# GTIA

## Algèbre des matrices génériques de taille 2

8 Avril 2013

# Matrices génériques

Dans l'exposé, on désigne par

- $k$ un corps commutatif
- $n \in \mathbb{N}^*$ la taille des matrices (carrées)
- $r \in \mathbb{N}^*$ le nombre de matrices

# Matrices génériques

Dans l'exposé, on désigne par

- $k$ un corps commutatif
- $n \in \mathbb{N}^*$ la taille des matrices (carrées)
- $r \in \mathbb{N}^*$ le nombre de matrices

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et $1 \leqslant \ell \leqslant r$, on désigne par $x = (x_{ij}^{(\ell)})_{i,j,\ell}$ une famille d'indéterminées sur $k$ et

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11}^{(1)} & \cdots & x_{1n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{(1)} & \cdots & x_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad X_r = \begin{bmatrix} x_{11}^{(r)} & \cdots & x_{1n}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{(r)} & \cdots & x_{nn}^{(r)} \end{bmatrix}$$

# Matrices génériques

Dans l'exposé, on désigne par

- $k$ un corps commutatif
- $n \in \mathbb{N}^*$ la taille des matrices (carrées)
- $r \in \mathbb{N}^*$ le nombre de matrices

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et $1 \leqslant \ell \leqslant r$, on désigne par $x = (x_{ij}^{(\ell)})_{i,j,\ell}$ une famille d'indéterminées sur $k$ et

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11}^{(1)} & \cdots & x_{1n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{(1)} & \cdots & x_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \ldots \qquad X_r = \begin{bmatrix} x_{11}^{(r)} & \cdots & x_{1n}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}^{(r)} & \cdots & x_{nn}^{(r)} \end{bmatrix}$$

On note $R(n,r) = \langle X_1, \ldots, X_r \rangle_{k-\mathrm{alg.}} \subset \mathrm{M}_n(k[x])$.

# Anneaux associés

On désigne par

- $C(n, r) = \langle \text{coeff du pol. carac. des } u \in R(n, r) \rangle_{k-\text{alg.}} \subset k[x]$.
- $\overline{R}(n, r) = \langle C(n, r), R(n, r) \rangle_{k-\text{alg.}}$

# Anneaux associés

On désigne par

- $C(n,r) = \langle$coeff du pol. carac. des $u \in R(n,r)\rangle_{k-\text{alg.}} \subset k[x]$.
- $\overline{R}(n,r) = \langle C(n,r), R(n,r)\rangle_{k-\text{alg.}}$ clôture caractéristique de $R$

# Anneaux associés

On désigne par

- $C(n,r) = \langle \text{coeff du pol. carac. des } u \in R(n,r)\rangle_{k-\text{alg.}} \subset k[x]$.
- $\overline{R}(n,r) = \langle C(n,r), R(n,r)\rangle_{k-\text{alg.}}$ clôture caractéristique de $R$

Le cas $n = r = 2$, on pose $C = C(2,2)$, $R = R(2,2)$ et $\overline{R} = \overline{R}(2,2)$.

# Anneaux associés

On désigne par

- $C(n,r) = \langle \text{coeff du pol. carac. des } u \in R(n,r) \rangle_{k-\text{alg.}} \subset k[x]$.
- $\overline{R}(n,r) = \langle C(n,r), R(n,r) \rangle_{k-\text{alg.}}$ clôture caractéristique de $R$

Le cas $n = r = 2$, on pose $C = C(2,2)$, $R = R(2,2)$ et $\overline{R} = \overline{R}(2,2)$.

**Proposition – Formanek-Halpin-Li—Formanek-Schofield.**

- $C$ est un anneau de polynômes en 5 indéterminées
- $\overline{R}$ est libre de rang 4 sur $C$
- $\overline{R}$ est la somme amalgamée de deux anneaux de polynômes en 4 indéterminées en-dessous d'un anneau de polynômes en 4 indéterminées d'indice 2 dans chacun des facteurs. ▸ Go !
- Si $G \subset \mathrm{SL}_2(k)$ est fini et $\mathrm{car}\, k \nmid |G|$ et $G$ agit sur $R$ alors $R^G$ est une $k$-algèbre de type fini.

