CROISSANCE D'ANNEAUX GRADUÉS NOETHÉRIENS,

par Benoit Kriegk, d'après D. R. Stephenson et J. J. Zhang

On présente ici les détails d'une partie de l'article de Stephenson et Zhang intitulé "Growth of Graded Noetherian Rings", étudié pour l'exposé du 14 mars 2005 au Groupe de Travail Inter-universitaire en Algèbre. Dans cet article, les auteurs introduisent une nouvelle notion de croissance exponentielle pour des algèbres et des modules. On commence par des généralités sur la définition introduite par les auteurs, on comparera notamment leur nouvelle notion de croissance exponentielle avec celle qu'on trouve dans "Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension" de Krause et Lenagan. Dans une seconde partie, on détaillera le théorème principal de cet article, montrant qu'une algèbre graduée localement finie noethérienne à droite est à croissance sous-exponentielle. On verra enfin dans une troisième partie que ce théorème entraine, avec d'autres résultats de la catégorie graduée, qu'une algèbre graduée connexe noethérienne à droite et de dimension globale finie est de dimension de Gelfand-Kirillov finie.

Avant de commencer, je remercie vivement Laurent Rigal et Roland Berger pour leur investissement et leur aide constants tout au long de la préparation de cet exposé.

1 Croissance exponentielle d'algèbres et modules

Dans toute la suite, k est un corps commutatif, A est une k-algèbre associative unitaire et M est un A-module à droite non nul ; tout ce qui suit admet un analogue pour des A-modules à gauche. Si E est un k-espace vectoriel de dimension finie, on notera $|E| = \dim_k(E)$. Enfin, dans la suite, on ne considèrera que des espaces vectoriels, modules ou algèbres non nuls.

On rappelle que la dimension de Gelfand-Kirillov de M est définie comme suit :

Définition 1.1. *La dimension de Gelfand-Kirillov d'un A-module à droite M est :*

$$\mathrm{GKdim}(M) = \sup_{V,N} \overline{\lim_{n\to\infty}} \log_n |NV^n|,$$

où la borne supérieure est prise sur les k-espaces vectoriels $1 \in V \subseteq A$ et $N \subseteq M$ de dimension finie, et où $\log_n(x) = \ln(x)/\ln(n)$ désigne le logarithme en base n.

L'article de Stephenson et Zhang ([0]) définit la croissance de M comme :

Définition 1.2. *Posons*

$$\xi(M) = \sup_{V,N} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|NV^n|^{1/n}\right),$$

où la borne supérieure est prise sur les k-espaces vectoriels $1 \in V \subseteq A$ *et* $N \subseteq M$ *de dimension finie (comme dans la définition précédente).*

M est alors dit à croissance exponentielle (resp. sous-exponentielle) si $\xi(M) > 1$ *(resp.* $\xi(M) \leq 1$*).*

On définit de même la croissance d'une algèbre A comme étant $\xi(A) = \sup_{V} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|V^n|^{1/n}\right)$*, la borne supérieure étant prise sur les k-espaces vectoriels* $1 \in V \subseteq A$ *de dimension finie. A est alors dite à croissance exponentielle (resp. sous-exponentielle) si* $\xi(A) > 1$ *(resp.* $\xi(A) \leq 1$*).*

On va commencer par montrer que cette dernière définition de croissance exponentielle est la même, pour les algèbres, que celle de Krause/Lenagan dans "Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension" ([1]). Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3. *Soit* $1 \in V \subseteq A$ *et* $N \subseteq M$ *des k-espaces vectoriels de dimension finie non nulle. Alors :*

1. *la suite* $|V^n|^{1/n}$ *est convergente dans* $\mathbb{R}$*;*
2. *la limite supérieure est finie et :*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|NV^n|^{1/n}\right) \leq \xi(A) \underline{\lim_{n\to\infty}} \left(|NV^n|^{1/n}\right)$$

Preuve :

1. Soient n et m des entiers strictement positifs, comme $V^{n+m} = V^n.V^m$, on a l'inégalité $|V^{n+m}| \leq |V^n||V^m|$. Notons ensuite k et l les entiers tels que $n = km + l$ avec $0 \leq l < m$. On a :

$$|V^n|^{1/n} = |V^{l+mk}|^{1/n} \leq |V^l|^{1/n}|V^{mk}|^{1/n} \leq |V^l|^{1/n}|V^m|^{k/n}.$$

Comme $n \mapsto |V^n|$ est croissante et $\frac{k}{n} = \frac{1}{m} - \frac{l}{mn} \leq \frac{1}{m}$, on a alors :

$$|V^n|^{1/n} \leq |V^m|^{1/m}|V^m|^{1/n}. \tag{1}$$

En prenant la limite supérieure quand n tend vers l'infini on trouve :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|V^n|^{1/n}\right) \leq |V^m|^{1/m},$$

et prenant la limite inférieure quand m tend vers l'infini, on obtient la convergence de $(|V^n|^{1/n})_{n\geq 1}$. Enfin, comme pour tout n, on a $|V^n|^{1/n} \leq |V|$, la limite $\lim_{n\to\infty} |V^n|^{1/n}$ est finie.

2. Soient n et m des entiers strictement positifs, comme $NV^{n+m} = NV^n.V^m$, on a l'inégalité $|NV^{n+m}| \leq |NV^n||V^m|$. Il s'ensuit que $|NV^{n+m}|^{1/(n+m)} \leq |NV^n|^{1/(n+m)}|V^m|^{1/(n+m)} \leq |NV^n|^{1/n}|V^m|^{1/m}$. En prenant ensuite la limite supérieure quand m tend vers l'infini, on a avec le point précédent :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|NV^n|^{1/n}\right) = \overline{\lim_{m\to\infty}}(|NV^{n+m}|^{1/(n+m)}) \leq |NV^n|^{1/n} \lim_{m\to\infty}(|V^m|^{1/m}),$$

d'où $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|NV^n|^{1/n}\right) \leq |NV^n|^{1/n}\xi(A)$. On prend ensuite la limite inférieure quand n tend vers l'infini et on obtient l'inégalité voulue.
De plus, pour tout n, on a $|NV^n|^{1/n} \leq |N|^{1/n}|V| \leq |N||V|$, d'où le fait que $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|NV^n|^{1/n}\right)$ est finie.

□

Remarque 1.4. – Soit M un A-module à droite, on a de façon analogue à la dimension de Gelfand-Kirillov :

$$\xi(M) = \sup_{V,N} \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|NV^n|^{1/n}\right) \leq \xi(A) = \sup_{V} \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|V^n|^{1/n}\right),$$

en effet, si F et V sont des sous-k-espaces vectoriels non nuls de dimension finie de M et A respectivement, on a $|FV^n| \leq |F||V^n|$, d'où

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|FV^n|^{1/n}\right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|F|^{1/n}|V^n|^{1/n}\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|V^n|^{1/n}\right)$$

- Enfin, notant A_A l'algèbre en tant que module sur elle-même $\xi(A_A) = \xi(A)$. Le point précédent donne $\xi(A_A) \leq \xi(A)$, et si V est un sous-k-espace vectoriel non nul de dimension finie de A, on a $|V^n| \leq |(1.k).V^n|$, donc $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|V^n|^{1/n}\right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|(1.k).V^n|^{1/n}\right) \leq \sup_{V,N} \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|NV^n|^{1/n}\right) = \xi(A_A)$, d'où $\xi(A) \leq \xi(A_A)$.
- Si A et M sont non nuls on a toujours $\sup_{V,N} \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|NV^n|^{1/n}\right) \geq 1$, la borne supérieure étant prise pour V et N non nuls. Ceci montre que dans la définition de Stephenson/Zhang, un module est à croissance sous-exponentielle si et seulement si $\sup_{V,N} \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|NV^n|^{1/n}\right) = 1$.
- On peut également remarquer que cette notion de croissance est intéressante pour les "grandes" algèbres, puisqu'elle est égale à 1 pour les algèbres à croissance (au sens de Krause/Lenagan) polynomiale.
- La nouvelle notion de croissance introduite par Stephenson et Zhang est croissante pour l'inclusion (voir la définition 1.2), tout comme la dimension de Gelfand-Kirillov. Par contre, pour la dimension de Gelfand-Kirillov d'une algèbre A de type fini, on sait que $\mathrm{GKdim(A)} = \overline{\lim_{n\to\infty}}(\log_n |NV^n|)$ si V est un k-espace vectoriel de dimension finie générateur de A, mais ce comportement ne se retrouve pas pour la croissance ξ. En effet, on peut par

exemple remarquer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'algèbre libre à p générateurs s'injecte dans l'algèbre libre à 2 générateurs. Dans $k\!<\!x, y\!>$, on trouve ainsi des k-espaces vectoriels de dimension finie p, pour tout p. Pour un tel sous-k-espace vectoriel V, on a $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|V^n|^{1/n}\right) = p$, et donc $\xi(k < x, y >) = \infty$. Pourtant, si V est le k-espace vectoriel générateur engendré par 1, x et y, on a $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|V^n|^{1/n}\right) = 3 \neq \xi(k\!<\!x, y\!>)$.

