséquence, si $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$x \star y = xy + x \circ y,$$

et donc dans $(S(\mathfrak{g}), \star)$, $x \star y - y \star x = x \circ y - y \circ x = [x, y]$. On a donc un morphisme d'algèbres de Hopf uniquement défini par :

$$\Phi_{\mathfrak{g}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & (S(\mathfrak{g}), \star) \\ v \in \mathfrak{g} & \longrightarrow & v. \end{array} \right.$$

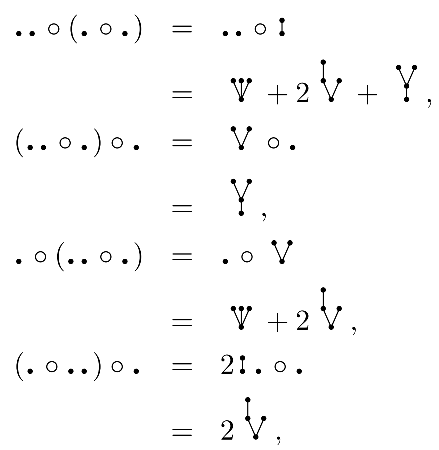
On montre facilement par récurrence sur n que $S_+(\mathfrak{g}) \circ S_n(\mathfrak{g}) \subseteq S_n(\mathfrak{g})$ et en conséquence, pour tous $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l} \in \mathfrak{g}$:

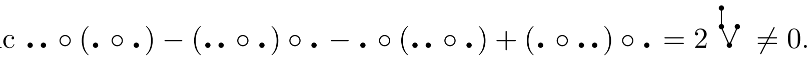
$$(v_1 \ldots v_k) \star (v_{k+1} \ldots v_{k+l}) = v_1 \ldots v_{k+l} + \text{termes de degré compris entre } l \text{ et } k + l - 1.$$

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt implique qu'alors $\Phi_{\mathfrak{g}}$ est un isomorphisme.

Remarques.

1. Alors $(S_n(\mathfrak{g}), \circ)$ est un $\mathfrak{g}$-module pour tout $n \geq 0$. De plus, $(S_n(\mathfrak{g}), \circ)$ est isomorphe à $S_n(\mathfrak{g}, \circ)$ en tant que $\mathfrak{g}$-module.
2. $(S_+(\mathfrak{g}), \circ)$ n'est pas pré-Lie en général. Par exemple, dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{T}}$ l'algèbre pré-Lie des arbres enracinés :



Donc 

D'autre part, il en découle que $S_{\geq n}(\mathfrak{g})$ est un idéal à gauche pour $\star$. En particulier, $S_{\geq 2}(\mathfrak{g})$ est un idéal à gauche tel que $S_+(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus S_{\geq 2}(\mathfrak{g})$. On en déduit que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ contient un idéal à gauche I tel que $\mathcal{U}_+(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus I$. Il n'est pas très difficile de montrer que I est engendré par les éléments $xy - x \circ y$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Ceci est une première étape pour démontrer le théorème suivant :

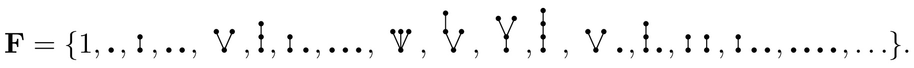
Théorème 4 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque. Soit $PL(\mathfrak{g})$ l'ensemble des produits pré-Lie induisant le crochet de $\mathfrak{g}$. Soit $I(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux à gauche de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tels que $\mathcal{U}_+(\mathfrak{g}) = I(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}$. Alors $PL(\mathfrak{g})$ et $I(\mathfrak{g})$ sont en bijection. La bijection $\Psi_{\mathfrak{g}} : PL(\mathfrak{g}) \longrightarrow I(\mathfrak{g})$ est donnée de la manière suivante :*

1. *Si $\circ \in PL(\mathfrak{g})$, $\Psi_{\mathfrak{g}}(\circ)$ est l'idéal à gauche engendré par les éléments $xy - x \circ y$, $x, y \in \mathfrak{g}$.*
2. *Si $I \in I(\mathfrak{g})$, $\Psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(I) = \circ$ est défini par $x \circ y = \pi(xy)$, ou π est la projection sur $\mathfrak{g}$ dans la somme directe $\mathcal{U}_+(\mathfrak{g}) = I \oplus \mathfrak{g}$.*

Si $\mathfrak{g}$ est pré-Lie, on dispose donc d'un $\mathfrak{g}$-module à gauche $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\Psi_{\mathfrak{g}}(\circ)$ d'espace vectoriel sous-jacent, $M = K \oplus \mathfrak{g}$, avec $1 \in K$ engendrant M et $\mathfrak{g}$ sous-module de M. L'existence ou non d'un tel module donne un critère pour savoir si une algèbre de Lie possède ou non un produit pré-Lie. Ceci est utilisé pour montrer qu'une algèbre de Lie semi-simple complexe n'est pas pré-Lie [10]. Voir aussi [1] pour le cas de $\mathfrak{gl}(n)$.

