GTIA

Algèbre de Lie simple de dimension 3 sur un corps non nécessairement algébriquement clos

Vincent Beck

11 janvier 2021

Contexte

- k désigne un corps de caractéristique différente de 2 ;
- $\mathscr{L}$ une algèbre de Lie de dimension 3 sur k ; $\dim_k \mathscr{L} = 3$.
- On suppose que $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$ ce qui dans notre contexte revient à supposer que $\mathscr{L}$ est simple.

Objectif : utiliser au maximum la théorie des formes quadratiques via la forme de Killing réduite pour décrire la structure de $\mathscr{L}$.

Partie I. Structure

Programme : Partie I

1. $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}] \iff \mathscr{L}$ est simple
2. Espace quadratique
3. Étude des éléments isotropes
4. Étude des éléments anisotropes
5. Structure
6. Le cas isotrope
7. Automorphismes

Partie I.1.

$$\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}] \iff \mathscr{L} \text{ simple}$$

De $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$ à la simplicité (1)

Lemme On suppose que $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$. Pour toute base (x, y, z) de $\mathscr{L}$, $([x, y], [z, x], [y, z])$ est aussi une base $\mathscr{L}$.

Preuve. La famille $([x, y], [z, x], [y, z])$ engendre le sous-espace $[\mathscr{L}, \mathscr{L}] = \mathscr{L}$.

De $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$ à la simplicité (1)

Lemme On suppose que $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$. Pour toute base (x, y, z) de $\mathscr{L}$, $([x, y], [z, x], [y, z])$ est aussi une base $\mathscr{L}$.

Preuve. La famille $([x, y], [z, x], [y, z])$ engendre le sous-espace $[\mathscr{L}, \mathscr{L}] = \mathscr{L}$.

Corollaire On suppose que $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$. Pour tout $x \neq 0$, $Z(x) = \{y \in \mathscr{L}, [x, y] = 0\} = kx$ et $\mathscr{L}$ ne contient aucune sous-algèbre de Lie commutative de dimension 2.

Preuve. Si y n'est pas colinéaire à x, on complète la famille (x, y) en une base de $\mathscr{L}$. Le lemme précédent assure que $[x, y] \neq 0$.

De $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$ à la simplicité (2)

Corollaire Une algèbre de Lie $\mathscr{L}$ tridimensionnelle est simple si et seulement si $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$.

Preuve. Si $\mathscr{L}$ est simple alors $[\mathscr{L}, \mathscr{L}] = 0$ or $[\mathscr{L}, \mathscr{L}] = \mathscr{L}$. Dans le premier cas, tout sous-espace de $\mathscr{L}$ est un idéal. NON.

On suppose que $[\mathscr{L}, \mathscr{L}] = \mathscr{L}$ et soit $I \neq \{0\}$ un idéal de $\mathscr{L}$.

Si $\dim I = 1$, on écrit $I = kx$ et on complète x en une base(x, y, z) de $\mathscr{L}$. Comme I est un idéal, $[x, y] \in I$ and $[z, x] \in I$ et sont donc colinéaires. Le lemme précédent donne une contradiction.

Si $\dim I = 2$, on considère (x, y) une base de I qu'on complète par z en une base de $\mathscr{L}$. Comme I est un idéal $[x, y], [z, x]$ et $[y, z]$ appartiennent à I et le lemme précédent fournit encore une contradiction.

On suppose à présent que $\mathscr{L}$ est simple de dimension 3 !

Partie I.2. Espace quadratique

Polynôme caractéristique

Proposition Pour tout $x \in \mathscr{L}$, le polynôme caractéristique $\chi_x(T)$ de ad_x est donné par $\chi_x(T) = T^3 + q(x)T$ où q est une forme quadratique non dégénérée dont la forme bilinéaire associée est $K : (x, y) \mapsto -1/2\mathrm{tr}\,(ad_x ad_y)$.

Preuve. Comme $[\mathscr{L}, \mathscr{L}] = \mathscr{L}$, la trace de ad_x est 0. Ainsi le coefficient en T^2 de χ_x est 0.

De plus, x est dans le noyau de ad_x. Le coefficient constante de χ_x est donc 0.

Le coefficient de T dans χ_x est $1/2(\mathrm{tr}\,(ad_x)^2 - \mathrm{tr}\,({ad_x}^2))$ ce qui donne la forme voulu pour χ_x.
The relation $K([x, y], z) = K(x, [y, z])$ montre que le noyau de K (ou q) est un ideal of $\mathscr{L}$ et donc soit $\mathscr{L}$ or $\{0\}$. Dans le premier cas, ad_x est nilpotent pour tout x et le théorème de Engel donne une contradiction.

Espace quadratique

Notation Dans toute la suite, on considère $\mathscr{L}$ comme un espace quadratique où la forme quadratique associée est q et la forme bilinéaire K.

Ainsi, un élément de $\mathscr{L}$ est dit isotrope (resp. anisotrope) s'il l'est relativement à q i.e. si $q(x) = 0$ (resp. $q(x) \neq 0$).

L'orthogonalité sera systématiquement l'orthogonalité par rapport à q ou K.

Partie I.3. Éléments isotropes

retour

Étude de ad_x : cas isotrope

Proposition – Cas isotrope. L'élément x est isotrope si et seulement si ad_x est nilpotent. Dans ce cas, ad_x est semblable a un bloc de Jordan de taille 3 et $\mathrm{Ker}\, {ad_x}^2 = \mathrm{Im}\, ad_x = x^\perp$ est une sous-algèbre de Lie de dimension 2 non abélienne.