## Notation

On note $S = k[a, b, c, d, e, f, g, h]$ une algèbre de polynômes en 8 indéterminées et

$$X_1 = X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_2 = Y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}.$$

# Le cas $n = 2$ et $r = 1$

**Proposition** On a

1. $R(2,1) = k[X]$ est une algèbre de polynômes en une indéterminée.
2. $C(2,1) = k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)]$ est une algèbre de polynômes en deux indéterminées.
3. $\overline{R}(2,1) = k[\mathrm{tr}\,(X), X]$ est une algèbre de polynômes en deux indéterminées.
4. $\overline{R}(2,1)$ est $C(2,1)$-module libre de rang 2 et de base $(1, X)$.

# Preuve

1. On fait $b = c = d = 0$.

# Preuve

1. On fait $b = c = d = 0$.
2. On fait $d = 0$ et on obtient $k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)] \mapsto k[a, -bc]$.

# Preuve

1. On fait $b = c = d = 0$.
2. On fait $d = 0$ et on obtient $k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)] \mapsto k[a, -bc]$.
   Soit $P \in k[T]$. On doit montrer que $\det(P(X))$ et $\mathrm{tr}\,(P(X))$ sont des polynômes en $\det(X)$ et $\mathrm{tr}\,(X)$.

## Preuve

1. On fait $b = c = d = 0$.
2. On fait $d = 0$ et on obtient $k[\operatorname{tr}(X), \det(X)] \mapsto k[a, -bc]$. Soit $P \in k[T]$. On doit montrer que $\det(P(X))$ et $\operatorname{tr}(P(X))$ sont des polynômes en $\det(X)$ et $\operatorname{tr}(X)$. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs propres de $X$.

## Preuve

1. On fait $b = c = d = 0$.
2. On fait $d = 0$ et on obtient $k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)] \mapsto k[a, -bc]$. Soit $P \in k[T]$. On doit montrer que $\det(P(X))$ et $\mathrm{tr}\,(P(X))$ sont des polynômes en $\det(X)$ et $\mathrm{tr}\,(X)$. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs propres de $X$. On a $\det(P(X)) = P(\lambda_1)P(\lambda_2)$.

# Preuve

1. On fait $b = c = d = 0$.
2. On fait $d = 0$ et on obtient $k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)] \mapsto k[a, -bc]$. Soit $P \in k[T]$. On doit montrer que $\det(P(X))$ et $\mathrm{tr}\,(P(X))$ sont des polynômes en $\det(X)$ et $\mathrm{tr}\,(X)$. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs propres de $X$. On a $\det(P(X)) = P(\lambda_1)P(\lambda_2)$. En posant $P = \sum a_i T^i$, on obtient

$$\det(P(X)) = \sum_{i<j} a_i a_j ({\lambda_1}^i {\lambda_2}^j + {\lambda_2}^i {\lambda_1}^j) + \sum_i {a_i}^2 {\lambda_1}^i {\lambda_2}^i$$

# Preuve

1. On fait $b = c = d = 0$.
2. On fait $d = 0$ et on obtient $k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)] \mapsto k[a, -bc]$. Soit $P \in k[T]$. On doit montrer que $\det(P(X))$ et $\mathrm{tr}\,(P(X))$ sont des polynômes en $\det(X)$ et $\mathrm{tr}\,(X)$. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs propres de $X$. On a $\det(P(X)) = P(\lambda_1)P(\lambda_2)$. En posant $P = \sum a_i T^i$, on obtient

$$\det(P(X)) = \sum_{i<j} a_i a_j ({\lambda_1}^i {\lambda_2}^j + {\lambda_2}^i {\lambda_1}^j) + \sum_i {a_i}^2 {\lambda_1}^i {\lambda_2}^i$$

soit $\det(P(X)) = \sum_{i<j} a_i a_j \det(X)^i \mathrm{tr}\,(X^{j-i}) + \sum_i {a_i}^2 \det(X)^i$