On peut maintenant montrer que la définition de croissance exponentielle d'une algèbre pour Stephenson et Zhang est la même que celle de Krause et Lenagan, cette dernière concernant des algèbres de type fini. Soient donc A de type fini, et M un A-module à droite de type fini et soient $1 \in V$ et N des k-espaces vectoriels de dimension finie engendrant respectivement l'algèbre A et le module M (on dira dans la suite générateurs de A et M). Pour définir la croissance, Krause/Lenagan utilisent l'ordre partiel suivant sur les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à partir d'un certain rang sont strictement positives et croissantes : $f \leq g$ si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que pour $n >> 0$ on ait $f(n) \leq ag(bn)$. Ceci fournit une relation d'équivalence avec $f \sim g$ si $f \leq g$ et $g \leq f$. On appelle alors croissance de f sa classe modulo $\sim$, notée $\mathcal{G}(f)$. On notera encore $\leq$ l'ordre induit par cette relation d'équivalence. Une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ est alors à croissance exponentielle si la croissance de f est celle de l'exponentielle e^n, croissance qu'on note ε_1. Enfin, M est à croissance exponentielle si $|NV^n|$ est à croissance exponentielle, cette dernière croissance étant indépendante des choix de V et N générateurs de A et M (lemme 1.1 de [1]). Notons que Krause/Lenagan ont également montré que la croissance de M est au plus exponentielle (proposition 1.4 de [1]).

1. Supposons que M est à croissance exponentielle au sens de Krause/Lenagan, et considérons V et N des k-espaces vectoriels de dimension finie générateurs de A et M. Il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que pour $n >> 0$ on a $e^n \leq a|NV^{bn}|$, ce qui donne :
$$|NV^{bn}|^{1/bn} \geq \left(\frac{1}{a}\right)^{1/bn} e^{1/b},$$
d'où $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|NV^n|^{1/n}\right) \geq e^{1/b} > 1$, ce qui montre que M est à croissance exponentielle au sens de Stephenson/Zhang. Avec le deuxième point de la remarque précédente, on voit que si A est une algèbre de type fini à croissance exponentielle pour Krause/Lenagan, alors elle est à croissance exponentielle pour Stephenson/Zhang. Montrons maintenant la réciproque pour une algèbre.

2. Supposons maintenant que A est à croissance exponentielle pour Stephenson/Zhang, i.e. que $\sup_V \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|V^n|^{1/n}\right) > 1$. Donc il existe un k-expace vectoriel de dimension finie $1 \in V$ engendrant A et α tels que $\lim_{n\to\infty}(|V^n|^{1/n}) =$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(|V^n|^{1/n}\right) > \alpha > 1$, par le lemme 1.3. Donc pour $n >> 0$ on a $|V^n| > e^{n\ln(\alpha)}$. Si $\ln(\alpha) \geq 1$, on a pour $n >> 0$ $|V^n| > e^n$. Sinon, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \ln(\alpha) \geq 1$, alors pour $n >> 0$ on a $|V^{n_0 n}| > e^{n n_0 \ln(\alpha)} \geq e^n$. Donc A est à croissance exponentielle pour Krause/Lenagan.

Pour résumer, la notion de croissance exponentielle de Stephenson/Zhang est plus générale que celle de Krause/Lenagan, car cette dernière ne s'appliquait qu'aux algèbres de type fini, mais ces deux notions coïncident dans ce dernier cadre. Par contre, la croissance exponentielle au sens de Krause/Lenagan pour un module implique bien la croissance exponentielle au sens de Stephenson/Zhang, mais on n'a pas réussi à montrer la réciproque, ceci parce qu'on n'arrive pas à montrer l'analogue du premier point du lemme 1.3 pour les modules.

Dans la suite on utilisera la définition de Stephenson/Zhang.

Montrons maintenant :

Proposition 1.5. *Si* $\mathrm{GKdim}(M) < \infty$ *alors le module* M *est à croissance sous-exponentielle.*

Preuve : Soit $d = \mathrm{GKdim}(M)$, et soient $1 \in V \subseteq A$ et $N \subseteq M$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie non nuls. Soit $\epsilon > 0$, on a $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\log_n(|NV^n|)) \leq d < d + \epsilon$. Donc pour $n >> 0$, on a $\log_n(|NV^n|) \leq d + \epsilon$, c'est à dire $|NV^n|^{1/n} \leq e^{(d+\epsilon)\frac{\ln(n)}{n}}$, d'où $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(|NV^n|^{1/n}\right) \leq 1$, d'où $\xi(M) \leq 1$.
$\square$

2 Croissance des algèbres graduées noetheriennes

On désignera dans cette partie par A une algèbre $\mathbb{N}$-graduée, localement finie (i.e. $A = \bigoplus_{i\geq 0}$ où $|A_i| < \infty$ pour tout i), et M désignera maintenant un A-module à droite gradué borné inférieurement (i.e. $M = \bigoplus_{i=q}^{\infty} M_i$ pour un certain $q \in \mathbb{Z}$).

On rappelle :

Proposition 2.1. *Soient A une algèbre $\mathbb{N}$-graduée de type fini et M un A-module de type fini, on a :*

$$\mathrm{GKdim}(M) = \overline{\lim_{n\to\infty}}(\log_n \left(\sum_{i\leq n} |M_i|\right)).$$

Preuve : C'est le lemme 6.1 de Krause/Lenagan. □

Pour une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, on note $\delta(f) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(n)^{1/n}$. On démontre maintenant deux lemmes utiles pour la proposition 2.5.

Lemme 2.2. *Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que pour $n >> 0$ on ait $g(n) \leq f(an+b)$, où $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Alors on a $\delta(g) \leq \delta(f)^a$, en prenant la convention que $\infty^a = \infty$.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$, par propriété de la limite supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ implique $f(an+b)^{1/an+b} \leq \delta(f) + \epsilon$. On a donc pour $n >> 0$:

$$g(n)^{1/n} \leq f(an+b)^{1/n} = \left[f(an+b)^{1/an+b}\right]^{a+b/n} \leq (\delta(f)+\epsilon)^{a+b/n}.$$

On en déduit en prenant la limite supérieure quand n tend vers l'infini :

$$\delta(g) \leq (\delta(f)+\epsilon)^a,$$

ce qui donne le résultat en faisant tendre ϵ vers 0.
□

Lemme 2.3. *Soit $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ une k-algèbre graduée. Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $W = \bigoplus_{i=0}^{n_0} A_i$ est générateur de A comme k-algèbre (i.e. si A est de type fini), alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\bigoplus_{i=0}^{n} A_i \subseteq W^{2n}.$$