1.3 Quelques exemples

Commençons par l'algèbre pré-Lie $\mathfrak{g}_{\mathbf{T}}$ des arbres enracinés (exemple 4). Ici, $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{T}})$ a pour base l'ensemble des forêts enracinés $\mathbf{F}$:



Proposition 5 *Soient $F = t_1 \ldots t_n, G \in \mathbf{F}$. Alors :*

$$F \circ G = \sum_{s_1, \ldots, s_n \in G} \textit{greffe de } t_1 \textit{ sur } s_1, \ldots, t_n \textit{ sur } s_n.$$

Preuve. Par récurrence sur n. On commence par $n=1$. Posons $G = s_1 \dots s_m$ et procédons par récurrence sur m. Si $m=1$, il s'agit de la définition de $\circ$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{T}}$. Supposons le résultat vrai au rang $m-1$. Posons $G' = s_1 \dots s_{m-1}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} t_1 \circ G & = & t_1 \circ (G' s_m) \\ & = & (t_1 \circ G') s_m + G'(t_1 \circ s_m) \\ & = & \displaystyle\sum_{s \in G'} (\text{greffe de } t_1 \text{ sur } s) s_m + \sum_{s \in s_m} G'(\text{greffe de } t_1 \text{ sur } s) \\ & = & \displaystyle\sum_{s \in G} \text{greffe de } t_1 \text{ sur } s. \end{array}$$

Le résultat est donc vrai au rang 1. Supposons le vrai au rang $n-1$. Posons $F' = t_2 \dots t_n$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} F \circ G & = & t_1 \circ (F' \circ G) - (t_1 \circ F) \circ G \\ & = & \displaystyle\sum_{s_2, \dots, s_n \in G} \sum_{s \in F' \cup G} \text{greffe de } t_2 \text{ sur } s_2, \dots, t_n \text{ sur } s_n,\ t_1 \text{ sur } s \\ & & \displaystyle - \sum_{s_2, \dots, s_n \in G} \sum_{s \in F'} \text{greffe de } t_2 \text{ sur } s_2, \dots, t_n \text{ sur } s_n,\ t_1 \text{ sur } s \\ & = & \displaystyle\sum_{s_2, \dots, s_n \in G} \sum_{s \in G} \text{greffe de } t_2 \text{ sur } s_2, \dots, t_n \text{ sur } s_n,\ t_1 \text{ sur } s \\ & = & \displaystyle\sum_{s_1, \dots, s_n \in G} \text{greffe de } t_1 \text{ sur } s_1, \dots, t_n \text{ sur } s_n. \end{array}$$

Le résultat est donc vrai pour tout n. $\square$

Corollaire 6 *Si $F = t_1 \dots t_m, G \in \mathbf{F}$, alors :*

$$F \star G = \sum_{k=0}^{m} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \sum_{s_1, \dots, s_m \in G} (\textit{greffe de } t_1 \textit{ sur } s_1,\ \dots,\ t_k \textit{ sur } s_k) \prod_{i \neq i_1, \dots, i_k} t_i.$$

L'algèbre de Hopf de forêts ainsi obtenue est connue sous le nom d'algèbre de Grossman-Larson [6, 7]. La première preuve connue de son existence est directe et n'utilise pas de structure pré-Lie. D'autre part, son dual (en caractéristique zéro) et l'algèbre de Connes-Kreimer [3, 9, 12].

Considérons maintenant le cas associatif.

Proposition 7 *Soit $(\mathfrak{g}, \circ)$ une algèbre associative. Alors $S_n(\mathfrak{g}) \circ \mathfrak{g} = (0)$ si $n \geq 2$. En conséquence, dans $S(\mathfrak{g})$:*

$$(x_1 \dots x_m) \star (y_1 \dots y_n) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}}} (x_{i_1} \circ y_{j_1}) \dots (x_{i_k} \circ y_{j_k}) \prod_{i \neq i_1, \dots, i_k} x_i \prod_{j \neq j_1, \dots, j_k} y_j.$$

Preuve. La formule du produit $\star$ découle immédiatement de l'assertion $S_n(\mathfrak{g}) \circ \mathfrak{g} = (0)$ si $n \geq 2$. Montrons cette dernière par récurrence sur n. Pour $n=2$, soient $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Alors :

$$(xy) \circ z = x \circ (y \circ z) - (x \circ y) \circ z = 0.$$

Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, avec $n \geq 3$. Soit $x, z \in \mathfrak{g}$, $b \in S_{n-1}(\mathfrak{g})$. Alors :

$$(xb) \circ z = x \circ (b \circ z) - (x \circ b) \circ z.$$

Par l'hypothèse de récurrence, $b \circ z = 0$. De plus, $x \circ b \in S_{n-1}(\mathfrak{g})$, donc $(x \circ b) \circ z = 0$. $\square$

Remarques.

1. En particulier, si $\circ = 0$, $\star$ est le produit usuel de $S(\mathfrak{g})$.
2. Plus généralement, cette construction est à rapprocher de la construction d'algèbres de Hopf de battages contractants [8].

Considérons maintenant l'algèbre pré-Lie de Faà di Bruno (exemple 3).