Preuve. Cela résulte de la forme du polynôme caractéristique : $\chi_x(T) = T^3$ si et seulement si $q(x) = 0$.

On a $\mathrm{Ker}\, ad_x = kx$ et donc $\mathrm{Ker}\, {ad_x}^2 = \mathrm{Im}\, ad_x$. De plus, la relation $K([y,x],z) = K(y,[x,z])$ montre que ad_x est antisymétrique pour K. Ainsi $\mathrm{Im}\, ad_x = \mathrm{Ker}\, {ad_x}^\perp = x^\perp$.

On a $\dim \mathrm{Ker}\, {ad_x}^2 = 2$. Si $y \in \mathrm{Ker}\, {ad_x}^2 \setminus \mathrm{Ker}\, ad_x$ alors $[x,y] \in \mathrm{Ker}\, ad_x = kx$. De plus, d'après le lemme initial, $[x,y] \neq 0$. Ainsi quitte à multiplier y par un scalaire, on a $[x,y] = x$.

Partie I.4. Éléments anisotropes

retour

Étude de ad_x : cas non isotrope

Proposition – Cas non isotrope. Si x est anisotrope alors ${ad_x}^2$ agit sur le plan $x^\perp$, supplémentaire orthogonal de kx, comme l'homothétie de rapport $-q(x)$.
De plus, ad_x est diagonalisable si et seulement si $-q(x)$ est un carré (non nul).

Preuve. La relation $K([y,x],z) = K(y,[x,z])$ montre que ad_x est antisymétrique pour K. Ainsi $x^\perp$ est stable par ad_x et donc par ${ad_x}^2$.

De plus, le théorème de Cayley-Hamilton (appliqué à ad_x) montre que ${ad_x}^4 = -q(x){ad_x}^2$. Ainsi $-{ad_x}^2/q(x)$ est un projecteur qui est symétrique pour q.

On en déduit que $\mathrm{Im}\,{ad_x}^2 = \mathrm{Ker}\,{ad_x}^{2\perp}$. De plus, la forme de χ_x montre que $\mathrm{Ker}\,ad_x = \mathrm{Ker}\,{ad_x}^2$ (puisque $q(x) \neq 0$) et on conclut par le lemme initial qui montre que $\mathrm{Ker}\,ad_x = kx$.

Partie I.5. Structure

retour

Structure de $\mathscr{L}$

Corollaire – Structure tournante. Soit (x, y, z') une base de $\mathscr{L}$ orthogonale pour q. On pose $z = [x, y]$. Alors (x, y, z) est une base de $\mathscr{L}$ qui vérifie les relations

$$[x, y] = z, \qquad [z, x] = q(x)y, \qquad [y, z] = q(y)x$$

De plus, z' et z sont colinéaires.

Preuve. Comme x and y ne sont pas colinéaires, $[x, y] \neq 0$ (lemme initial).

De plus, les relations $0 = K([x, x], y) = K(x, [x, y])$ et $K([x, y], y) = K(x, [y, y]) = 0$ montrent que $[x, y]$ est orthogonal à x et y et donc colinéaire à z'. Ainsi (x, y, z) est une base de $\mathscr{L}$.

Par définition, $z = [x, y]$. Les deux autres relations résultent du résultat précédent puisque $y \in x^{\perp}$ and $x \in y^{\perp}$. En effet, $[z, x] = -{ad_x}^2(y)$ and $[y, z] = -{ad_y}^2(x)$.

Corollaire – Malcolmson. Soit $\mathscr{L}'$ une algèbre de Lie simple de dimension 3. On note q' sa forme de Killing réduite. On a l'équivalence $\mathscr{L} \overset{\text{Lie}}{\simeq} \mathscr{L}' \iff q \simeq q'$.

Preuve. **(⇒)** La forme de Killing est un invariant par isomorphisme.
(⇐) Il existe $x', y' \in \mathscr{L}'$ orthogonaux pour q' tel que $q'(x') = q(x)$ et $q'(y') = q(y)$. En posant $z' = [x', y']$, on construit un isomorphisme φ de $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{L}'$ en posant $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$ et $\varphi(z) = z'$.

Sous-algèbre de Lie de dimension 2.

Corollaire On note $\mathfrak{ssalg}_2$ l'ensemble des sous-algèbres de Lie de dimension 2 de $\mathscr{L}$; $\mathfrak{deg}_2$ l'ensemble des sous-espaces F de $\mathscr{L}$ de dimension 2 tels que $q_{|_F}$ est dégénérée ; $\mathfrak{C}$ l'ensemble des droites isotrope de $\mathscr{L}$.
On a alors la bijection

$$\begin{cases} \mathfrak{Lie} - \mathfrak{ssalg}_2 = \mathfrak{deg}_2 & \longrightarrow \mathfrak{C} \\ F & \longmapsto F^{\perp} \\ D^{\perp} & \longleftarrow D \end{cases}$$

En particulier, si q est anisotrope, $\mathscr{L}$ n'admet pas de sous-algèbre de Lie de dimension 2.

Remarque On a vu qu'il n'y a pas dans $\mathscr{L}$ de sous-algèbre abélienne de dimension 2. Ainsi les plans dégénérés de $\mathscr{L}$ sont des algèbres de Lie résolubles non abéliennes. Si $\mathscr{L} = \mathfrak{sl}_2$, ce sont les sous-algèbres de Borel.

La preuve

Preuve. Soit F un sous-espace de dimension 2 et (x, y) une base de F. On a vu que $k[x, y] = \mathrm{vect}\,(x, y)^{\perp} = F^{\perp}$.