Preuve : C'est clair pour $n \leq n_0$ car $W \subseteq W^j$ pour tout $j \geq 1$. Soit $n \geq n_0 + 1$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $A_n \subseteq W^N$, et choisissons N minimal pour cette inclusion, i.e. $A_n \nsubseteq W^{N-1}$. Supposons que $N > 2n$, et soit $x \in A_n$, qui peut donc s'écrire sous la forme $x = \sum a_1 \cdots a_N$ où chaque terme $a_1 \cdots a_N$ est homogène , et où les $a_j \in W$ sont aussi homogènes. Supposons que dans un terme $\alpha = a_1 \cdots a_N$, on ait toujours degré$(a_i a_{i+1}) \geq n_0 + 1$ alors on aurait degré$(\alpha) \geq [N/2](n_0+1) \geq (N/2-1)(n_0+1) > (n-1)(n_0+1) \geq n =$ degré(x) car $n_0 \geq 1$ et $n \geq n_0 + 1$, ce qui impose que le terme α est annulé par d'autres dans x. Finalement, on peut dans $x = \sum a_1 \cdots a_N$ ne considérer que des termes $\beta = a_1 \cdots a_N$ pour lesquels il existe i tel que degré$(a_i a_{i+1}) \leq n_0$, donc $a_i a_{i+1} \in W$, ce qui montre que finalement, $x \in W^{N-1}$, et ce pour tout $x \in A_n$, ce qui contredit la minimalité de N. Ceci montre donc que $N \leq 2n$. $\square$

Remarque 2.4. Soit M un A-module à droite gradué et de type fini. Alors M est localement fini et borné inférieurement. Considérons $(m_\alpha)_{\alpha=1\cdots N_0}$ finie homogène et génératrice de M. Le fait que M est borné inférieurement est immédiat : il suffit de considérer le degré minimal $q := \min_{1\leq\alpha\leq N_0}\{\deg(m_\alpha)\}$, car A est $\mathbb{N}$ graduée.

Ensuite, soit $i \in \mathbb{Z}$ et $m \in M_i$, on a :

$$m = \sum_{\alpha=1}^{N_0} m_\alpha . a_\alpha,$$

où les a_α peuvent être choisis homogènes de degré $(i - \text{degré}(m_\alpha))$, de sorte que $a_\alpha \in \bigoplus_{0\leq j\leq i-q} A_j$. Comme $\bigoplus_{0\leq j\leq i-q} A_j$ est de dimension finie, une de ses bases $(e_\beta)_{\beta=1\cdots N_1}$ fournit une famille k-génératrice de cardinal fini de M_i, à savoir $m_\alpha.e_\beta$ pour $\alpha = 1..N_0$ et $\beta = 1..N_1$.

Avec cette remarque, on peut présenter le résultat suivant :

Proposition 2.5. *Soient toujours A $\mathbb{N}$-graduée, localement finie et de type fini, et M un A-module à droite gradué, borné inférieurement et de type fini. Alors M est à croissance exponentielle si et seulement si*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left[\sum_{i\leq n} |M_i| \right]^{1/n} \right) > 1$$

Preuve :

- Commencons par supposer que M est à croissance exponentielle, c'est à dire que $\sup_{V,N} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|NV^n|^{1/n}\right) > 1$. Soient $N \subseteq M$ et $V \subseteq A$ de dimension finie, tels que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|NV^n|^{1/n}\right) > 1$. Soit une base $(e_i)_{i=1\cdots n_0}$ de N. Notons q_N le degré maximal apparaissant dans la décomposition en éléments homogènes des e_i. On définit q_V de façon analogue. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $NV^n \subseteq \bigoplus_{i \leq q_N + nq_V} M_i$. En notant $U(n) = \sum_{i \leq n} |M_i|$, on obtient :

$$|NV^n| \leq U(q_N + nq_V),$$

ce qui donne avec le lemme 2.2 les inégalités $1 < \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|NV^n|^{1/n}\right) \leq \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(U(n)^{1/n}\right)\right]^{q_V}$, d'où la première implication.

– Réciproquement, supposons que $\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left[\sum_{i \leq n} |M_i|\right]^{1/n}\right) > 1$. Considérons maintenant $(e_i)_{i=1\cdots p}$ génératrice de M, qu'on choisit homogène. On note $N = \bigoplus_{i=1}^{p} k.e_i$. Soit $m \in M_n$, $n \geq q$, m s'écrit sous la forme $m = \sum_{i=1}^{p} e_i.a_i$, où les a_i non nuls peuvent être choisis homogènes de degré $(n - \text{degré}(e_i)) \leq n - q$. Comme A est de type fini, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $W = \bigoplus_{i=0}^{n_0}$ est générateur de A comme k-algèbre. Le lemme 2.3 montre alors que $m \in NW^{2(n-q)}$, d'où finalement

$$\bigoplus_{i=q}^{n} M_i \subseteq NW^{2n-2q}.$$

Notons encore $U(n) = \sum_{i \leq n} |M_i|$, on a donc $U(n) \leq |NW^{2n-2q}|$, donc le lemme 2.2 montre que :

$$1 < \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(U(n)^{1/n}\right) \leq \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|NW^n|^{1/n}\right)\right]^2,$$

d'où l'autre implication.

□

On peut maintenant préparer le premier théorème de l'article de Stephenson/Zhang, qui montre qu'une algèbre A graduée localement finie et noetherienne à droite est à croissance sous-exponentielle. Pour cela, on a besoin du lemme technique suivant, essentiel dans la preuve du théorème pour construire une chaine strictement croissante d'idéaux de A.

Lemme 2.6. *Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs ou nuls ayant une infinité de termes non nuls. On a les propriétés suivantes :*

1. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left(\sum_{i \leq n} d_i\right)^{1/n} \right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} (d_n^{1/n})$.
2. *Supposons que pour tout n on a $d_n > 0$ et soient des entiers strictement positifs $l_0, l_1, \ldots, l_s$, on a :*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left[\min_{0 \leq j \leq s} \left(\frac{d_n}{d_{n-l_j}}\right)^{1/l_j}\right] \right) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} (d_n^{1/n})$$

3. *Supposons que* $\overline{\lim}_{n\to\infty}(d_n^{1/n}) > 1$. *Alors il existe une suite extraite* $(d_{l_j})_{j\geq 0}$ *telle que :*
   – $d_{l_i} > 1$ *pour tout* $i \geq 0$ *;*
   – $d_{l_s} > \sum_{i<s} d_{l_s - l_i}$ *pour tout* $s \geq 1$.

Preuve :

1. Comme $d_n \leq \sum_{i\leq n} d_i$, on a déjà :
$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(d_n^{1/n}) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i\leq n} d_i\right)^{1/n}\right). \tag{2}$$
Les d_n étant des entiers, il y a une infinité de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $d_n \geq 1$, ce qui montre que $\overline{\lim}_{n\to\infty}(d_n^{1/n}) \geq 1$. Si $\overline{\lim}_{n\to\infty}(d_n^{1/n}) = \infty$ alors on a l'égalité voulue par (2). Sinon, soit $\alpha > \overline{\lim}_{n\to\infty}(d_n^{1/n}) \geq 1$. Il existe donc n_0 tel que pour $n > n_0$ on a $d_n \leq \alpha^n$. Ceci montre que pour $n > n_0$:
$$\sum_{i\leq n} d_i = \sum_{i\leq n_0} d_i + \sum_{i=n_0+1}^{n} d_i \leq \sum_{i\leq n_0} d_i + \sum_{i=n_0+1}^{n} \alpha^i \leq \sum_{i\leq n_0} d_i + n\alpha^n.$$
En posant $C_0 = \sum_{i\leq n_0} d_i$, on obtient :
$$\left(\sum_{i\leq n} d_i\right)^{1/n} \leq e^{\frac{1}{n}\ln(n\alpha^n(1+C_0/n\alpha^n))} = e^{\ln(\alpha)+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n}\ln(1+C_0/n\alpha^n)},$$
ce qui montre que $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i\leq n} d_i\right)^{1/n}\right) \leq \alpha$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > \overline{\lim}_{n\to\infty}(d_n^{1/n})$, on a l'autre inégalité $\overline{\lim}_{n\to\infty}(d_n^{1/n}) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i\leq n} d_i\right)^{1/n}\right)$.
2. On suppose ici que $d_n > 0$ pour tout n, et on considère des entiers strictement positifs $l_0, \ldots, l_s$. Tout d'abord, si $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\min_{0\leq j\leq s}\left(\frac{d_n}{d_{n-l_j}}\right)^{1/l_j}\right)$ est infinie, le résultat est vrai. Sinon, soit $\alpha > \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\min_{0\leq j\leq s}\left(\frac{d_n}{d_{n-l_j}}\right)^{1/l_j}\right)$, il existe donc n_0 tel que pour tout $n > n_0$ on a $\min_{0\leq j\leq s}(\frac{d_n}{d_{n-l_j}})^{1/l_j} < \alpha$. Donc :
$$\forall n > n_0, \exists i_0 \in \{0, \ldots, s\}, d_n < \alpha^{l_{i_0}} d_{n-l_{i_0}}.$$
Si $n - l_{i_0} > n_0$, de la même manière, il existe $i_1 \in \{0, \ldots, s\}$ tel que $d_n < \alpha^{l_{i_0}} d_{n-l_{i_0}} < \alpha^{l_{i_0}+l_{i_1}} d_{n-l_{i_0}-l_{i_1}}$. On réitère ce procédé, et on obtient