Proposition 8 *Soit $\mathfrak{g}_{FdB}$ l'algèbre pré-Lie de Faà di Bruno. Dans $S(\mathfrak{g}_{FdB})$:*

$$(e_{i_1}\ldots e_{i_m})\circ e_j=(j+\lambda)j(j-\lambda)\ldots(j-(m-2)\lambda)e_{i_1+\ldots+i_m+j}.$$

Preuve. Pour alléger l'écriture de la preuve, on pose $P_m(j)=(j+\lambda)j(j-\lambda)\ldots(j-(m-2)\lambda)$. On procède par récurrence sur m. Si $m=1$, il s'agit de la définition du produit pré-Lie de $\mathfrak{g}_{FdB}$. Supposons le résultat vrai au rang $m-1$. Alors :

$$\begin{aligned}
(e_{i_1}\ldots e_{i_m})\circ e_j &= e_{i_1}\circ((e_{i_2}\ldots e_{i_m})\circ e_j)-(e_{i_1}\circ(e_{i_2}\ldots e_{i_m}))\circ e_j\\
&= P_{m-1}(j)e_{i_1}\circ e_{i_2+\ldots+i_m+j}-\sum_{k=2}^{m}(i_k+\lambda)(e_{i_2}\ldots e_{i_1+i_k}\ldots e_{i_m})\circ e_j\\
&= P_{m-1}(j)(i_2+\ldots+i_m+j+\lambda)e_{i_1+\ldots+i_m+j}-\sum_{k=2}^{m}P_{m-1}(j)(i_k+\lambda)e_{i_1+\ldots+i_m+j}\\
&= P_{m-1}(j)(i_2+\ldots+i_m+j+\lambda-i_2-\ldots-i_m-(m-1)\lambda)e_{i_1+\ldots+i_m+j}\\
&= P_m(j)e_{i_1+\ldots+i_m+j}.
\end{aligned}$$

Le résultat est donc vrai à tout rang n. $\square$

Remarque. En particulier, si $\lambda=0$, $(e_{i_1}\ldots e_{i_m})\circ e_j=j^m e_{i_1+\ldots+i_m+j}$.

1.4 D'où proviennent ces formules ?

Comment sont obtenues les formules du théorème 3 ? Voici une explication :

Proposition 9 *Soit V un espace vectoriel et $\star$ un produit sur $S(V)$ de sorte que :*

1. *$(S(V),\star,\Delta)$ est une algèbre de Hopf.*
2. *Pour tout $n\geq 0$, $S_{\geq n}(V)$ est un idéal à gauche pour le produit $\star$.*

Soit π_n la projection sur $S_n(V)$. Pour tout $x\in S(V)$, $y\in S_n(V)$, on pose $x\circ y=\pi_n(x\star y)$. Alors, pour tous $x\in V$, $a,b,c\in S(V)$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a\circ 1&=&\varepsilon(a)1,\\
1\circ b&=&b,\\
(xa)\circ b&=&x\circ(a\circ b)-(x\circ a)\circ b,\\
a\star(bc)&=&\sum a'(a''\circ b)(a'''\circ c).
\end{array}\right.$$

Preuve. Par définition de $\circ$:

$$a\circ 1=\pi_0(a\star 1)=\varepsilon(a\star 1)1=\varepsilon(a)\varepsilon(1)1=\varepsilon(a)1.$$

La deuxième formule est évidente. Montrons la troisième. On commence par montrer que si $x\in V$ et $a\in S(V)$, alors $x\star a=xa+x\circ a$. On peut supposer que $a\in S_n(V)$. Comme $S_n(V)$ est un idéal à gauche, $x\star a\in S_{\geq n}(V)$. De plus, en utilisant les coproduits itérés, si $a=a_1\ldots a_n$:

$$\tilde{\Delta}^{(n)}(x\star a)=x\wedge a_1\wedge\ldots\wedge a_n=\tilde{\Delta}^{(n)}(xa).$$

Donc $x\star a-xa\in Ker(\tilde{\Delta}^{(n)})=S_{\leq n}(V)$. Donc $x\star a-xa\in S_{\leq n}(V)\cap S_{\geq n}(V)=S_n(V)$. En projetant sur $S_n(V)$, on obtient :

$$x\star a-xa=\pi_n(x\star a-xa)=x\circ a-0.$$

Passons à la troisième formule. Supposons $b \in S_n(V)$. Alors :

$$\begin{aligned}
(xa) \circ b &= \pi_n((xa) \star b) \\
&= \pi_n((x \star a) \star b - (x \circ a) \star b) \\
&= \pi_n(x \star (a \star b)) - (x \circ a) \circ b \\
&= \pi_n(x \circ (a \star b - a \circ b)) + x \circ (a \circ b) - (x \circ a) \circ b.
\end{aligned}$$

Comme $S_{\geq n}(V)$ est un idéal à gauche, $a \star b \in S_{\geq n}(V)$ et donc $a \star b - a \circ b \in S_{\geq n+1}(V)$. Par suite, $x \circ (a \star b - a \circ b) \in S_{\geq n+1}(V)$ et donc $\pi_n(x \circ (a \star b - a \circ b)) = 0$.

Enfin, montrons la dernière formule. Tout d'abord, si $x, y_1, \ldots, y_n \in V$:

$$\begin{aligned}
(\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_1) \circ \Delta^{(n-1)}(x \star y_1 \ldots y_n) &= \sum_{i=1}^{n} y_1 \wedge \ldots \wedge \pi_1(x \star y_i) \wedge \ldots \wedge y_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_1 \wedge \ldots \wedge x \circ y_i \wedge \ldots \wedge y_n.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$x \circ (y_1 \ldots y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_1 \ldots (x \circ y_i) \ldots y_n,$$

ce qui implique que pour tous $b, c \in S(V)$, $x \circ (bc) = (x \circ b)c + b(x \circ c)$ et donc $x \star (bc) = xbc + (x \circ b)c + b(x \circ c)$. Comme $\Delta^{(2)}(x) = x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x$, on obtient la quatrième formule pour $a \in V$. On termine la preuve en supposant $a \in S_n(V)$ avec une récurrence sur n. $\square$

2 Algèbres de Lie tordues

On constate que les axiomes des algèbres associatives, des algèbres commutatives, des algèbres de Lie (et plus généralement des algèbres sur une opérade) se traduisent uniquement à l'aide du produit tensoriel et de la volte de la catégorie des espaces vectoriels. En conséquence, on peut étendre ces notions en remplaçant la catégorie des espaces vectoriels par n'importe quelle catégorie monoïdale symétrique.