Or

$F \in \mathfrak{ssalg}_2 \iff [x, y] \in F \iff F^{\perp} \subset F \iff F^{\perp} \cap F \neq \{0\} \iff$ $q_{|_F}$ non dégénérée.

De plus, si $q_{|_F}$ est dégénérée alors $F^{\perp} \subset F$ et donc $F^{\perp}$ est une droite isotrope. Réciproquement, si D est une droite isotrope pour q alors $D^{\perp}$ est un plan contenant D et donc $q_{|_{D^{\perp}}}$ est dégénérée.

Quelle q peut-on obtenir ?

Remarque – Orthogonalité et produit. Soit x, y orthogonaux pour q. On a

$$q(x)q(y) = q([x,y]). \qquad (\star)$$

En effet,

$$q([x,y]) = K([x,y],[x,y]) = K(x,[y,[x,y]]) = K(x,q(y)x) = q(y)q(x)$$

Corollaire On a $\det q = 1$.

Preuve. Si x et y sont orthogonaux, $(x, y, [x, y])$ est une base orthogonale pour q et $\det(q) = (q(x)q(y))^2$.

Réciproque

Soit q est une forme quadratique sur V de dimension 3 et de déterminant 1 alors il existe une structure d'algèbre de Lie sur V tel que $[V, V] = V$ et dont la forme de Killing réduite est q.

Il suffit de considérer deux vecteurs non isotropes x et y orthogonaux pour q puis de définir $z \in \mathrm{vect}\,(x, y)^{\perp}$ tel que $q(z) = q(x)q(y)$ (ce qui est possible précisément parce que $\det q = 1$).

On définit alors le crochet par le fait que $[\cdot, \cdot]$ est alterné et vérifie $[x, y] = z$, $[z, x] = q(x)y$ et $[y, z] = q(y)x$. La relation de Jacobi est vérifiée.

On calcule la forme quadratique de Killing réduite de façon explicite puisqu'on connait les matrices des éléments ad_v et on constate que c'est q.

Remarque Seul la valeur de q sur un sous-espace vectoriel de dimension 2 suffit à construire la structure d'algèbre de Lie.

Partie I.6. Le cas isotrope

retour

Proposition Les propositions suivantes sont équivalentes

(i) q est isotrope (il existe $x \neq 0$ tel que $q(x) = 0$) ;

(ii) il existe $x \in \mathscr{L} \setminus \{0\}$ tel que ad_x est nilpotent ;

(iii) il existe $x \in \mathscr{L} \setminus \{0\}$ tel que ad_x est diagonalisable ;

(iv) il existe $x \in \mathscr{L}$ tel que $-q(x)$ est un carré non nul ;

(v) $\mathscr{L} \simeq \mathfrak{sl}_2$.

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ et $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ a déjà été vu. On a $(v) \Rightarrow (ii)$ et $(v) \Rightarrow (iii)$.

$(i) \Rightarrow (v)$. Il existe, à isométrie près, une unique forme quadratique isotrope de déterminant 1 :

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

Suite de la preuve.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Preuve par les algèbres de Lie. Soit y tel que ad_y est diagonalisable. Soit x un vecteur propre associé à une valeur propre non nul. Ainsi $\mathrm{vect}\,(x, y)$ est une sous-algèbre de Lie de dimension 2 de $\mathscr{L}$ et $\mathrm{vect}\,(x, y)^{\perp} = kx$ est une droite isotrope pour q.

Preuve par les formes quadratiques. La forme quadratique $q \perp t^2$ définie sur $\mathscr{L} \oplus k$ est isotrope. Comme elle est de déterminant 1, c'est une somme de deux plans hyperboliques :

$$\begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & a & b \\ & & b & c \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad ac - b^2 = -1$$

Un plan sur lequel $q \perp t^2$ est nul rencontre donc $\mathscr{L}$.

Suite de la preuve (2).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Preuve par les algèbres de Lie. Soit $x \neq 0$ tel que ad_x est nilpotent. On a vu qu'il existe y tel que $[x, y] = x$. Ainsi ad_y a une valeur propre non nulle et est donc diagonalisable.

Preuve par les formes quadratiques. La forme quadratique q est isotrope donc l'application $x \mapsto q(x)$ est surjective. Donc les opposés des carrés sont atteints.

$\mathfrak{sl}_2$-triplet et forme quadratique.

Soit $e \in \mathscr{L} \setminus \{0\}$ isotrope. On choisit $y \in e^{\perp}$ non colinéaire à e et quitte à multiplier h par un scalaire, on a $[h, e] = 2e$.
On en déduit que ad_h est diagonalisable et comme $\operatorname{tr}(ad_h) = 0$, la dernière valeur propre de ad_h est -2. On choisit f vecteur propre de ad_h pour -2. On a alors $[e, f]$ qui est orthogonal à e et à f qui est donc colinéaire à h. On choisit f tel que $[e, f] = h$.

Remarque Soit $y \in \mathscr{L} \setminus \{0\}$ tel que ad_y est diagonisable alors $y^{\perp}$ est un plan hyperbolique (puisque $-q(y)$ est un carré). Les deux droites isotropes de ce plan hyperbolique sont les vecteurs propres de ad_y.

Partie I.7. Automorphismes

retour

Groupe d'automorphismes (1)

Théorème Le groupe d'automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ est $SO(q)$.

Preuve. Soit φ un automorphisme de $\mathscr{L}$. On a $ad_{\varphi(x)} = \varphi ad_x \varphi^{-1}$ pour tout $x \in \mathscr{L}$ et donc

$$K(\varphi(x), \varphi(y)) = -1/2\mathrm{tr}\left(\varphi ad_x ad_y \varphi^{-1}\right) = K(x, y)$$

pour tout $x, y \in \mathscr{L}$. Ainsi $\varphi \in O(q)$.