en un nombre fini d'étapes :

$$\forall n > n_0, \exists r \geq 0, \exists (i_0, \ldots, i_r) \in \{0, \ldots, s\}^{r+1}, d_n < \alpha^{l_{i_0}+\ldots+l_{i_r}} d_{n-l_{i_0}-\ldots-l_{i_r}}, \tag{3}$$

où $0 \leq n - l_{i_0} - \ldots - l_{i_r} \leq n_0 < n$ et $n - l_{i_0} - \ldots - l_{i_{r-1}} > n_0$. Ceci implique que $0 \leq l_{i_0} + \ldots + l_{i_r} - n + n_0 \leq n_0$ et donc l'équation (3) montre que :

$$d_n < \alpha^{n-n_0} \alpha^{l_{i_0}+\ldots+l_{i_r}-n+n_0} d_{n-l_{i_0}-\ldots-l_{i_r}} < \alpha^{n-n_0} \overline{d_{n_0}},$$

où $\overline{d_{n_0}} = \max\{d_j \alpha^{n_0-j} | j = 0 \ldots n_0\}$. Finalement, pour tout $n > n_0$, $d_n^{1/n} < \alpha^{1-n_0/n} \overline{d_{n_0}}^{1/n}$, et cette dernière expression étant de limite α quand n tend vers l'infini, on a :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (d_n^{1/n}) \leq \alpha.$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha > \overline{\lim_{n\to\infty}} (\min_{0\leq j\leq s} (\frac{d_n}{d_{n-l_j}})^{1/l_j})$, on a l'inégalité annoncée.

3. Supposons que $\overline{\lim_{n\to\infty}} (d_n^{1/n}) > 1$. On commence par traiter le cas où la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs. Soit $1 < b < a = \overline{\lim_{n\to\infty}} (d_n^{1/n})$, il existe donc $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_{l_0} > 1$ et $b^{l_0} > 2$. Supposons construits $l_0 < l_1 < \ldots < l_s$ tels que :

$$\text{pour tout } j = 1 \ldots s, \begin{cases} d_{l_j} > \sum_{i<j} d_{l_j - l_i} \\ b^{l_j} > 2^{j+1} \end{cases}$$

Le point précédent s'applique et montre que $\overline{\lim_{n\to\infty}} (\min_{0\leq j\leq s} (\frac{d_n}{d_{n-l_j}})^{1/l_j}) \geq a > b$. Le cardinal de l'ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ des entiers n vérifiant

$$\min_{0\leq j\leq s} \left(\frac{d_n}{d_{n-l_j}}\right)^{1/l_j} > b.$$

est ainsi infini. Choisissons donc $l_{s+1} \in X$ tel que $l_{s+1} > l_s$ et $b^{l_{s+1}} > 2^{s+2}$, on a d'une part :

$$\sum_{i<s+1} d_{l_{s+1}-l_i} < \sum_{i<s+1} d_{l_{s+1}} b^{-l_i} < d_{l_{s+1}} \sum_{i=0}^{s} 2^{-(i+1)} = \left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right) d_{l_{s+1}} < d_{l_{s+1}}, \tag{4}$$

et d'autre part, avec (4) et le fait que $l_{s+1} \in X$, on a $d_{l_{s+1}} > b^{l_0} d_{l_{s+1}-l_0} > d_{l_{s+1}-l_0} \geq 1$ car on a supposé la suite (d_n) à termes strictement positifs. On peut donc construire une sous-suite $(d_{l_j})_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions annoncées.

Il reste à voir le cas général où la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes entiers positifs ou nuls. On suppose toujours que $\overline{\lim_{n\to\infty}}(d_n^{1/n}) > 1$. On pose :

$$d'_n = \begin{cases} d_n \text{ si } d_n \neq 0 \\ 1 \text{ si } d_n = 0 \end{cases},$$

ce qui fait que $\overline{\lim_{n\to\infty}}(d_n'^{1/n}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}(d_n^{1/n}) > 1$. Le cas précédent donne $(d'_{l_i})_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions voulues. Donc pour tout i, on a $d'_{l_i} = d_{l_i}$, et pour tout s, $d_{l_s} = d'_{l_s} > \sum_{i<s} d'_{l_s-l_i} \geq \sum_{i<s} d_{l_s-l_i}$, ce qui donne les conditions annoncées.

□

C'est le troisième point de ce lemme technique qui est crucial dans la démonstration du théorème suivant : la propriété $d_{l_s} > \sum\limits_{i<s} d_{l_s-l_i}$ pour tout $s \geq 1$, appliquée à $(d_n) = (|A_n|)$, montrera qu'une algèbre graduée localement finie à croissance exponentielle ne peut pas être noetherienne.

Remarque 2.7. Supposons que A est noethérienne à droite et telle que $|A_0| < \infty$. Alors A est de type fini. En effet, on sait (cf 1.2.12 du cours de Master 2 de Laurent Rigal, démonstration adaptée du cas commutatif dans "Commutative algebra with a view toward algebraïc geometry" de D. Eisenbud) que A est engendrée comme anneau par A_0 et une famille finie d'éléments de A. Comme A_0 est de dimension finie, A est bien de type fini comme k-algèbre.

Théorème 2.8. *Soit A une algèbre $\mathbb{N}$-graduée localement finie. Si A est noethérienne à droite, alors A est à croissance sous-exponentielle. En conséquence, tout A-module gradué est à croissance sous-exponentielle.*

Preuve : Posons $d_n = |A_n|$. On procède par l'absurde, en supposant que A noethérienne à droite est à croissance exponentielle, i.e. (par les remarques 1.4, 2.7 et la proposition 2.5) que

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\left[\sum_{i\leq n} |A_i|\right]^{1/n}\right) > 1,$$

ce qui entraine qu'il y a une infinité de d_n non nuls. Le premier point du lemme 2.6 montre donc que $a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(d_n^{1/n}\right)$. Le troisième point de ce même lemme fournit une suite extraite $(d_{l_i})_{i\in\mathbb{N}}$ à termes strictement supérieurs à 1 et telle que pour tout $s \geq 1$, $d_{l_s} > \sum_{i<s} d_{l_s-l_i}$. En particulier, pour tout s, on a $|A_{l_s}| > 1$. Grâce à cette sous-suite, il est possible de construire par récurrence une suite strictement croissante d'idéaux à droite I^s, ce qui donnera la contradiction prouvant le théorème.

Commençons par considérer $x_0 \in A_{l_0}$. Supposons qu'on a, pour un entier $s \geq 1$, des éléments $x_j \in A_{l_j}$ et une suite strictement croissante d'idéaux $x_0 A = I^0 \subsetneq I^1 \subsetneq \ldots \subsetneq I^{s-1}$ vérifiant si $s \geq 2$ la relation

$$I^j = x_j A + I^{j-1} \tag{5}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, s-1\}$. On a alors (troisième propriété du lemme 2.6) $d_{l_s} = |A_{l_s}| > \sum_{i<s} d_{l_s - l_i} = \sum_{i<s} |A_{l_s - l_i}| \geq \sum_{i<s} |(x_i A)_{l_s}|$, grâce à la surjectivité des morphismes de k-espaces vectoriels gradués $\mu_i : a \in A_{l_s - l_i} \longmapsto x_i a \in (x_i A)_{l_s}$. Donc avec (5), $|A_{l_s}| > |(I^{s-1})_{l_s}|$, et on peut choisir $x_s \in A_{l_s} \setminus I^{s-1}$. On construit alors l'idéal à droite $I^s = x_s A + I^{s-1} \supsetneq I^{s-1}$.