2.1 Catégorie des $\mathbb{S}$-modules

Un $\mathbb{S}$-module est un K-espace vectoriel V gradué $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$, avec pour tout n une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur V_n. Si V et W sont deux $\mathbb{S}$-modules, un morphisme de $\mathbb{S}$-modules $f : V \longrightarrow W$ est une application linéaire telle que pour tout $n \geq 0$, $f(V_n) \subseteq W_n$ (autrement dit, f est homogène de degré 0) et $f_{|V_n} : V_n \longrightarrow W_n$ est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$-modules. Ces notions définissent une catégorie, la catégorie des $\mathbb{S}$-modules.

Cette catégorie est monoïdale : si V et W sont deux $\mathbb{S}$-modules, on définit $V \otimes_{\mathbb{S}} W$ par :

$$(V \otimes_{\mathbb{S}} W)_n = \bigoplus_{k=0}^{n} Ind_{\mathfrak{S}_k \otimes \mathfrak{S}_{n-k}}^{\mathfrak{S}_m}(V_k \otimes W_{n-k}).$$

L'élément neutre est le $\mathbb{S}$-module K, entièrement gradué en degré 0 (avec l'action triviale du groupe nul $\mathfrak{S}_0$). Autrement dit, en notant $bat(k, l)$ l'ensemble des (k, l)-battages (permutations de $\mathfrak{S}_{k+l}$ croissantes sur $\{1, \ldots, k\}$ et $\{k+1, \ldots, k+l\}$), en tant que K-espace vectoriel :

$$(V \otimes_{\mathbb{S}} W)_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigoplus_{\sigma \in bat(k,n-k)} \sigma \otimes V_k \otimes W_{n-k}.$$

L'action de $\mathfrak{S}_n$ est donnée de la manière suivante : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\tau \in bat(k,n-k)$, $v \in V_k$, $w \in W_{n-k}$, $\sigma\tau$ s'écrit de manière unique $\sigma_1 \circ (\tau_1 \otimes \tau_2)$, avec $\sigma_1 \in bat(k,n_k)$, $\tau_1 \in \mathfrak{S}_k$, $\tau_2 \in \mathfrak{S}_{n-k}$, alors :

$$\sigma.(\tau \otimes v \otimes w) = \sigma_1 \otimes \tau_1.v \otimes \tau_2.w.$$

Cette catégorie est symétrique. Si V, W sont deux $\mathbb{S}$-modules, on définit une volte $\alpha_{V,W}$: $V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ par :

$$\alpha_{V,W}(\sigma \otimes v \otimes w) = \sigma.\left(\left(\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & l+k \\ k+1 & \dots & k+l & 1 & \dots & k \end{array}\right) \otimes w \otimes v\right),$$

où $\sigma \in bat(k,l)$, $v \in V_k$, $w \in W_l$. Cette volte induit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$ pour tout $\mathbb{S}$-module V, l'action de $(i\, i+1)$ étant donnée par $Id_V^{\otimes_{\mathbb{S}}(i-1)} \otimes_{\mathbb{S}} \alpha_{V,V} \otimes_{\mathbb{S}} Id_V^{\otimes_{\mathbb{S}}(n-i-1)}$.

Remarques.

1. $\mathbb{S}$ possède un autre produit tensoriel, non symétrique celui-ci ; les algèbres dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules munie de ce second produit tensoriel sont les opérades.
2. Si V, W sont deux $\mathbb{S}$-modules, alors :

   $$dim((V \otimes_{\mathbb{S}} W)_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} dim(V_k) dim(W_{n-k}).$$

   Autrement dit, si pour tout $\mathbb{S}$-module V on considère sa série de Poincaré-Hilbert exponentielle :

   $$F_V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dim(V_n)}{n!} x^n,$$

   Alors $F_{V \otimes_{\mathbb{S}} W} = F_V F_W$.
3. Si V et W sont concentrés en degré 0, alors $V \otimes_{\mathbb{S}} W = V \otimes W$ et $\alpha_{V,W}$ est la volte usuelle de V et W. Ainsi, la catégorie monoïdale symétrique des espaces vectoriels peut être considéré comme la sous-catégorie des $\mathbb{S}$-modules concentrés en degré 0.

2.2 Objets tordus

En recopiant les axiomes habituels, on obtient les notions "tordues" :

1. Une algèbre associative unitaire tordue est un triple (V, m, ι) telle que V soit un $\mathbb{S}$-module, $m : V \otimes_{\mathbb{S}} V \longrightarrow V$ un morphisme de $\mathbb{S}$-module, $\iota : K \longrightarrow V$ un morphisme de $\mathbb{S}$-modules tel que :
   (a) $(m \otimes_{\mathbb{S}} Id_V) \circ m = (Id_V \otimes_{\mathbb{S}} m) \circ m$.
   (b) $m \circ (Id_V \otimes_{\mathbb{S}} \iota) = m \circ (\iota \otimes_{\mathbb{S}} Id_V) = Id_V$ (en utilisant l'identification canonique $K \otimes_{\mathbb{S}} V = V \otimes_{\mathbb{S}} K = V$).