Montrons que $\varphi \in SO(q)$.

Soit x, y non isotropes et orthogonaux pour q. On a vu que $(x, y, [x, y])$ est une base orthogonale pour q. Calculons la matrice de φ dans cette base. On pose

$$\varphi(x) = ax + by + c[x, y] \qquad \text{et} \qquad \varphi(y) = dx + ey + f[x, y].$$

Groupe d'automorphismes (2) : les relations

Preuve. **Suite.** Les relations $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$, $[x,[x,y]] = -q(x)y$ et $[y,[y,x]] = -q(y)x$ donnent

$$\varphi([x,y]) = q(y)(bf - ce)x + q(x)(cd - af)y + (ae - db)[x,y]$$

Et donc $\det(\varphi) = (ae - db)^2 + q(x)(cd - af)^2 + q(y)(bf - ce)^2$.

Comme $(x, y, [x,y])$ est une base orthogonale pour q, la relation $(\star)$ donne $q(\varphi([x,y])) =$

$$q(y)^2(bf - ce)^2 q(x) + q(x)^2 q(y)(cd - af)^2 + (ae - db)q(x)q(y).$$

et donc $$q(\varphi([x,y])) = \det(\varphi) q(x) q(y) \,.$$

Mais $\varphi \in O(q)$ et donc $q(\varphi[x,y]) = q([x,y]) = q(x)q(y)$. Ainsi $\det(\varphi) = 1$!

Inclusion réciproque (1).

On veut montrer que $SO(q) \subset \mathrm{Aut}(\mathscr{L})$.

Une présentation de $\mathscr{L}$ est

$$\langle x, y, z \mid z = [x, y], \;\; [x, [x, y]] = -q(x)y, \;\; [y, [y, x]] = -q(y)x \rangle \,.$$

Soit $\varphi \in SO(q)$. On veut montrer que $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ et

$$[\varphi(x),[\varphi(x),\varphi(y)]] = -q(x)\varphi(y), \;\; [\varphi(y),[\varphi(y),\varphi(x)]] = -q(y)\varphi(x) \,.$$

On fixe x, y non isotropes et orthogonaux pour q. Alors $(x, y, [x, y])$ est une base orthogonale pour q. On en déduit que $(\varphi(x), \varphi(y), \varphi([x, y]))$ est une base orthogonale pour q puisque $\varphi \in O(q)$.

Inclusion réciproque (2).

Ainsi $[\varphi(x), \varphi([x,y])]$ est orthogonal à $\varphi(x)$ et $\varphi([x,y])$ et donc colinéaire à $\varphi(y)$. De plus, $(\star)$ et $\varphi \in O(q)$ donnent

$$q([\varphi(x),\varphi([x,y])]) = q(\varphi(x))q(\varphi[x,y]) = q(x)q([x,y]) = q(x)^2 q(y)$$

soit
$$q([\varphi(x), \varphi([x,y])]) = q(q(x)\varphi(y))\,.$$

Ainsi, il existe $\varepsilon_x \in \{-1, 1\}$ tel que

$$[\varphi(x), \varphi([x,y])] = -\varepsilon_x q(x)\varphi(y).$$

De même, il existe $\varepsilon_0, \varepsilon_y \in \{-1, 1\}$ tels que

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varepsilon_0 \varphi([x,y]) \qquad \text{et} \qquad [\varphi([x,y]), \varphi(y)] = -\varepsilon_y q(y) x.$$

Il reste à montrer que $\varepsilon_0 = \varepsilon_y = \varepsilon_x = 1$.

Inclusion réciproque (3).

En utilisant la deuxième relation dans la première et le fait que $\varphi(y)$ est orthogonal to $\varphi(x)$, on obtient que

$$-\varepsilon_0\varepsilon_x q(x) = -q(\varphi(x)).$$

Et donc $\varepsilon_0 = \varepsilon_x$ puisque $\varphi \in SO(q)$. De même, $\varepsilon_0 = \varepsilon_y$.

Si $\varepsilon_0 = \varepsilon_x = \varepsilon_y = -1$ alors $-\varphi$ est un automorphisme de $\mathscr{L}$. Mais $-\varphi \notin SO(q)$. NON.

Ainsi $\varepsilon_0 = \varepsilon_x = \varepsilon_y = 1$ et φ est un automorphisme de $\mathscr{L}$.

Partie II. Représentations.

Programme : Partie II

1. La dimension 1.
2. Formes invariantes.
3. Dimension 2.
4. Dimension 3.
5. Dimension impaire.
6. Dimension paire : cas isotrope

Partie II.1. La dimension 1.

Proposition – Représentation de dimension 1. $\mathscr{L}$ admet une unique (classe d'isomorphisme de) représentation(s) de dimension 1 : la représentation triviale.

Partie II.2.
Forme bilinéaire invariante.

retour

Endomorphismes de la représentation adjointe.

Lemme On considère $\mathscr{L}$ comme module sur elle-même via la représentation adjointe. On a $\mathrm{End}_{\mathscr{L}}(\mathscr{L}) = k\mathrm{id}$.

Preuve. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathscr{L}}(\mathscr{L})$.

On a $0 = f([x,x]) = [x, f(x)]$. Donc $f(x)$ commute avec x et donc $f(x)$ est colinéaire à x. On écrit $f(x) = \alpha x$. De même $f(y) = \beta y$ et $f(z) = \gamma z$.