# Preuve

1. On fait $b = c = d = 0$.
2. On fait $d = 0$ et on obtient $k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)] \mapsto k[a, -bc]$. Soit $P \in k[T]$. On doit montrer que $\det(P(X))$ et $\mathrm{tr}\,(P(X))$ sont des polynômes en $\det(X)$ et $\mathrm{tr}\,(X)$. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs propres de $X$. On a $\det(P(X)) = P(\lambda_1)P(\lambda_2)$. En posant $P = \sum a_i T^i$, on obtient

$$\det(P(X)) = \sum_{i<j} a_i a_j ({\lambda_1}^i {\lambda_2}^j + {\lambda_2}^i {\lambda_1}^j) + \sum_i {a_i}^2 {\lambda_1}^i {\lambda_2}^i$$

soit $\det(P(X)) = \sum_{i<j} a_i a_j \det(X)^i \mathrm{tr}\,(X^{j-i}) + \sum_i {a_i}^2 \det(X)^i$

Il reste donc à montrer que $\mathrm{tr}\,(X^j) \in k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)]$ pour tout $j$

## Preuve

1. On fait $b = c = d = 0$.
2. On fait $d = 0$ et on obtient $k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)] \mapsto k[a, -bc]$. Soit $P \in k[T]$. On doit montrer que $\det(P(X))$ et $\mathrm{tr}\,(P(X))$ sont des polynômes en $\det(X)$ et $\mathrm{tr}\,(X)$. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs propres de $X$. On a $\det(P(X)) = P(\lambda_1)P(\lambda_2)$. En posant $P = \sum a_i T^i$, on obtient

$$\det(P(X)) = \sum_{i<j} a_i a_j ({\lambda_1}^i {\lambda_2}^j + {\lambda_2}^i {\lambda_1}^j) + \sum_i {a_i}^2 {\lambda_1}^i {\lambda_2}^i$$

soit $\det(P(X)) = \sum_{i<j} a_i a_j \det(X)^i \mathrm{tr}\,(X^{j-i}) + \sum_i {a_i}^2 \det(X)^i$

Il reste donc à montrer que $\mathrm{tr}\,(X^j) \in k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X)]$ pour tout $j$ ce qui s'obtient par récurrence en prenant la trace de la relation de Cayley-Hamilton multipliée par $X^{i-1}$.

$$\mathrm{tr}\,(X^{i+1}) = \mathrm{tr}\,(X^i)\mathrm{tr}\,(X) - \det(X)\mathrm{tr}\,(X^{i-1})\,.$$

## Suite

3. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\det(X) = -X^2 + \operatorname{tr}(X)X \in k[X, \operatorname{tr}(X)]$.

## Suite

3. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\det(X) = -X^2 + \mathrm{tr}\,(X)X \in k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$. Ainsi $\overline{R}(2,1) = k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$.

# Suite

3. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\det(X) = -X^2 + \mathrm{tr}\,(X)X \in k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$. Ainsi $\overline{R}(2,1) = k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$. De plus, en faisant $b = c = 0$, l'image de $P(X, \mathrm{tr}\,(X))$ est

$$\begin{bmatrix} P(a, a+d) & \\ & P(d, a+d) \end{bmatrix}$$

# Suite

3. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\det(X) = -X^2 + \mathrm{tr}\,(X)X \in k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$. Ainsi $\overline{R}(2,1) = k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$. De plus, en faisant $b = c = 0$, l'image de $P(X, \mathrm{tr}\,(X))$ est

$$\begin{bmatrix} P(a, a+d) & \\ & P(d, a+d) \end{bmatrix}$$

qui est non nulle si $P$ l'est.