   Remarque.
   (a) En considérant $V \otimes V \subseteq V \otimes_{\mathbb{S}} V$ et en restreignant m, on obtient une algèbre associative graduée dans le sens usuel. Les algèbres associatives tordues sont donc des algèbres associatives graduées munies de structures supplémentaires.
   (b) Les algèbres associatives tordues concentrées en degré 0 sont les algèbres associatives usuelles.
   (c) Si V est une algèbre associative tordue, alors V_0 est une algèbre associative.

2. Une algèbre associative unitaire tordue (V, m, ι) est commutative si $m \circ \alpha_{V,V} = m$. Autrement dit, pour tout $v \in V_k$, $w \in V_l$:

$$\begin{array}{rcl} vw &=& m(v \otimes w) \\ &=& m\left(\left(\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & l+k \\ k+1 & \dots & k+l & 1 & \dots & k \end{array}\right) \otimes w \otimes v\right) \\ &=& \left(\left(\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & l+k \\ k+1 & \dots & k+l & 1 & \dots & k \end{array}\right)\right).(wv). \end{array}$$

Il ne s'agit donc pas d'une algèbre commutative au sens usuel, sauf si l'action des groupes symétriques est triviale.

Remarques.

(a) Les algèbres associatives commutatives tordues concentrées en degré 0 sont les algèbres associatives commutatives usuelles.

(b) Si V est une algèbre associative commutative tordue, alors V_0 est une algèbre associative commutative.

3. Une algèbre de Lie tordue est un couple $(V, [-,-])$ où V est un $\mathbb{S}$-module et $[-,-]$: $V \otimes_{\mathbb{S}} V \longrightarrow V$ un morphisme de $\mathbb{S}$-modules, tels que :

(a) $[-,-] \circ \alpha_{V,V} = -[-,-]$.

(b) $[-,-] \circ ([-,-] \otimes_{\mathbb{S}} Id_V) \circ (Id_V + (123) + (132)) = 0$ (on utilise l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $V^{\otimes_{\mathbb{S}} 3}$ donnée par la volte).

L'antisymétrie se traduit alors par :

$$[v,w] = -\left(\left(\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & l+k \\ k+1 & \dots & k+l & 1 & \dots & k \end{array}\right)\right).[w,v],$$

pour tout $v \in V_k$, $w \in V_l$. A moins que l'action des groupes symétriques soit triviale, il ne s'agit donc pas de l'antisymétrie habituelle. Traduisons ensuite l'égalité de Jacobi. Si $u \in V_j$, $v \in V_k$, $w \in V_l$:

$$\begin{array}{rl} & (132).(u \otimes v \otimes w) \\ = & (\alpha_{V,V} \otimes_{\mathbb{S}} Id_V) \circ (Id_V \otimes_{\mathbb{S}} \alpha_{V,V})(u \otimes v \otimes w) \\ = & (\alpha_{V,V} \otimes_{\mathbb{S}} Id_V)\left(\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & \dots & j & j+1 & \dots & j+l & j+l+ & \dots & j+l+k \\ 1 & \dots & j & j+k+1 & \dots & j+k+l & j+1 & \dots & j+k \end{array}\right) \otimes u \otimes w \otimes v\right) \\ = & \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & \dots & j & j+1 & \dots & j+l & j+l+ & \dots & j+l+k \\ 1 & \dots & j & j+k+1 & \dots & j+k+l & j+1 & \dots & j+k \end{array}\right).(\alpha_{V,V} \otimes_{\mathbb{S}} Id_V)(\otimes u \otimes w \otimes v) \\ = & \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & \dots & j & j+1 & \dots & j+l & j+l+ & \dots & j+l+k \\ 1 & \dots & j & j+k+1 & \dots & j+k+l & j+1 & \dots & j+k \end{array}\right). \\ & \left(\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & j+l & j+l+ & \dots & j+l+k \\ 1+j & \dots & l+j & 1 & \dots & j & j+l+1 & \dots & j+l+k \end{array}\right) \otimes w \otimes u \otimes v\right) \\ = & \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & j+l & j+l+ & \dots & j+l+k \\ j+k+1 & \dots & j+k+l & 1 & \dots & j & j+1 & \dots & j+k \end{array}\right).(w \otimes u \otimes v). \end{array}$$

De même, on obtient :

$$\begin{array}{rl} & (123).(u \otimes v \otimes w) \\ = & \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & k+l & k+l+ & \dots & k+l+j \\ 1+j & \dots & k+j & k+1+j & \dots & k+l+j & 1 & \dots & j \end{array}\right).(v \otimes w \otimes u). \end{array}$$

Le crochet étant un morphisme de $\mathbb{S}$-modules, l'identité de Jacobi se traduit par :

$$\begin{array}{rl} & [[u,v],w] \\ & + \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & k+l & k+l+ & \ldots & k+l+j \\ 1+j & \ldots & k+j & k+1+j & \ldots & k+l+j & 1 & \ldots & j \end{pmatrix} .[[v,w],u] \\ & + \begin{pmatrix} 1 & \ldots & l & l+1 & \ldots & j+l & j+l+ & \ldots & j+l+k \\ j+k+1 & \ldots & j+k+l & 1 & \ldots & j & j+1 & \ldots & j+k \end{pmatrix} .[[w,u],v] \\ = & 0. \end{array}$$

Remarques.