Ce procédé fournit donc une chaîne strictement croissante d'idéaux à droite de A, algèbre noetherienne à droite, ce qui est absurde. La croissance de A est donc sous-exponentielle ; celle de tout A-module à droite M l'est aussi, par le premier point de la remarque 1.4. □

Corollaire 2.9. *Soit R une k-algèbre de type fini, noetherienne à droite et à croissance exponentielle. Soit $F = \{F_n | n \in \mathbb{N}\}$ une filtration exhaustive de dimension finie de R. Alors le gradué associé $gr_F R$ n'est noetherien ni à gauche ni à droite.*

Preuve : R étant à croissance exponentielle, soit $1 \in V \subseteq R$ un k-espace vectoriel de dimension finie tel que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|V^n|^{1/n}\right) > 1$. Comme la filtration est exhaustive, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $V \subseteq F_m$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V^n \subseteq F_m^n \subseteq F_{mn}$, donc on a avec le lemme 2.2 :

$$1 < \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|V^n|^{1/n}\right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|F_{mn}|^{1/n}\right) \leq \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|F_n|^{1/n}\right)\right)^m .$$

Or par définition du gradué associé, on a :

$$|F_n| = |\mathrm{gr}_F R_n| + |F_{n-1}| = \ldots = \sum_{i\leq n} |\mathrm{gr}_F R_i|,$$

ce qui prouve que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left(\sum_{i\leq n} |\mathrm{gr}_F R_i| \right)^{1/n} \right) > 1$. Ceci montre que l'algèbre graduée localement finie (car F est de dimension finie) $\mathrm{gr}_F R$ est à croissance exponentielle, et le théorème précédent (sa version à gauche) lui interdit donc d'être noetherienne à droite (à gauche). □

Il existe des algèbres de type fini noetheriennes à croissance exponentielle, si bien que les deux résultats précédents montrent que le fait d'être noetherien est plus contraignant, du point de vue de la croissance, pour les algèbres graduées que pour les algèbres non graduées. Remarquons également qu'une algèbre de type fini noetherienne et à croissance exponentielle ne peut pas être graduée de façon à être localement finie.

On peut donner un exemple : soit l'anneau de polynomes de Laurent tordu $A = k[x,y][z,z^{-1},\sigma]$, où σ est l'automorphisme de $k[x,y]$ défini par $\sigma(x) = x^2+y$ et $\sigma(y) = x$. On sait que A est noetherienne (théorème 4.5 de [4]), et le lemme 10 de [2] montre qu'elle est à croissance exponentielle. En particulier, A ne peut pas être graduée en étant localement finie. Enfin, le corollaire précédent montre que toute filtration de dimension finie de A donne un gradué associé non noetherien.

3 Algèbres graduées de dimension globale finie

3.1 Résultats de la catégorie graduée

Pour cette partie, on pourra consulter l'article de M. Artin, J. Tate et M. Van Den Bergh intitulé "Some Algebras Associated to Automorphisms of Elliptic Curves" ([7]). A partir de maintenant, A désigne une k-algèbre graduée connexe (i.e. A est $\mathbb{N}$ graduée et $A_0 = k$) localement finie et de dimension globale d finie. Pour M et N des A-modules à droite, on note $\mathrm{Hom}_A^d(M,N)$ les morphismes de A-modules h de degré d, c'est à dire tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $h(M_i) \subseteq N_{i+d}$ (les morphismes de la catégorie graduée sont les morphismes de degré 0). On définit ensuite $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A^d(M,N)$, et $\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(M,N)$ les foncteurs dérivés associés ; pour tout i, $\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(M,N)$ est un k-espace vectoriel gradué, dont la graduation sera notée $\underline{\mathrm{Ext}}_A^{i,j}(M,N)$. On rappelle (cf [6]) que la dimension globale de A est égale à la dimension projective de k_A, où k_A est le A-module à droite trivial égal à $A/\bigoplus_{i\geq 1} A_i$.

On rappelle également :

Définition 3.1. *Un morphisme surjectif de A-modules gradués $\varphi : M \longrightarrow M'$ est dit essentiel si pour tout sous-module strict N de M (i.e. $N \neq M$), la restriction $\varphi_{|N} : N \longrightarrow M'$ n'est pas surjective.*

Proposition 3.2. *Soient M et M' des A-modules gradués bornés inférieurement, et soit $\varphi : M \longrightarrow M'$ un morphisme de A-modules gradués surjectif. Alors φ est essentiel si et seulement si $Ker(\varphi) \subseteq A_+.M$, où $A_+ = \bigoplus_{n\geq 1} A_n$.*

Preuve : Voir [6]. $\square$

On peut alors montrer qu'un A-module gradué borné inférieurement admet une résolution projective constituée de morphismes essentiels (sur leurs images), dite résolution projective minimale, unique à isomorphisme près. Enfin, on rappelle que dans la catégorie graduée, les modules projectifs bornés inférieurement sont des modules libres (cf [6]).

A étant de dimension globale finie d, si M est un A-module gradué et borné inférieurement, il existe une résolution projective minimale de M formée de modules libres gradués, de la forme :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{z_p} A(-l_i^p) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{z_0} A(-l_i^0) \longrightarrow M \longrightarrow 0, \qquad (6)$$

où chaque z_i peut être infini, où $p \leq d$ et où les flèches sont de degré 0. On dit que M a une résolution libre graduée finie si chaque z_j est fini. Dans ce cas, on définit le polynôme caractéristique de M comme étant :

$$c_M(t) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j(\sum_{i=1}^{z_j} t^{l_i^j}) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Considérons maintenant un complexe $M_\bullet$ de A-modules gradués localement finis et bornés inférieurement :

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_1} M_0 \longrightarrow 0,$$

et notons pour tout i $(M_{i,j})_{j\in\mathbb{Z}}$ la graduation de M_i. Alors la caractéristique d'Euler-Poincaré appliquée au complexe précédent pris en degré j donne pour tout j l'égalité $\sum_i(-1)^i|M_{i,j}| = \sum_i(-1)^i|H^i(M_\bullet)_j|$. On en déduit donc que :

$$\sum_i(-1)^i h_{M_i}(t) = \sum_i(-1)^i h_{H^i(M_\bullet)}. \tag{7}$$

Lemme 3.3. *Soit A une k-algèbre graduée connexe noethérienne à droite, de dimension globale finie d, et soit M un A-module gradué de type fini. Alors :*

1. *M a une résolution minimale libre graduée finie et $h_A(t)c_M(t) = h_M(t)$. De plus, pour tout A-module gradué borné inférieurement et localement fini N, $\sum_i(-1)^i h_{\underline{Ext}_A^i(M,N)}(t) = c_M(t^{-1})h_N(t)$;*
2. *la résolution projective minimale du module trivial k_A est de la forme*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{z_d} A(-l_i^d) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{z_1} A(-l_i^1) \longrightarrow A \longrightarrow k_A \longrightarrow 0, \tag{8}$$

   où les z_j sont finis, et où tous les l_i^j sont strictement positifs.
   De plus, $h_A(t)c_{k_A}(t) = 1$

Preuve :

1. La dimension globale de A étant finie égale à d, on sait que la résolution minimale de M est de la forme :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{z_p} A(-l_i^p) \xrightarrow{d_p} \cdots \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{i=1}^{z_0} A(-l_i^0) \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0, \tag{9}$$

   où les z_j peuvent être à priori infinis et où $p \leq d$. Or par définition de la résolution minimale, le morphisme gradué d_0 est essentiel, c'est à dire que $\mathrm{Ker}(d_0) \subseteq A_+.\bigoplus_{i=1}^{z_0} A(-l_i^0) = \bigoplus_{i=1}^{z_0} A_+(-l_i^0)$, où $A_+ = \bigoplus_{i\geq 1} A_i$ (cf [6]). On en déduit que $M \simeq P_0/\mathrm{Ker}(d_0)$ se surjecte dans $\frac{\bigoplus_{i=1}^{z_0} A(-l_i^0)}{\bigoplus_{i=1}^{z_0} A_+(-l_i^0)} \simeq \bigoplus_{i=1}^{z_0} k_A(-l_i^0)$; M étant de type fini, ceci implique $z_0 < \infty$.