# Suite

3. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\det(X) = -X^2 + \mathrm{tr}\,(X)X \in k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$. Ainsi $\overline{R}(2,1) = k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$. De plus, en faisant $b = c = 0$, l'image de $P(X, \mathrm{tr}\,(X))$ est

$$\begin{bmatrix} P(a, a+d) & \\ & P(d, a+d) \end{bmatrix}$$

qui est non nulle si $P$ l'est.

4. Le théorème de Cayley-Hamilton $X$ est entier sur $C(2,1)$

# Suite

3. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\det(X) = -X^2 + \mathrm{tr}\,(X)X \in k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$. Ainsi $\overline{R}(2,1) = k[X, \mathrm{tr}\,(X)]$. De plus, en faisant $b = c = 0$, l'image de $P(X, \mathrm{tr}\,(X))$ est
$$\begin{bmatrix} P(a, a+d) & \\ & P(d, a+d) \end{bmatrix}$$
qui est non nulle si $P$ l'est.

4. Le théorème de Cayley-Hamilton $X$ est entier sur $C(2,1)$ et donc $(1, X)$ engendre $\overline{R}(2,1)$ en tant que $C(2,1)$-module.

## Suite

3. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\det(X) = -X^2 + \operatorname{tr}(X)X \in k[X, \operatorname{tr}(X)]$. Ainsi $\overline{R}(2,1) = k[X, \operatorname{tr}(X)]$. De plus, en faisant $b = c = 0$, l'image de $P(X, \operatorname{tr}(X))$ est

$$\begin{bmatrix} P(a, a+d) & \\ & P(d, a+d) \end{bmatrix}$$

qui est non nulle si $P$ l'est.

4. Le théorème de Cayley-Hamilton $X$ est entier sur $C(2,1)$ et donc $(1, X)$ engendre $\overline{R}(2,1)$ en tant que $C(2,1)$-module. Par ailleurs, si $a + bX = 0$ avec $a, b \in C(2,1)$ alors $X \in \mathrm{Frac}(C(2,1))$. NON.

# Retour sur le cas $r = 2$

On va montrer que

1. $$C = k[\det(X), \mathrm{tr}\,(X), \det(Y), \mathrm{tr}\,(Y), \mathrm{tr}\,(XY)]$$
2. $$\overline{R} = C \oplus CX \oplus CY \oplus CXY$$

## Étapes

Soit $C' = k[\det(X), \mathrm{tr}\,(X), \det(Y), \mathrm{tr}\,(Y), \mathrm{tr}\,(XY)] \subset C$.

- On a $R \subset C'1 + C'X + C'Y + C'XY =: R'$ ;
- $1, X, Y, XY$ sont libres sur $S$ ;
- $C' = C$ et $\overline{R} = C \oplus CX \oplus CY \oplus CXY$ ;

## Première étape

- $X^2 = \operatorname{tr}(X)X - \det(X) \in R'$

## Première étape

- $X^2 = \mathrm{tr}\,(X)X - \det(X) \in R'$
- $Y^2 = \mathrm{tr}\,(Y)Y - \det(Y) \in R'$

# Première étape

- $X^2 = \mathrm{tr}\,(X)X - \det(X) \in R'$
- $Y^2 = \mathrm{tr}\,(Y)Y - \det(Y) \in R'$
- $XY \in R'$

# Première étape

- $X^2 = \mathrm{tr}\,(X)X - \det(X) \in R'$
- $Y^2 = \mathrm{tr}\,(Y)Y - \det(Y) \in R'$
- $XY \in R'$
- $X^2Y = \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y \in R'$

# Première étape

- $X^2 = \mathrm{tr}\,(X)X - \det(X) \in R'$
- $Y^2 = \mathrm{tr}\,(Y)Y - \det(Y) \in R'$
- $XY \in R'$
- $X^2Y = \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y \in R'$
- $XY^2 = \mathrm{tr}\,(Y)XY - \det(Y)X \in R'$

# Première étape

- $X^2 = \mathrm{tr}\,(X)X - \det(X) \in R'$
- $Y^2 = \mathrm{tr}\,(Y)Y - \det(Y) \in R'$
- $XY \in R'$
- $X^2 Y = \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y \in R'$
- $XY^2 = \mathrm{tr}\,(Y)XY - \det(Y)X \in R'$
- Et $YX$ ?