La relation $\gamma z = f(z) = f([x,y]) = [x, f(y)] = \beta z$ donne $\gamma = \beta$. La relation $\beta q(x) y = f(q(x)y) = f([z,x]) = [z, f(x)] = \alpha q(x) y$ donne $\alpha = \beta$.

Ainsi $f = \alpha \mathrm{id}$.

Forme bilinéaire invariante

Définition – Forme bilinéaire invariante. Soit V un $\mathscr{L}$-module et $B\colon V \times V \to k$ une forme bilinéaire. On dit que B est invariante si $B(x \cdot v, w) + B(v, x \cdot w) = 0$ pour tous $v, w \in V$ et $x \in \mathscr{L}$.
Ce sont les éléments invariants sous l'action de $\mathscr{L}$ sur l'ensemble des formes bilinéaires sur V.

Corollaire Le sous-ensemble des formes bilinéaires invariantes est de dimension 1 engendré par K.

Preuve. La forme bilinéaire K est invariante et non nulle.
De plus, comme K est non dégénérée, elle induit un isomorphisme de $\mathscr{L}$-modules entre $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}^*$. On en déduit

$$\mathrm{Bil}(\mathscr{L}) \simeq (\mathscr{L} \otimes \mathscr{L})^* \simeq \mathscr{L}^* \otimes \mathscr{L}^* \simeq \mathscr{L}^* \otimes \mathscr{L} \simeq \mathrm{End}_k(\mathscr{L})\,.$$

Or les éléments invariants de $\mathrm{End}_k(\mathscr{L})$ sont $\mathrm{End}_{\mathscr{L}}(\mathscr{L}) = k\mathrm{id}$.

Polynôme caractéristique

Corollaire Soit (V, ρ) une représentation de $\mathscr{L}$ de dimension finie. Pour $x \in \mathscr{L}$, on note $\chi_{x,\rho}$ le polynôme caractéristique de $\rho(x)$. Soit $n = \dim V$. Le coefficient de T^{n-1} dans $\chi_{x,\rho}$ est 0 et il existe $\alpha \in k$ tel que pour tout $x \in \mathscr{L}$ le coefficient de T^{n-2} de $\chi_{x,\rho}$ soit $\alpha q(x)$.

Preuve. Le coefficient de T^{n-1} est $-\mathrm{tr}\,(\rho(x))$. L'égalité $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$ donne le résultat.

Le coefficient de T^{n-2} est $(\mathrm{tr}\,(\rho(x))^2 - \mathrm{tr}\,(\rho(x)^2))/2$ c'est-à-dire $-1/2\mathrm{tr}\,(\rho(x)^2)$ qui est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire invariante $(x, y) \mapsto -1/2\mathrm{tr}\,(\rho(x)\rho(y))$. On obtient ainsi le résultat.

Partie II.3. La dimension 2.

retour

Cas anisotrope.

Proposition Si K est anisotrope, $\mathscr{L}$ n'admet aucune représentation non triviale de dimension 2.

Preuve. Soit V une telle représentation. Le morphisme structurel $\mathscr{L} \to \mathrm{End}_k(V)$ est non nul donc injectif. Comme $\mathscr{L} = [\mathscr{L}, \mathscr{L}]$, l'image est contenue dans $\mathfrak{sl}(V)$ et donc égale à $\mathfrak{sl}(V)$.

Fin de la démo 1. Il existe $\alpha \in k$ tel que pour tout $x \in \mathscr{L}$, $\chi_{x,V}(T) = T^2 + \alpha K(x)$. Si $\alpha = 0$, tous les éléments de $\mathfrak{sl}(V)$ seraient nilpotent. Si $\alpha \neq 0$ aucun élément non nul de $\mathfrak{sl}(V)$ ne serait nilpotent.

Fin de la démo 2 [Malcolmson]. Le morphisme $\mathfrak{U}(\mathscr{L}) \mapsto \mathrm{End}_k(V)$ est surjectif puisque $\mathrm{id} \notin \mathfrak{sl}(V)$. Le noyau J de ce morphisme est donc l'unique ideal de codimension 4 de $\mathfrak{U}(\mathscr{L})$. Et donc $\left(\frac{-q(x),-q(y)}{k}\right) = \mathfrak{U}(\mathscr{L})/J = \mathrm{End}_k(V)$. NON.

Partie II.4. La dimension 3.

retour

Proposition Si car $k \neq 3$, la représentation adjointe est, à isomorphisme près la seule représentation irréductible de dimension 3 de $\mathscr{L}$.

Preuve. Soit (V, ρ) une représentation de dimension 3 **sans sous-représentation triviale**. Il existe $\alpha \in k$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{L}, \quad \chi_{x,\rho}(T) = T^3 + \alpha q(x) T + \beta_x.$$

Programme :

- Montrer que $\beta_x = 0$;
- Montrer que $\alpha = 1$;
- Montrer que $\rho(x)\rho(y)\rho(x) = \rho(z)\rho(x)\rho(z) = \cdots = 0$;
- Construire une base de V à partir d'un vecteur de noyau de $\rho(x)$.