Ensuite, $\bigoplus_{i=1}^{z_0} A(-l_i^0)$ de type fini est donc noethérien, $\mathrm{Im}(d_1)$ est donc de type fini, et comme précédemment, $\mathrm{Im}(d_1)$ se surjecte dans un module isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^{z_1} k_A(-l_i^1)$, ce qui impose que z_1 est fini. On continue ce processus, et par récurrence finie, pour tout $j = 0 \ldots p$, z_j est fini.
On applique maintenant (7) à la résolution (9), et on obtient :

$$-h_M(t) + \sum_{j=0}^{p} (-1)^j h_{P_j}(t) = 0,$$

où $P_j = \bigoplus_{i=1}^{z_j} A(-l_i^j)$. Or

$$h_{P_j}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\bigoplus_{i=1}^{z_j} A(-l_i^j)_n| t^n = \sum_{i=1}^{z_j} (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |A_{n-l_i^j}| t^{n-l_i^j}) t^{l_i^j} = h_A(t) \sum_{i=1}^{z_j} t^{l_i^j},$$

d'où finalement $h_M(t) = h_A(t) \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \sum_{i=1}^{z_j} t^{l_i^j} = c_M(t) h_A(t)$.
Enfin, pour calculer les $\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(M,N)$, on applique le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_A(-,)$ à la résolution de M (sans M), ce qui donne :

$$0 \longleftarrow \underline{\mathrm{Hom}}_A(\bigoplus_{i=1}^{z_p} A(-l_i^d), N) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \underline{\mathrm{Hom}}_A(\bigoplus_{i=1}^{z_0} A(-l_i^0), N) \longleftarrow 0,$$

c'est à dire en utilisant le fait que $\underline{\mathrm{Hom}}_A(A,N) \simeq N$:

$$0 \longleftarrow \bigoplus_{i=1}^{z_p} N(l_i^d) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \bigoplus_{i=1}^{z_0} N(l_i^0) \longleftarrow 0, \tag{10}$$

et de la même manière que précédemment, la série de Hilbert de $\bigoplus_{i=1}^{z_j} N(l_i^j)$ est égale à

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\bigoplus_{i=1}^{z_j} N(l_i^j)_n| t^n = \sum_{i=1}^{z_j} (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |N_{n+l_i^j}| t^{n+l_i^j}) t^{-l_i^j} = h_A(t) \sum_{i=1}^{z_j} t^{-l_i^j},$$

d'où en utilisant (7) :

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i h_{\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(M,N)}(t) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i h_A(t) \sum_{i=1}^{z_j} t^{-l_i^j} = h_A(t) c_M(t^{-1}).$$

2. Le point précédent appliqué à k_A montre que la résolution projective minimale de k_A est de la forme :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{z_d} A(-l_i^d) \xrightarrow{f_d} \cdots \xrightarrow{f_1} \bigoplus_{i=1}^{z_0} A(-l_i^0) \longrightarrow k_A \longrightarrow 0, \tag{11}$$

où les z_j sont tous finis. Notons $P_j = \bigoplus_{i=1}^{z_j} A(-l_i^j)$. On voit que $P_0 = \bigoplus_{i=1}^{z_0} A(-l_i^0) = A$ car la surjection canonique $\pi : A \longrightarrow k_A = A/\bigoplus_{i\geq 1} A_i$ a pour noyau $A_+ = \bigoplus_{i\geq 1} A_i$, ce qui montre que π est essentielle.

Montrons maintenant que tous les l_i^j sont strictement positifs ($1 \leq j \leq d$), ce qu'on fait par récurrence finie. Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, z_1\}$ tel que $l_{i_0}^1 \leq 0$. Si $l_{i_0}^1 < 0$, la composante $A(-l_{i_0}^1)$ de P_1 est envoyée sur 0 car A vit en degré positif ou nul, donc la restriction de f_1 à $\bigoplus_{i=1; i\neq i_0}^{z_1} A(-l_i^1)$ a la même image que f_1 ce qui contredit la minimalité de (11). De plus, si $l_{i_0} = 0$, $1 \in A(-l_{i_0}^1) \subseteq P_1$ serait envoyé sur un élément de A_0, ce qui est impossible car $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Ker}(f_0) = A_+$. Donc pour tout $1 \leq i \leq z_1$, on a $l_i^1 > 0$.

Supposant maintenant que pour $j \in \{1, \ldots, d-1\}$ et pour tout $1 \leq i \leq z_j$ on a $l_i^j > 0$. Alors P_j vit en degré strictement supérieur à 0. Donc si pour un certain $i \in \{1, \ldots, z_{j+1}\}$ on avait $l_i^{j+1} \leq 0$, la composante $A(-l_i^{j+1})$ de P_{j+1} serait envoyée par f_{j+1} sur 0, ce qui comme précédemment contredit la minimalité de (11). Finalement, pour tout i, $l_i^{j+1} > 0$, ce qui achève la démonstration par récurrence finie.

Pour terminer, le premier point appliqué à $M = k_A$ donne $h_A(t)c_{k_A}(t) = 1$, car $h_{k_A}(t) = 1$.

□

3.2 Etude combinatoire de certains modules gradués dont la série de Hilbert est une fraction rationnelle

On rappelle qu'un module gradué M est borné inférieurement si il existe n_0 tel que $M_i = 0$ pour $i \leq n_0$. Dans ce cas, la série de Hilbert de M est $h_M(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |M_n| t^n$.

Lemme 3.4. *Soient $p(t) = \prod_{1\leq i\leq l}(1 - r_i t)$ et $q(t)$ deux polynômes premiers entre eux tels que $q(t)/p(t) = \sum_{n\geq 0} d_n t^n$ et $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|d_n|^{1/n}\right) \leq 1$.*
Alors pour tout i, $|r_i| \leq 1$.

Preuve : Par la formule d'Hadamard, on sait que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} d_n t^n$ est supérieur ou égal à 1, ce qui implique donc sa convergence pour tout $|t| < 1$. En particulier, comme p et q sont premiers entre eux, $p(t) \neq 0$ dès que $|t| < 1$. Les racines de p, qui sont les $1/r_i$, sont donc de module supérieur où égal à 1, ce qui donne le résultat. □

On rappelle le résultat suivant, dont on pourra trouver une démonstration dans [3]. J'adresse au passage un grand merci à François Gramain pour cette référence.

Lemme 3.5. *Soit p un polynôme unitaire à coefficients entiers. Supposons que tous les zéros z_i de p, $1 \leq i \leq d$, sont tels que $|z_i| \leq 1$. Alors pour tout i, soit $z_i = 0$, soit z_i est une racine de l'unité.*

Quelques définitions et résultats sont maintenant nécessaires pour la première proposition importante de cette partie.

Définition 3.6. *Une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée quasi-polynôme (ou multi-polynome) si il existe un entier $w \geq 1$ et des polynômes $f_1, \ldots, f_w$ tels que $f(n) = f_s(n)$ pour tout $n \equiv s(mod\ w)$. w est alors appelé quasi-période de f (cet entier n'est pas unique). On définit enfin le degré de f par :*

$$\deg(f) = \max\{\deg(f_s) | 1 \leq s \leq w\}.$$

On rappelle le résultat suivant, extrait de [1] :

Lemme 3.7. *Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Sont équivalentes :*

1. *f est un polynôme de degré d.*
2. *$n \longmapsto f(n+1) - f(n)$ est une fonction polynômiale de degré $d-1$.*

Preuve : Lemme 1.5-b) de Krause/Lenagan ([1]). $\square$

Lemme 3.8. *Soit $(d_i)_{i \geq 0}$ une suite d'entiers positifs tels que $i \longmapsto d_i$ est un quasi-polynôme de degré $\mu - 1 \geq 0$. Alors $n \longmapsto \sum_{i \leq n} d_i$ est un quasi-polynôme de degré μ.*