# Première étape

- $X^2 = \mathrm{tr}\,(X)X - \det(X) \in R'$
- $Y^2 = \mathrm{tr}\,(Y)Y - \det(Y) \in R'$
- $XY \in R'$
- $X^2Y = \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y \in R'$
- $XY^2 = \mathrm{tr}\,(Y)XY - \det(Y)X \in R'$
- Et $YX$ ? $\longrightarrow$ Théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire

## Première étape

- $X^2 = \mathrm{tr}\,(X)X - \det(X) \in R'$
- $Y^2 = \mathrm{tr}\,(Y)Y - \det(Y) \in R'$
- $XY \in R'$
- $X^2Y = \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y \in R'$
- $XY^2 = \mathrm{tr}\,(Y)XY - \det(Y)X \in R'$
- Et $YX$ ? $\longrightarrow$ Théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire

On a $XY + YX - \mathrm{tr}\,(X)Y - \mathrm{tr}\,(Y)X + \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y) - \mathrm{tr}\,(XY) = 0$

## Première étape

- $X^2 = \mathrm{tr}\,(X)X - \det(X) \in R'$
- $Y^2 = \mathrm{tr}\,(Y)Y - \det(Y) \in R'$
- $XY \in R'$
- $X^2Y = \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y \in R'$
- $XY^2 = \mathrm{tr}\,(Y)XY - \det(Y)X \in R'$
- Et $YX$ ? $\longrightarrow$ Théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire

On a $XY + YX - \mathrm{tr}\,(X)Y - \mathrm{tr}\,(Y)X + \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y) - \mathrm{tr}\,(XY) = 0$

c'est la formule de polarisation de l'application quadratique

$$X \longmapsto X^2 - \mathrm{tr}\,(X)X + \det(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(X)X + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,(X)^2 - \mathrm{tr}\,(X^2))$$

# Fin de la première étape

On en déduit que $YX \in R'$ puis

$$XYX = -X^2Y + \mathrm{tr}\,(X)XY + \mathrm{tr}\,(Y)X^2 - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)X + \mathrm{tr}\,(XY)X \in R'$$

On raisonne à présent par récurrence sur le degré du monôme en $X$ et $Y$.

# Fin de la première étape

On en déduit que $YX \in R'$ puis

$$XYX = -X^2Y + \mathrm{tr}\,(X)XY + \mathrm{tr}\,(Y)X^2 - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)X + \mathrm{tr}\,(XY)X \in R'$$

On raisonne à présent par récurrence sur le degré du monôme en $X$ et $Y$. Tout monôme de degré inférieur ou égal à 2 dans $R'$.

# Fin de la première étape

On en déduit que $YX \in R'$ puis

$$XYX = -X^2Y + \mathrm{tr}(X)XY + \mathrm{tr}(Y)X^2 - \mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)X + \mathrm{tr}(XY)X \in R'$$

On raisonne à présent par récurrence sur le degré du monôme en $X$ et $Y$. Tout monôme de degré inférieur ou égal à 2 dans $R'$. Soit $\beta$ un monôme de degré $\ell + 1$ avec $\ell \geqslant 2$.

# Fin de la première étape

On en déduit que $YX \in R'$ puis

$$XYX = -X^2Y + \operatorname{tr}(X)XY + \operatorname{tr}(Y)X^2 - \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)X + \operatorname{tr}(XY)X \in R'$$

On raisonne à présent par récurrence sur le degré du monôme en $X$ et $Y$. Tout monôme de degré inférieur ou égal à 2 dans $R'$. Soit $\beta$ un monôme de degré $\ell + 1$ avec $\ell \geqslant 2$. On écrit $\beta = \alpha X$ ou $\beta = \alpha Y$ avec $\alpha$ qui est un monôme de degré $\ell$.