Première relation

Comme ρ est une représentation, on a $ad_{\rho(x)}{}^2(\rho(y)) = -q(x)\rho(y)$. Et donc

$$ad^3_{\rho(x)}\rho(y) = -q(x)\rho(z).$$

Ce qui donne

$$-q(x)\rho(z) = \rho^3(x)\rho(y) - 3\rho^2(x)\rho(y)\rho(x) + 3\rho(x)\rho(y)\rho^2(x) - \rho(y)\rho^3(x)$$

Par ailleurs, $\rho(z) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$, ainsi

$$\alpha q(x)\rho(z) = \alpha q(x)\rho(x)\rho(y) \qquad - \alpha q(x)\rho(y)\rho(x)$$

et

$$0 = \beta_x\rho(y) \qquad - \beta_x\rho(y)$$

Cayley-Hamilton

En ajoutant les trois égalités, le théorème de Cayley-Hamilton donne

$$(\alpha-1)q(x)\rho(z)=-3(\rho^2(x)\rho(y)\rho(x)-\rho(x)\rho(y)\rho^2(x))$$

Mais $\rho^2(x)\rho(y)\rho(x)-\rho(x)\rho(y)\rho^2(x)=\rho(x)\rho(z)\rho(x)$, ainsi

$$\rho(x)\rho(z)\rho(x)=-3^{-1}(\alpha-1)(q(x))\rho(z).$$

De même, en calculant $ad^3_{\rho(x)}(\rho(z))$, $ad^3_{\rho(y)}(\rho(x))$,..., on obtient les relations

$$\rho(x)\rho(y)\rho(x)=-3^{-1}(\alpha-1)q(x)\rho(y)\,,$$

$$\rho(y)\rho(z)\rho(y)=-3^{-1}(\alpha-1)q(y)\rho(z)\,,$$

$$\rho(y)\rho(x)\rho(y)=-3^{-1}(\alpha-1)q(y)\rho(x)\,.$$

Conséquences

Objectif : montrer que $\rho(x)$ n'est pas inversible (i.e. $\beta_x = 0$).

Si $\alpha = 1$ et $\rho(x)$ inversible alors $\rho(z) = 0$ et $\rho = 0$. Donc si $\alpha = 1$ alors $\rho(x)$ est non inversible.

On suppose $\alpha \neq 1$. On obtient la relation

$$\rho(x)^2/q(x) = \rho(y)^2/q(y) = \rho(z)^2/q(z)$$

Ainsi, si l'un des trois endomorphismes n'est pas inversible alors ne l'est pas non plus $\rho(x)$.

On suppose que $\rho(x), \rho(y)$ et $\rho(z)$ sont inversibles. On pose $f = \rho(x)^2/q(x) + \alpha \mathrm{id}$.
On a donc $f\rho(x) = -\beta_x/q(x)\mathrm{id}$ par le théorème de Cayley-Hamilton. Ainsi f est inversible et $\rho(x) = -\beta_x/q(x)f^{-1}$. De même, $\rho(y) = -\beta_y/q(y)f^{-1}$ et $\rho(z) = -\beta_z/q(z)f^{-1}$. Finalement $\rho(z), \rho(y)$ and $\rho(x)$ sont colinéaires à f^{-1} et donc commutent. On en déduit que $\rho = 0$. NON. Ainsi $\rho(x)$ n'est pas inversible.

Les autres relations

Soit $v \in \operatorname{Ker}\rho(x) \smallsetminus \{0\}$. Si $\alpha \neq 1$, les relations

$$\rho(x)\rho(y)\rho(x) = -3^{-1}(\alpha - 1)q(x)\rho(y)$$

et
$$\rho(x)\rho(z)\rho(x) = -3^{-1}(\alpha - 1)q(x)\rho(z)$$

montrent que $v \in \operatorname{Ker}\rho(y)$ et $v \in \operatorname{Ker}\rho(z)$. NON car ρ est irréductible. Donc $\alpha = 1$.

Ainsi

$$\rho(x)\rho(y)\rho(x) = \rho(x)\rho(z)\rho(x) = \rho(y)\rho(x)\rho(y) = \rho(y)\rho(z)\rho(y) = \rho(z)\rho(y)\rho(z) = \rho(z)\rho(x)\rho(z) = 0\,.$$

La base adaptée

Montrons que $(v, \rho(z)(v)/q(x), -\rho(y)(v))$ est une base de V. Montrons, par l'absurde, que $\rho(y)(v)$ n'est pas colinéaire à v.

Si $\rho(y)(v)$ est colinéaire à v alors en composant par $\rho(x)$ en soustrayant $0 = \rho(y)\rho(x)(v)$, on obtient que $\rho(z)(v) = 0$ et donc $\rho(y)(v) = 0$. NON par irréductibilité de V.

Supposons que $\rho(z)(v)$ appartient à $\mathrm{vect}\,(v, \rho(y)(v))$. En composant par $\rho(x)$, on en déduit que $\rho(x)\rho(z)(v)$ est colinéaire à $\rho(x)\rho(y)(v) = \rho(z)(v)$. Or $\rho(x)\rho(z)(v) = -q(x)\rho(y)(v)$. Ainsi $\rho(y)(v)$ et $\rho(z)(v)$ sont colinéaires et la droite qu'ils engendrent est stable par $\rho(x)$.

La relation $\rho(z)\rho(x)\rho(z) = 0$ montre que $\rho(z)\rho(y)(v) = 0$. De même $\rho(y)\rho(z)(v) = 0$. Ainsi $k\rho(y)(v) = k\rho(z)(y)$ est stable par $\rho(x), \rho(y)$ and $\rho(z)$ ce qui est absurde.

Représentation matricielle

Dans cette base, $\rho(x)$ a pour matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q(x) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Les relations $\rho(y)\rho(x)\rho(y) = 0$, $\rho(y)\rho(x)(v) = 0$ et $[x, y] = z$ donnent $\rho(y)\rho(z)(v) = 0$. De même, on a $\rho(z)\rho(y)(v) = 0$.