(a) Les algèbres de Lie tordues concentrées en degré 0 sont les algèbres de Lie usuelles.

(b) Si V est une algèbre de Lie tordue, alors V_0 est une algèbre de Lie.

2.3 Algèbres symétriques tordues

Soit V un $\mathbb{S}$-module. L'espace suivant est naturellement muni d'uns structure d'algèbre associative unitaire tordue :

$$T_{\mathbb{S}}(V) = \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes_{\mathbb{S}} n}.$$

Le produit est définie par les applications canonique $V^{\otimes_{\mathbb{S}} k} \otimes_{\mathbb{S}} V^{\otimes_{\mathbb{S}} l} \longrightarrow V^{\otimes_{\mathbb{S}}(k+l)}$ et l'unité est l'injection canonique de $K = V^{\otimes_{\mathbb{S}} 0}$ dans $T_{\mathbb{S}}(V)$. Elle vérifie une propriété universelle, tout comme le font les algèbres tensorielles dans la catégorie des algèbres associatives unitaires.

On définit alors :

$$S_{\mathbb{S}}(V) = \frac{T_{\mathbb{S}}(V)}{\langle x \otimes y - \alpha_{V,V}(y \otimes x),\ x, y \in V \rangle}.$$

Il s'agit d'une algèbre associative unitaire commutative et elle vérifie une propriété universelle, tout comme le font les algèbres symétriques dans la catégorie des algèbres associatives unitaires commutatives.

On peut assez facilement montrer que :

$$S_{\mathbb{S}}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{V^{\otimes_{\mathbb{S}} n}}{\langle x \otimes y - \alpha_{V,V}(y \otimes x),\ x, y \in V \rangle \cap V^{\otimes_{\mathbb{S}} n}}}_{= S^n_{\mathbb{S}}(V)}.$$

En fait, $S^n_{\mathbb{S}}(V)$ est l'espace des coinvariants de $V^{\otimes_{\mathbb{S}} n}$, avec l'action de $\mathfrak{S}_n$ induite par la volte.

Proposition 10 *Soit V un $\mathbb{S}$-module concentré en degré 1. Alors $S_{\mathbb{S}}(V) = T(V)$ comme algèbre associative (tordue ou non).*

Preuve. Par définition, $V^{\otimes_{\mathbb{S}} n} = Ind_{\mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_n}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_1)$. Par suite, $\mathfrak{S}_1$ étant un groupe nul :

$$V^{\otimes_{\mathbb{S}} n} = K[\mathfrak{S}_n] \otimes V_1^{\otimes n}.$$

il s'agit d'un $K[\mathfrak{S}_n]$-module libre. Voyons l'action de la volte sur $V^{\otimes_{\mathbb{S}} 2}$. Par définition :

$$\alpha_{V,V}(v \otimes w) = (12) \otimes w \otimes v.$$

En conséquence, l'ation de $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes_{\mathbb{S}} n}$ induit par la volte est donnée par :

$$\sigma.(\tau \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \tau\sigma^{-1} \otimes v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Par suite, en prenant l'espace des coinvariants, $S^n_{\mathbb{S}}(V) \equiv V_1^{\otimes n}$ en identifiant $Id_n \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ et $v_1 \ldots v_n$. Par définition du produit de $T_{\mathbb{S}}(V)$, $(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k).(v_{k+1} \otimes \ldots \otimes v_{k+l}) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{k+l}$: on retrouve bien l'algèbre tensorielle usuelle. $\square$

Remarques.

1. Quelle est la structure de $\mathbb{S}$-module de $T(V)$? Comme V est concentré en degré 1, $T(V)_n = V^{\otimes n}$. Pour tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$, par définition de $V^{\otimes_{\mathbb{S}} n}$ et de son quotient $V^{\otimes n}$:

$$\sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \overline{\sigma \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_n} = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

2. La structure d'algèbre tordue de $T(V)$ est plus riche que la structure d'algèbre usuelle. En effet, le produit tordu est défini sur $T(V) \otimes_{\mathbb{S}} T(V)$, qui est plus gros que $T(V) \otimes T(V)$ (sauf si V est nul). La structure d'algèbre tordue est définie de la manière suivante : si $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}$, $v \in V^{\otimes k}$, $w \in V^{\otimes l}$:
$$m(\sigma \otimes v \otimes w) = \sigma.m(v \otimes w) = \sigma.(v \otimes w).$$
Ce produit est bien commutatif au sens tordu :
$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 1 & \ldots & l & l+1 & \ldots & l+k \\ k+1 & \ldots & k+l & 1 & \ldots & k \end{pmatrix} \right).((w_1 \otimes \ldots \otimes w_l).(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k)) \\ = \;& v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_l \\ = \;& (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k).(w_1 \otimes \ldots \otimes w_l). \end{aligned}$$

En particulier, en prenant $V = Kt$ où t est un élément de degré 1, $T(V) = K[t]$ est une algèbre associative unitaire tordue. L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $K[t]_n = Kt^n$ est triviale.

2.4 Algèbres de Lie tordues concentrées en degré 1

Les algèbres de Lie tordues concentrées en degré 0 sont les algèbres de Lie usuelles.