Preuve : Notons w une quasi-période de $i \longmapsto d_i$, et $f_0, \ldots, f_{w-1}$, $0 \leq s \leq w$ les polynômes tels que pour tout $0 \leq s \leq w-1$ et tout $n \equiv s \mod (w)$, on a $d_n = f_s(n)$. Comme pour tout i, on a $d_i \geq 0$, les coefficients dominants des polynômes f_j sont strictement positifs. Notons ensuite $u_n = \sum_{i \leq n} d_i$, pour tout $n \geq 0$. Soit $s \in \{0, \ldots, w-1\}$ et soit un entier $k \geq 0$, et posons $n = kw + s$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+w} - u_n &= \sum_{i=n+1}^{n+w} d_i \\
&= f_{s+1}(n+1) + f_{s+2}(n+2) + \ldots + \\
&\quad + f_{w-1}(n+w-s-1) + f_0(n+w-s) + \ldots + f_s(n+w)
\end{aligned}$$

En posant $v_{k,s} = u_{wk+s}$ et

$$\begin{aligned}
P_s(X) &= f_{s+1}(wX+s+1) + f_{s+2}(wX+s+2) + \ldots + \\
&\quad + f_{w-1}(wX+s+w-s-1) + f_0(wX+s+w-s) + \ldots \\
&\quad + f_s(wX+s+w) \\
&= f_{s+1}(wX+s+1) + f_{s+2}(wX+s+2) + \ldots + \\
&\quad + f_{w-1}((w+1)X-1) + f_0((w+1)X) + \ldots + f_s((w+1)X+s),
\end{aligned}$$

on a donc pour tout k :

$$v_{k+1,s} - v_{k,s} = P_s(k).$$

De plus, les polynômes apparaissant dans l'expression de P_s sont des composés des f_i par des applications linéaires $X \longrightarrow aX + b$, donc de même degré que les f_i. En ajoutant le fait que les f_i sont à coefficients dominants positifs, ceci montre que $P_s(X)$ est de degré égal au maximum des degrés des f_i. On a donc $\deg(P_s) = \mu - 1$.

Alors le lemme 3.7 s'applique, et montre que pour tout $s \in \{0, \ldots, w-1\}$, $v_{k,s}$ est un polynôme en k de degré $\mu - 1 + 1 = \mu$, c'est à dire qu'il existe un polynôme Q_s de degré μ tel que pour tout k, $u_{wk+s} = Q_s(k)$. En posant $R_s(X) = Q_s(\frac{1}{w}X - \frac{s}{w})$, on a donc $\sum_{i \leq n} d_i = R_s(n)$ pour tout n congru à s modulo w.

Ceci étant valable pour tout $0 \leq s \leq w-1$, $u_n = \sum_{i \leq n} d_i$ est bien un quasi-polynôme en n de période w, de degré μ. En outre, les polynômes R_s tels que $u_n = R_s(n)$ pour $n \equiv s(w)$ sont tous de même degré μ. $\square$

Enfin, on rappelle un dernier résultat, extrait de la proposition 4.4.1 de [5], essentiel dans la prochaine proposition :

Lemme 3.9. *Les conditions suivantes sur une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ et un entier $N > 0$ sont équivalentes :*

- *f est un quasi-polynôme de quasi-période N ;*
- *$\sum_{n \geq 0} f(n)x^n = P(x)/Q(x)$, où P, $Q \in \mathbb{C}[x]$ sont premiers entre eux et sont tels que deg$(P) <$ deg(Q) et $\alpha^N = 1$ pour toute racine α de Q.*

On peut alors démontrer la proposition principale de cette sous-section :

Proposition 3.10. *Soit A une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée, localement finie et de type fini, et M un A-module localement fini, de type fini et à croissance sous-exponentielle. Supposons que $h_M(t) = t^l q(t)/p(t)$ où p et q sont deux polynomes premiers entre eux à coefficients entiers. Supposons en outre que $p(0) = 1$.*

Alors les racines de p sont des racines de l'unité et $\mathrm{GKdim}(M) = m(p(t))$, *où $m(p(t))$ désigne la multiplicité de* 1 *comme racine de p.*

Preuve : Comme $p(0) = 1$, on peut écrire p sous la forme $p(t) = \prod_{i=1}^{d_p}(1 - r_i t)$ et on sait que $q(t)/p(t) = \sum_{n \geq 0} d_n t^n$. En outre, on remarque que M est de dimension finie sur k si et seulement si h_M est un polynôme, ce qui est équivalent à dire que seul un nombre fini de d_n est non nul. Dans ce cas, on sait par la proposition 2.1 que $\mathrm{GKdim}(M) = 0$, ce qui est conforme aux conclusions de la proposition car on a alors $p(t) = 1$. Supposons donc dans la suite que M est de dimension infinie en tant que k-espace vectoriel, et donc qu'il y a une infinité de d_n non nuls.

M étant de type fini, il est borné inférieurement, on peut donc noter $M = \bigoplus_{i \geq n_0} M_i$, de sorte que $M_{n_0} \neq 0$. On a alors les égalités $q(t)/p(t) = t^{-l}h_M(t) = \sum_{j \geq n_0 - l} |M_{j+l}| t^j$, ce qui montre que $n_0 - l \geq 0$ et que pour $n \geq n_0 - l$ on a :

$$d_n = |M_{n+l}|, \tag{12}$$

ce qui montre donc avec le lemme 2.6 que :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(d_n^{1/n}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(|M_n|^{1/n}\right)\leq 1,$$

la dernière inégalité provenant de la proposition 2.5 car M est par hypothèse à croissance sous-exponentielle. On peut donc appliquer le lemme 3.4, ce qui montre qu'en écrivant p sous la forme $p(t)=\prod_{i=1}^{d_p}(1-r_it)$, on a pour tout i $|r_i|\leq 1$. Or p étant à coefficients entiers, $\prod_{i=1}^{d_p} r_i$ est un entier non nul (car les r_i sont non nuls) de valeur absolue inférieure où égale à 1. Finalement, tout ceci montre que pour tout i, on a $|r_i|=1$. Les racines $(z_i=1/r_i)_{i=1\ldots d_p}$ de p sont donc de module 1, ce qui, en appliquant le lemme 3.5, montre qu'elles sont racines de l'unité.

On en déduit qu'il existe $N>0$ tel que pour tout $i\in\{1,\ldots,d_p\}$, on a $r_i=\zeta^{n_i}$, où ζ est une racine primitive N-ième de 1 et où les $n_i\in\{0,\ldots,N-1\}$. Ecrivant la division euclidienne de q par p, on obtient :

$$\frac{q(t)}{p(t)}=f(t)+\frac{q_0(t)}{p(t)}=f(t)+\frac{q_0(t)}{\prod_{i=1}^{d_p}(1-\zeta^{n_i}t)}=\sum_{n\geq 0}d_nt^n \quad , \tag{13}$$

où f et q_0 sont les polynômes à coefficients entiers tels que $q=fp+q_0$ et $\deg(q_0)<\deg(p)$. Décomposant la fraction $q_0(t)/p(t)$ en éléments simples ($q_0\neq 0$ car p et q sont premiers entre eux), et notant $\mu>0$ le plus grand des ordres des racines, on sait qu'il existe des coefficients complexes $C_{i,j}$ (dans $\mathbb{Q}(\zeta)$) tels que :

$$\sum_{n\geq 0}d_nt^n=f(t)+\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{\mu}\frac{C_{i,j}}{(1-\zeta^it)^j} \quad . \tag{14}$$

En utilisant le développement $\frac{1}{(1-\zeta^it)^j}=\sum_{n\geq 0}\binom{n+j-1}{j-1}\zeta^{in}t^n$, on trouve que pour $n>\deg(f)$, on a :

$$\begin{aligned}
d_n &= \sum_{\substack{0\leq i\leq N-1\\ 1\leq j\leq \mu}} C_{i,j}\binom{n+j-1}{j-1}\zeta^{in}\\
&= \sum_{i=0}^{N-1}C_{i,\mu}\frac{n^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\zeta^{in}+R\\
&= \left(\sum_{i=0}^{N-1}C_{i,\mu}\zeta^{in}\right)\frac{n^{\mu-1}}{(\mu-1)!}+R \quad ,
\end{aligned}$$

où R est une expression polynomiale en n de degré strictement inférieur à $\mu-1$. En outre, on sait par le lemme 3.9 que d_n est un quasi-polynôme (en n) de période N, ce qu'on retrouve en partie dans l'expression du terme de plus haut degré ci-dessus, $\sum_{i=0}^{N-1}C_{i,\mu}\zeta^{in}$. On va maintenant montrer que ce dernier terme est non nul pour une infinité de n, pour cela il suffit donc de montrer qu'un de ces termes est non nul pour $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. Par définition de μ, on sait que les $C_{i,\mu}$ ne sont pas tous nuls. On a alors :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} C_{i,\mu} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-1} C_{i,\mu}\zeta^{i(N-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{N-1} & \cdots & \zeta^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{0,\mu} \\ \vdots \\ C_{N-1,\mu} \end{pmatrix} . \tag{15}$$

Le déterminant de la matrice de Vandermonde ci-dessus est égal au produit $\prod_{0 \leq i < j \leq N-1} (\zeta^j - \zeta^i) \neq 0$, car ζ est une racine primitive N-ème de l'unité. Le vecteur des $C_{i,\mu}$ étant non nul, le vecteur de gauche est lui aussi non nul.