Comme $\mathrm{tr}\,(\rho(y)) = \mathrm{tr}\,(\rho(z)) = 0$, on obtient les matrices

$$\rho(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \rho(z) = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ q(x) & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}.$$

La forme du polynôme caractéristique montre que $\dim \mathrm{Ker}\, \rho(y) = \dim \mathrm{Ker}\, \rho(z) = 1$ et le théorème de Cayley-Hamilton donne $(\rho(y)^2 + q(y))(v) \in \mathrm{Ker}\, \rho(y)$; de même pour z. Ainsi $a = q(y)$ et $c = -q(y)$ puisque $q(z) = q(x)q(y)$.

Conclusion

Pour conclure que $b = d = 0$, on applique la relation $\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) = \rho(z)$ à $\rho(y)(v)$ pour obtenir $\rho(x)\rho(y)^2(v) = 0$ (puisque $\rho(y)\rho(x)\rho(y) = 0$ et $\rho(z)\rho(y) = 0$).

Ainsi $\rho^2(y)(v) \in \mathrm{Ker}\,\rho(x) = kv$ et de même $\rho^2(z) \in kv$.

On obtient ainsi les matrices de ad_x, ad_y et ad_z dans la base (x, y, z) de $\mathscr{L}$.

Partie II.5. Dimension impaire.

retour

Le cadre

On suppose que $\mathrm{char} k = 0$ pour que les représentations de dimension finie de $\mathscr{L}$ soient semi-simples.

On note $\overline{k}$ la clôture algébrique de k. On a ainsi $\overline{k}\mathscr{L} \simeq \mathfrak{sl}_2(\overline{k})$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, we denote by $V_{\overline{k}}(m)$ « le » module irréductible de dimension $m+1$ of $\mathfrak{sl}_2(\overline{k})$.

On va utiliser la règle de Clebsch-Gordan (sur $\overline{k}$ dans un cas particulier : pour $m \geqslant 2$
$V_{\overline{k}}(2) \otimes V_{\overline{k}}(m) = V_{\overline{k}}(m+2) \oplus V_{\overline{k}}(m) \oplus V_{\overline{k}}(m-2)$ et
$V_{\overline{k}}(2) \otimes V_{\overline{k}}(1) = V_{\overline{k}}(3) \oplus V_{\overline{k}}(1)$

Un exemple

Exemple – Décomposition de $\mathrm{ad}\otimes\mathrm{ad}$ en irréductibles. On décompose $\mathrm{ad}\otimes\mathrm{ad} = \Lambda^2(\mathrm{ad}) \oplus S^2(\mathrm{ad})$. De plus, $\Lambda^2(\mathrm{ad})$ est un $\mathscr{L}$-module sans sous-module trivial. Ainsi $\Lambda^2(\mathrm{ad}) \simeq \mathrm{ad}$.

Dans $S^2(\mathrm{ad})$, l'élément de Casimir de $\mathscr{L}$:
$C = (x\otimes x)/q(x) + (y\otimes y)/q(y) + (z\otimes z)/q(z)$ engendre un $\mathscr{L}$-module trivial.

Le sous-espace de dimension 5
$W = \mathrm{vect}\,(x\otimes y + y\otimes x, z\otimes x + x\otimes z, y\otimes z + z\otimes x, (x\otimes x)/q(x) - (y\otimes y)/q(y), (z\otimes z)/q(z) - (x\otimes x)/q(x))$ est un sous-$\mathscr{L}$-module of $S^2(V)$.
En étendant les scalaires (à $\overline{k}$), K devient isotrope. De plus, on a

$$\dim \mathrm{End}_{\mathscr{L}}(\mathrm{ad}\otimes\mathrm{ad}) = \dim \mathrm{End}_{\overline{k}\mathscr{L}}(V_{\overline{k}}(0) \oplus V_{\overline{k}}(2) \oplus V_{\overline{k}}(4)) = 3.$$

Sur k, $\mathrm{ad}\otimes\mathrm{ad}$ se décompose donc en somme de 3 représentations irréductibles non isomorphes : une triviale, une isomorphe à ad et une de dimension 5 qui est même absolument irréductible.

À propos du $=$

Lemme Soit A un k-algèbre associative unitaire et V, W des A-modules de dimension finie sur k. Soit L une extension de k et $LA = L \otimes A$. Alors

$$\dim_k \mathrm{Hom}_A(V, W) = \dim_L \mathrm{Hom}_{LA}(L \otimes V, L \otimes W).$$

Preuve. Comme A est unitaire, $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ and $\mathrm{Hom}_{LA}(L \otimes V, L \otimes W)$ sont des sous-espaces de $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ and $\mathrm{Hom}_L(L \otimes V, L \otimes W)$. En choisissant des bases pour V et W, on identifie $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{LA}(L \otimes V, L \otimes W)$) avec des sous-espaces de $\mathrm{M}_n(k)$ (resp. $\mathrm{M}_n(L)$) solution d'un système linéaire déterminé par les relations de commutations avec les éléments de A (resp. des éléments de $1 \otimes A$). Mais ces deux systèmes linéaires sont les mêmes.

Existence

Proposition Pour tout entier n impair, $\mathscr{L}$ admets une représentation absolument irréductible de dimension n.

Preuve. On va montrer par récurrence la propriété suivante : il existe une famille $(V(2\ell))_{\ell\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{L}$-modules vérifiant les propriétés suivantes

(i) $\dim V(2\ell) = 2\ell + 1$

(ii) $V(2\ell)$ est absolument irréductible et $V(2\ell) \otimes \overline{k} = V_{\overline{k}}(2\ell)$.

(iii) Pour $\ell \geqslant 1$, $V(2\ell) \otimes \mathrm{ad} = V(2\ell - 2) \oplus V(2\ell) \oplus V(2\ell + 2)$.