# Fin de la première étape

On en déduit que $YX \in R'$ puis

$$XYX = -X^2Y + \mathrm{tr}\,(X)XY + \mathrm{tr}\,(Y)X^2 - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)X + \mathrm{tr}\,(XY)X \in R'$$

On raisonne à présent par récurrence sur le degré du monôme en $X$ et $Y$. Tout monôme de degré inférieur ou égal à 2 dans $R'$. Soit $\beta$ un monôme de degré $\ell + 1$ avec $\ell \geqslant 2$. On écrit $\beta = \alpha X$ ou $\beta = \alpha Y$ avec $\alpha$ qui est un monôme de degré $\ell$.

On en déduit que $\beta \in C'X + C'X^2 + C'YX + C'XYX \subset R'$ ou $\beta \in C'Y + C'XY + C'Y^2 + C'XY^2$.

# Fin de la première étape

On en déduit que $YX \in R'$ puis

$$XYX = -X^2Y + \mathrm{tr}\,(X)XY + \mathrm{tr}\,(Y)X^2 - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)X + \mathrm{tr}\,(XY)X \in R'$$

On raisonne à présent par récurrence sur le degré du monôme en $X$ et $Y$. Tout monôme de degré inférieur ou égal à 2 dans $R'$. Soit $\beta$ un monôme de degré $\ell + 1$ avec $\ell \geqslant 2$. On écrit $\beta = \alpha X$ ou $\beta = \alpha Y$ avec $\alpha$ qui est un monôme de degré $\ell$.

On en déduit que $\beta \in C'X + C'X^2 + C'YX + C'XYX \subset R'$ ou $\beta \in C'Y + C'XY + C'Y^2 + C'XY^2$.

Ainsi, on a bien $R \subset R' = C'1 + C'X + C'Y + C'XY$. En particulier, la trace de tout élément de $R$ est dans $C'$.

## Étape 2 et 3

Étape 2. Soit $P_0 + P_1X + P_2Y + P_3XY = 0$ avec $P_i \in S$.

# Étape 2 et 3

Étape 2. Soit $P_0 + P_1 X + P_2 Y + P_3 XY = 0$ avec $P_i \in S$. En calculant les quatre coefficients matricielles, on obtient que $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ est solution du système linéaire homogène de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & a & e & ae + bg \\ 1 & d & h & cf + dh \\ 0 & b & f & af + bh \\ 0 & c & g & cd + dg \end{bmatrix}$$

de déterminant non nul.

# Étape 2 et 3

Étape 2. Soit $P_0 + P_1 X + P_2 Y + P_3 XY = 0$ avec $P_i \in S$. En calculant les quatre coefficients matricielles, on obtient que $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ est solution du système linéaire homogène de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & a & e & ae + bg \\ 1 & d & h & cf + dh \\ 0 & b & f & af + bh \\ 0 & c & g & cd + dg \end{bmatrix}$$

de déterminant non nul.

Étape 3. Soit $U \in R$, on a $\det(U) = -U^2 + \mathrm{tr}\,(U)U \in R' \cap S1$.

# Étape 2 et 3

Étape 2. Soit $P_0 + P_1 X + P_2 Y + P_3 XY = 0$ avec $P_i \in S$. En calculant les quatre coefficients matricielles, on obtient que $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ est solution du système linéaire homogène de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & a & e & ae + bg \\ 1 & d & h & cf + dh \\ 0 & b & f & af + bh \\ 0 & c & g & cd + dg \end{bmatrix}$$

de déterminant non nul.

Étape 3. Soit $U \in R$, on a $\det(U) = -U^2 + \mathrm{tr}\,(U)U \in R' \cap S1$. On a donc d'après l'étape 2, $\det(U) \in C'$.