Soit V un $\mathbb{S}$-module concentré en degré 1. Alors $V \otimes_{\mathbb{S}} V$ est concentré en degré 2 et donc le seul morphisme de $\mathbb{S}$-modules de $V \otimes_{\mathbb{S}} V$ dans V est nul : au sens strict, les algèbres de Lie tordues concentrées en degré 1 sont triviales. Pour remédier à cela, on introduit un paramètre t de degré 1.

Définition 11 Soit V un espace vectoriel.

1. ΣV est le $\mathbb{S}$ module formé par V, entièrement concentré en degré 1. Ce $\mathbb{S}$-module est appelé *suspension* de V.
2. $\Sigma V[t]$ est le $\mathbb{S}$-module $\Sigma V \otimes_{\mathbb{S}} K[t]$. Il s'agit donc du $K[t]$-module tordu à droite librement engendré par $k[t]$.

Donnons une description de $\Sigma V \otimes_{\mathbb{S}} K[t]$. Par définition :

$$(\Sigma V \otimes_{\mathbb{S}} K[t])_n = Ind_{\mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(V \otimes Kt^{n-1}) = \bigoplus_{\sigma \in bat(1,n-1)} \sigma \otimes V \otimes Kt^{n-1}.$$

Or, $bat(1, n-1)$ est formé de n éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, où σ_i est l'unique battage de type $(1, n-1)$ envoyant 1 sur i. On décide alors d'identifier $\sigma_i \otimes v \otimes t^{n-1}$ avec $t^{i-1}vt^{n-i} \in K[t] \otimes V \otimes K[t]$ (l'élément v est en position i), et donc d'identifier $\Sigma V[t]$ et $K[t] \otimes V \otimes K[t]$, muni de la graduation obtenue en mettant t et les éléments de V en degré 1.

Comment est donnée l'action de $\mathfrak{S}_n$ via cette identification ? Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Alors $\tau\sigma_i(1) = \tau(i)$: on peut alors écrire $\tau\sigma_i = \sigma_{\tau(i)}(\tau_1 \otimes \tau_2)$, avec $\tau_1 \in \mathfrak{S}_1$, $\tau_2 \in \mathfrak{S}_{n-1}$.

$$\tau.(\sigma_i \otimes v \otimes t^{n-1}) = \sigma_{\tau(i)} \otimes \tau_1.v \otimes \tau_2.t^{n-1} = \sigma_{\tau(i)} \otimes v \otimes t^{n-1}.$$

Via l'identification :
$$\tau.(t^{i-1}vt^{n-i}) = t^{\tau(i)-1}vt^{n-\tau(i)}.$$

2.5 Lien entre les algèbres pré-Lie et les algèbres de Lie tordues

Théorème 12 *Soit V un espace vectoriel. On considère :*

1. *l'ensemble $PL(V)$ des produits pré-Lie sur V ;*
2. *l'ensemble $LT(V)$ des structures d'algèbres de Lie tordue sur $\Sigma V[t]$ qui sont $K[t]$-linéaires, c'est-à-dire vérifiant $[tv, w] = t[v, w]$ pour tous $v, w \in V$.*

Ces deux ensembles sont en bijection. La bijection est donnée de la manière suivante :

1. *Si $\circ$ est un produit pré-Lie sur V, on pose :*
$$[t^a x t^b, t^c y t^d] = t^a (x \circ y) t^{b+c+d+1} - t^{a+b+c+1} (y \circ x) t^d.$$
Ceci définit une structure d'algèbre de Lie tordue sur V.
2. *Si $[-,-]$ est un crochet de Lie tordu $k[t]$-linéaire sur V, alors le produit pré-Lie associé $\circ$ est défini par :*
$$[x, y] = t(x \circ y) - (y \circ x)t.$$

Preuve. Commençons par considérer les conséquences de la $K[t]$-linéarité. Soit $m : \Sigma V[t] \otimes_{\mathbb{S}} \Sigma V[t] \longrightarrow \Sigma V[t]$ un morphisme de $\mathbb{S}$-modules $K[t]$-linéaires, c'est-à-dire que $m(tx \otimes y) = tm(x \otimes y)$. Si $x, y \in V$, par homogénéité $m(x \otimes y) \in \Sigma V[t]_2$. On écrit donc :
$$m(x \otimes y) = m_1(x \otimes y)t + tm_2(x \otimes y),$$
où $m_1, m_2 : V \otimes V \longrightarrow V$. Alors :
$$\begin{aligned}
m(xt \otimes y) &= m(((12).tx) \otimes y) \\
&= m((12).(tx \otimes y)) \\
&= (12).m(tx \otimes y) \\
&= (12).(tm(x \otimes y)) \\
&= (12).(tm_1(x \otimes y)t + t^2 m_2(x \otimes y)) \\
&= m_1(x \otimes y)t^2 + t^2 m_2(x \otimes y).
\end{aligned}$$
De même :
$$\begin{aligned}
m(x \otimes ty) &= m_1(x \otimes y)t^2 + t^2 m_2(x \otimes y), \\
m(x \otimes yt) &= m(x \otimes y)t.
\end{aligned}$$
En conséquence :
$$m(t^a x t^b \otimes t^c y t^d) = t^a \left(m_1(x \otimes y) t^{b+c+1} + t^{b+c+1} m_2(x \otimes y) \right) t^d.$$
Donc m est entièrement déterminé par m_1 et m_2.