Initialisation. On définit $V(0) = k$ et $V(2) = \mathrm{ad}$: les points (i) and (ii) sont vérifiés. L'exemple montre que la propriété (iii) is vérifiée en posant $V(4) = W$.

Hérédité

On suppose $V(0), \ldots, V(2\ell)$ construites vérifiant (i) and (ii) pour tout $0 \leqslant j \leqslant \ell$ et que $V(2j)$ vérifie (iii) pour tout $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$.

On cherche à décomposer $V(2\ell) \otimes \mathrm{ad}$ en irréductibles.

(1) Comme $\mathrm{ad}^* \overset{\mathscr{L}\text{-mod.}}{\simeq} \mathrm{ad}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(V(2\ell-2), V(2\ell) \otimes \mathrm{ad}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(V(2\ell-2) \otimes \mathrm{ad}, V(2\ell)) .$$

L'hypothèse de récurrence assure que ce dernier espace est de dimension 1. Ainsi $V(2\ell - 2)$ apparaît dans $V(2\ell) \otimes \mathrm{ad}$ avec une multiplicité égale à 1.

(2) Par ailleurs,
$\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(V(2\ell) \otimes \mathrm{ad}, V(2\ell)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(\mathrm{ad}, \mathrm{End}_k(V(2\ell)))$.
Ce dernier espace d'homomorphismes est non nul puisque le morphisme structurel de $\mathscr{L}$ dans $\mathrm{End}_k(V(2\ell))$ est injectif ($\mathscr{L}$ est simple) et son image est donc isomorphe à ad. On en déduit que $V(2\ell)$ apparait dans $V(2\ell) \otimes \mathrm{ad}$ avec une multiplicité au moins 1.

Hérédité (2)

(3) En étendant les scalaires à $\overline{k}$, on obtient

$$\dim_k \mathrm{End}_{\mathscr{L}}(V(2\ell) \otimes \mathrm{ad}) = \dim_{\overline{k}} \mathrm{End}_{\overline{k}\mathscr{L}}(V(2\ell) \otimes \mathrm{ad} \otimes \overline{k})$$

Or

$$V(2\ell) \otimes \mathrm{ad} \otimes \overline{k} = V_{\overline{k}}(2\ell) \otimes V_{\overline{k}}(2) = V_{\overline{k}}(2\ell-2) \oplus V_{\overline{k}}(2\ell) \oplus V_{\overline{k}}(2\ell+2)$$

Ainsi $$\dim_k \mathrm{End}_{\mathscr{L}}(V(2\ell) \otimes \mathrm{ad}) = 3\,.$$

On en déduit que $V(2\ell) \otimes \mathrm{ad}$ se décompose en somme de 3 modules irréductibles non isomorphes. Ainsi la multiplicité de $V(2\ell)$ dans $V(2\ell) \otimes \mathrm{ad}$ est 1 et il existe un $\mathscr{L}$-module absolument irréductible qu'on note $V(2\ell+2)$ tel que

$$V(2\ell) \otimes \mathrm{ad} = V(2\ell-2) \oplus V(2\ell) \oplus V(2\ell+2)$$

De plus, $\dim V(2\ell+2) = 3(2\ell+1) - (2\ell+1) - (2\ell-1) = 2\ell+3$;

et $$V(2\ell+2) \otimes \overline{k} = V_{\overline{k}}(2\ell+2).$$

Unicité

Corollaire – Classification en dimension impaire. Pour tout entier n impair, il existe une unique classe d'isomorphismes de $\mathscr{L}$-modules irréductibles de dimension n.

Preuve. Soit V une représentation irréductible de $\mathscr{L}$ de dimension impaire. On décompose $\overline{k} \otimes V$ en somme de $\mathfrak{sl}_2(\overline{k})$-modules irréductibles : il existe ℓ tel que $\mathfrak{sl}_2(\overline{k})$-module $V_{\overline{k}}(2\ell)$ apparait dans $\overline{k} \otimes V$. Ainsi

$$\mathrm{Hom}_{\overline{k}\otimes\mathscr{L}}(V_{\overline{k}}(2\ell), \overline{k} \otimes V) \neq 0\,.$$

Comme $V_{\overline{k}}(2\ell) = \overline{k} \otimes V(2\ell)$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(V(2\ell), V) \neq 0$$

On obtient que $V(2\ell)$ apparait dans V et $V = V(2\ell)$ par irréductibilité de V.

Partie II.6. Dimension paire : K isotrope.

retour

Existence

Proposition Pour tout entier n pair, $\mathscr{L}$ admets une représentation absolument irréductible de dimension n. Cette représentation irréductible est unique à isomorphisme près.

Preuve. On montre par récurrence la propriété suivante : il existe une famille $(V(2\ell+1))_{\ell\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{L}$-modules vérifiant les propriétés suivantes

(*i*) $\dim V(2\ell+1) = 2\ell+2$

(*ii*) $V(2\ell+1)$ est absolument irréductible et $V(2\ell+1)\otimes\overline{k} = V_{\overline{k}}(2\ell+1)$.

(*iii*) Pour $\ell = 0$, $V(1)\otimes \mathrm{ad} = V(1)\oplus V(3)$.

(*iv*) Pour $\ell \geqslant 1$,
$V(2\ell+1)\otimes \mathrm{ad} = V(2\ell-1)\oplus V(2\ell+1)\oplus V(2\ell+3)$.

Initialisation : $V(1)$ existe car $\mathscr{L}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(k)$.
Hérédité et unicité : mêmes arguments.