# Étape 2 et 3

Étape 2. Soit $P_0 + P_1 X + P_2 Y + P_3 XY = 0$ avec $P_i \in S$. En calculant les quatre coefficients matricielles, on obtient que $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ est solution du système linéaire homogène de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & a & e & ae+bg \\ 1 & d & h & cf+dh \\ 0 & b & f & af+bh \\ 0 & c & g & cd+dg \end{bmatrix}$$

de déterminant non nul.

Étape 3. Soit $U \in R$, on a $\det(U) = -U^2 + \mathrm{tr}\,(U)U \in R' \cap S1$. On a donc d'après l'étape 2, $\det(U) \in C'$. Ainsi $C' = C$ et $\overline{R} = C1 \oplus CX \oplus CY \oplus CXY$.

# Algèbre de polynômes

En évaluant en $d = 0, e = 0$ et $b = -1$, on obtient

$$C \mapsto k[a, c, h, -fg, cf - g] = S'$$

# Algèbre de polynômes

En évaluant en $d = 0, e = 0$ et $b = -1$, on obtient

$$C \mapsto k[a, c, h, -fg, cf - g] = S'$$

De plus, $g$ et $f$ sont algébriques sur $\mathrm{Frac}(S')$ :

# Algèbre de polynômes

En évaluant en $d = 0, e = 0$ et $b = -1$, on obtient

$$C \mapsto k[a, c, h, -fg, cf - g] = S'$$

De plus, $g$ et $f$ sont algébriques sur $\mathrm{Frac}(S')$ : $f$ est racine de $-fg + T(g - cf) + cT^2$

# Algèbre de polynômes

En évaluant en $d = 0, e = 0$ et $b = -1$, on obtient

$$C \mapsto k[a, c, h, -fg, cf - g] = S'$$

De plus, $g$ et $f$ sont algébriques sur $\mathrm{Frac}(S')$ : $f$ est racine de $-fg + T(g - cf) + cT^2$ et $g$ est racine de $cfg - (cf - g)T + T^2$.

# Algèbre de polynômes

En évaluant en $d = 0, e = 0$ et $b = -1$, on obtient

$$C \mapsto k[a, c, h, -fg, cf - g] = S'$$

De plus, $g$ et $f$ sont algébriques sur $\mathrm{Frac}(S')$ : $f$ est racine de $-fg + T(g - cf) + cT^2$ et $g$ est racine de $cfg - (cf - g)T + T^2$.

Ainsi $k(a, c, h, f, g)$ est une extension algébrique de $\mathrm{Frac}(S')$

# Algèbre de polynômes

En évaluant en $d = 0, e = 0$ et $b = -1$, on obtient

$$C \mapsto k[a, c, h, -fg, cf - g] = S'$$

De plus, $g$ et $f$ sont algébriques sur $\mathrm{Frac}(S')$ : $f$ est racine de $-fg + T(g - cf) + cT^2$ et $g$ est racine de $cfg - (cf - g)T + T^2$.

Ainsi $k(a, c, h, f, g)$ est une extension algébrique de $\mathrm{Frac}(S')$ et $a, c, h, -fg, cf - g$ est une base de transcendance de $k(a, c, h, f, g)$.

# Algèbre de polynômes

En évaluant en $d = 0, e = 0$ et $b = -1$, on obtient

$$C \mapsto k[a, c, h, -fg, cf - g] = S'$$

De plus, $g$ et $f$ sont algébriques sur $\mathrm{Frac}(S')$ : $f$ est racine de $-fg + T(g - cf) + cT^2$ et $g$ est racine de $cfg - (cf - g)T + T^2$.

Ainsi $k(a, c, h, f, g)$ est une extension algébrique de $\mathrm{Frac}(S')$ et $a, c, h, -fg, cf - g$ est une base de transcendance de $k(a, c, h, f, g)$.