On sait donc que pour $n >> 0$, la fonction $n \in \mathbb{N} \longrightarrow d_n$ est un quasi-polynôme de degré $\mu - 1$. On va ensuite montrer que μ est égal à l'ordre de 1 comme racine de $p(t)$. Or avec (12), on sait que pour $n >> 0$ on a $d_n \geq 0$, ce qui impose que pour tout n on aie $a_n := \sum_{i=0}^{N-1} C_{i,\mu}\zeta^{in} \geq 0$. L'un au moins de ces termes étant non nul, on a en sommant pour $n = 0 \ldots N-1$:

$$0 < \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} C_{i,\mu}\zeta^{in} = NC_{0,\mu},$$

ce qui montre avec (14) que 1 est bien racine de $p(t)$, et que son ordre est μ. On a donc $\mu = m(p(t))$.

Pour terminer, il reste à voir qu'avec (12), on a les égalités $\log_n(\sum_{i \leq n} |M_i|) = \frac{\ln(\sum_{i \leq n-l} d_i)}{\ln(n)} = \log_{n-l}(\sum_{i \leq n-l} d_i) \frac{\ln(n-l)}{\ln(n)}$, d'où :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (\log_n(\sum_{i \leq n} |M_i|)) = \overline{\lim_{n \to \infty}} (\log_n(\sum_{i \leq n} d_i)).$$

Or comme A et M sont de type fini, on a $\mathrm{GKdim}(M) = \overline{\lim_{n \to \infty}} (\log_n(\sum_{i \leq n} |M_i|))$, et la démonstration est terminée grâce au lemme 3.8, qui montre que $\sum_{i \leq n} |M_i|$ est un quasi-polynôme en n de degré $\mu - 1 + 1 = \mu$. □

3.3 Application

Théorème 3.11. *Soit A une k-algèbre graduée connexe noethérienne à droite, de dimension globale finie d. Alors :*

1. *La dimension de Gelfand-Kirillov de A est finie ;*
2. *$c_{k_A}(t^{-1}) = \pm t^{-l} c_{k_A}(t)$ et $h_A(t^{-1}) = \pm t^l h_A(t)$, où l est le degré de $c_{k_A}(t)$.*

Preuve : Le deuxième point du lemme précédent montre que le polynôme caractéristique $c_{k_A}(t)$ de k_A est dans $\mathbb{Z}[t]$, et le premier point montre qu'on a $h_A(t)c_{k_A}(t) = 1$. De plus, le premier point de ce même lemme montre que $p(0) = 1$, car $z_0 = 1$ et $l_1^0 = 0$. En outre, comme A est noethérienne à droite et connexe, elle est de type fini en tant qu'algèbre. D'autre part, le théorème 2.8 montre que A est à croissance sous-exponentielle, et comme $h_A(t) = 1/c_{k_A}(t)$, on se trouve dans les hypothèses de la proposition 3.10 appliquée à A, ce qui prouve que la dimension de Gelfand-Kirillov de A est finie et égale à la multiplicité de 1 comme racine de $c_{k_A}(t)$.

Enfin, en notant l le degré de $c_{k_A}(t)$, et en mettant le polynôme caractéristique de k_A sous la forme $c_{k_A}(t) = \prod_{i=1}^{l}(1 - r_i t)$ cette même proposition 3.10 montre que pour tout i, r_i est une racine de l'unité. Comme $c_{k_A}(t)$ est à coefficients entiers, on a donc $\prod_{i=1}^{l} r_i = \pm 1$, ce qui montre que :

$$t^l c_{k_A}(t^{-1}) = \prod_{i=1}^{l}(t - r_i) = \pm \prod_{i=1}^{l}(1 - r_i^{-1} t) = \pm \prod_{i=1}^{l}(1 - \bar{r}_i t) = \pm \bar{c}_{k_A}(t) = \pm c_{k_A}(t),$$

ce qui prouve la première égalité. Le fait que $h_A(t)c_{k_A}(t) = 1$ entraine la seconde, ce qui termine la démonstration. □

Pour terminer, on donne un corollaire de ce théorème, montrant que l'on peut affaiblir la condition de Gorenstein apparaissant dans la définition des algèbres Artin-Schelter régulières : il s'agit d'algèbres $\mathbb{N}$-graduées connexes, de dimension globale finie d, dont le module trivial admet une résolution libre-graduée finie, à croissance polynomiale, qui vérifient en plus la condition de Gorenstein : $\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(k, A) = 0$ pour $i \neq d$ et $\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(k, A) = k$ en tant que k-espace vectoriel. Le corollaire suivant montre que pour une telle algèbre noethérienne, il suffit de vérifier la première partie de la condition de Gorenstein :

Corollaire 3.12. *Soit A une k-algèbre graduée connexe noethérienne à droite, de dimension globale finie d. Si $\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(k_A, A) = 0$ pour tout $i \neq d$, alors il existe un entier l tel que $\underline{\mathrm{Ext}}_A^d(k_A, A) = k(l)$.*

Preuve : Le théorème précédent montre que $c_{k_A}(t) = \pm t^{-l} c_{k_A}(t)$, où $l = \deg(c_{k_A})$. Le premier point du lemme 3.3 montre avec les hypothèses que :

$$(-1)^d h_{\underline{\mathrm{Ext}}_A^d(k_A, A)}(t) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i h_{\underline{\mathrm{Ext}}_A^i(k_A, A)}(t) = c_{k_A}(t^{-1}) h_A(t),$$

d'où avec le second point de ce même lemme :

$$(-1)^d h_{\underline{\mathrm{Ext}}_A^d(k_A, A)}(t) = \pm t^{-l} c_{k_A}(t) h_A(t) = \pm t^{-l},$$

ce qui montre que le k-espace vectoriel gradué $\underline{\mathrm{Ext}}_A^d(k_A, A)$ est de dimension 1, et qu'il est concentré en degré $-l$, c'est à dire $\underline{\mathrm{Ext}}_A^d(k_A, A) = k(l)$. □

Références

[0] D. R. Stephenson and J. J. Zhang, Growth of Graded Noetherian Rings, *Proc. of the A.M.S., vol.* **125**, *1997, p. 1593-1605.*

[1] G. R. Krause and T. H. Lenagan, Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension, revised edition *Graduate Studies in Mathematics, vol* **22**, *AMS, 2000.*

[2] M. K. Smith, Growth of twisted Laurent extensions, *Duke Math. J.* **49**, *1982, p. 79-85.*

[3] G. Polya, G. Szegö, Problems and theorems in Analysis, *Vol II, Springer, 1976.*

[4] J.C. McConnel and J.C. Robson, Noncommutative Noetherian Rings, *Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, 1987.*

[5] R. P. Stanley, Enumerative combinatorics, *Vol I, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1986.*

[6] R. Berger, L. Rigal, Conditions de régularité en algèbre non commutative, *Cours de Master 2, Université Lyon 1, 2004.*

[7] M. Artin, J. Tate and M. Van Den Bergh, Some algebras associated to Automorphisms of Elliptic Curves, *The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 1990, p. 33-85*