A quelle condition un tel produit est-il antisymétrique ? On pose :
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & c+d+1 & c+d+2 & \ldots & a+b+c+d+2 \\ a+b+2 & \ldots & a+b+c+d+2 & 1 & \ldots & a+b+1 \end{pmatrix}.$$
Alors :
$$\begin{aligned}
\sigma.m(t^c y t^d \otimes t^a x t^b) &= \sigma.(t^c m_1(x \otimes y) t^{a+b+d+1} + t^{a+c+d+1} m_2(x \otimes y) t^b) \\
&= t^{a+b+c+1} m_1(y \otimes x) t^d + t^a m_2(y \otimes x) t^{b+c+d+1}.
\end{aligned}$$
Donc m est antisymétrique (au sens tordu) si, et seulement si, $m_1 = -m_2^{op}$.

Soit maintenant un crochet antisymétrique $K[t]$-linéaire sur $\Sigma V[t]$. On pose, en modifiant les notations précédentes :

$$[x, y] = t(x \circ y) - (y \circ x)t.$$

Quand la relation de Jacobi est-elle vérifiée ? Soient $x, y, z \in V$. Alors, en utilisant la $K[t]$-linéarité :

$$\begin{array}{rcl}
[x,[y,z]] &=& [x, t(y \circ z) - (z \circ y)t] \\
&=& t^2 x \circ (y \circ z) - (y \circ z) \circ x t^2 - t x \circ (z \circ y) t + (z \circ y) \circ x t^2, \\
(123).[y,[z,x]] &=& y \circ (z \circ x) t^2 - t(z \circ x) \circ y t - t^2 y \circ (x \circ z) + t(x \circ z) \circ y t, \\
(132).[z,[x,y]] &=& t z \circ (x \circ y) t - t^2 (x \circ y) \circ z - z \circ (y \circ x) t^2 + t^2 (y \circ x) \circ z.
\end{array}$$

En sommant et en regroupant :

$$\begin{array}{rl}
& [x,[y,z]] + (123).[y,[z,x]] + (132).[z,[x,y]] \\
= & t^2(x \circ (y \circ z) - y \circ (x \circ z) - (x \circ y) \circ z + (y \circ x) \circ z) \\
& (-(y \circ z) \circ x + (z \circ y) \circ x + y \circ (z \circ x) - z \circ (y \circ x))t^2 \\
& +t(-x \circ (z \circ y) - (z \circ x) \circ y + (x \circ z) \circ y + z \circ (x \circ y))t.
\end{array}$$

Par suite, si la relation de Jacobi tordue est vérifiée, $\circ$ est un produit pré-Lie. réciproquement, si $\circ$ est un produit pré-Lie à droite, la relation de Jacobi tordue est vérifiée pour $x, y, z \in V$. La $K[t]$-linéarité implique que cette relation est satisfaite sur tout $\Sigma V[t]$. $\square$

3 Autres résultats

L'article [13] contient également :

1. Une preuve d'un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour les algèbres de Lie tordues : si $\mathfrak{g}$ est une algèbres de Lie tordue, $\mathcal{U}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $S_{\mathbb{S}}(\mathfrak{g})$ comme cogèbre tordue.
2. Une preuve du théorème 3 utilisant ce théorème de Poicaré-Birkhoff-Witt tordu : on prend l'espace des coinvariants de $\mathcal{U}_{\mathbb{S}}(\mathfrak{g})$.
3. Une généralisation du théorème 3 pour les algèbres pré-Lie tordues.
4. Une preuve du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt dans un contexte catégoriel très général.

Références

[1] Oliver Baues, *Left-symmetric algebras for $\mathfrak{gl}(n)$*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 7, 2979–2996.

[2] Frédéric Chapoton and Muriel Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Internat. Math. Res. Notices (2001), no. 8, 395–408.

[3] Alain Connes and Dirk Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199** (1998), no. 1, 203–242.

[4] Wee Liang Gan and Travis Schedler, *The necklace Lie coalgebra and renormalization algebras*, J. Noncommut. Geom. **2** (2008), no. 2, 195–214.

[5] Michel Goze and Elisabeth Remm, *Lie-admissible algebras and operads*, J. Algebra **273** (2004), no. 1, 129–152.

[6] Robert Grossman and Richard G. Larson, *Hopf-algebraic structure of families of trees*, J. Algebra **126** (1989), no. 1, 184–210.

[7] ———, *Hopf-algebraic structure of combinatorial objects and differential operators*, Israel J. Math. **72** (1990), no. 1-2, 109–117, Hopf algebras.

[8] Michael E. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), no. 1, 49–68.

[9] ———, *Combinatorics of rooted trees and Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 9, 3795–3811 (electronic).

[10] Alberto Medina Perea, *Flat left-invariant connections adapted to the automorphism structure of a Lie group*, J. Differential Geom. **16** (1981), no. 3, 445–474 (1982).

[11] J.-M. Oudom and D. Guin, *On the Lie enveloping algebra of a pre-Lie algebra*, J. K-Theory **2** (2008), no. 1, 147–167.

[12] Florin Panaite, *Relating the Connes-Kreimer and Grossman-Larson Hopf algebras built on rooted trees*, Lett. Math. Phys. **51** (2000), no. 3, 211–219.

[13] Travis Schedler, *Connes-Kreimer quantizations and PBW theorems for pre-Lie algebras*, arXiv 0907.1717.