Donc $C$ est bien une algèbre de polynômes en 5 indéterminées.

prop

## Somme amalgamée

On définit les algèbres suivantes :

- $A = k[\operatorname{tr}(X), \det(X), \operatorname{tr}(Y), \det(Y)]$
- $P_X = k[\operatorname{tr}(X), X, \operatorname{tr}(Y), \det(Y)]$
- $P_Y = k[\operatorname{tr}(X), \det(X), \operatorname{tr}(Y), Y]$

## Somme amalgamée

On définit les algèbres suivantes :

- $A = k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X), \mathrm{tr}\,(Y), \det(Y)]$
- $P_X = k[\mathrm{tr}\,(X), X, \mathrm{tr}\,(Y), \det(Y)]$
- $P_Y = k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X), \mathrm{tr}\,(Y), Y]$

D'après le cas $r = 1$, $A, P, Q$ sont des algèbres de polynômes en 4 indéterminées et on a $P_X = A \oplus AX$ et $P_Y = A \oplus AY$.

## Somme amalgamée

On définit les algèbres suivantes :

- $A = k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X), \mathrm{tr}\,(Y), \det(Y)]$
- $P_X = k[\mathrm{tr}\,(X), X, \mathrm{tr}\,(Y), \det(Y)]$
- $P_Y = k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X), \mathrm{tr}\,(Y), Y]$

D'après le cas $r = 1$, $A, P, Q$ sont des algèbres de polynômes en 4 indéterminées et on a $P_X = A \oplus AX$ et $P_Y = A \oplus AY$. De plus, on a le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & P_X \arrow[d] \\ P_Y \arrow[r] & \overline{R} \end{tikzcd}$$

où les flèches sont les inclusions.

# Somme amalgamée

On définit les algèbres suivantes :

- $A = k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X), \mathrm{tr}\,(Y), \det(Y)]$
- $P_X = k[\mathrm{tr}\,(X), X, \mathrm{tr}\,(Y), \det(Y)]$
- $P_Y = k[\mathrm{tr}\,(X), \det(X), \mathrm{tr}\,(Y), Y]$

D'après le cas $r = 1$, $A, P, Q$ sont des algèbres de polynômes en 4 indéterminées et on a $P_X = A \oplus AX$ et $P_Y = A \oplus AY$. De plus, on a le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & P_X \arrow[d] \\ P_Y \arrow[r] & \overline{R} \end{tikzcd}$$

où les flèches sont les inclusions.

On en déduit un morphisme canonique $\Phi : P_X \sqcup_A P_Y \longrightarrow \overline{R}$.

# $\Phi$ isomorphisme

Le morphisme $\Phi$ est surjectif car $P_X$ et $P_Y$ engendrent $\overline{R}$.

## $\Phi$ isomorphisme

Le morphisme $\Phi$ est surjectif car $P_X$ et $P_Y$ engendrent $\overline{R}$. En effet, grâce au théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire, on a

$$\mathrm{tr}\,(XY) \in \langle P_X, P_Y \rangle_{k-\mathrm{alg}}.$$

# $\Phi$ isomorphisme

Le morphisme $\Phi$ est surjectif car $P_X$ et $P_Y$ engendrent $\overline{R}$. En effet, grâce au théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire, on a

$$\mathrm{tr}\,(XY) \in \langle P_X, P_Y \rangle_{k-\mathrm{alg.}}$$

Montrons que $\Phi$ est injectif.
L'élément $Z = XY + YX - \mathrm{tr}\,(X)Y - \mathrm{tr}\,(Y)X \in Z(P_X \sqcup_A P_Y)$.

## $\Phi$ isomorphisme

Le morphisme $\Phi$ est surjectif car $P_X$ et $P_Y$ engendrent $\overline{R}$. En effet, grâce au théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire, on a

$$\mathrm{tr}\,(XY) \in \langle P_X, P_Y \rangle_{k-\mathrm{alg.}}$$

Montrons que $\Phi$ est injectif.
L'élément $Z = XY + YX - \mathrm{tr}\,(X)Y - \mathrm{tr}\,(Y)X \in Z(P_X \sqcup_A P_Y)$.
En effet, on a

$$XZ = XYX + \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y - \mathrm{tr}\,(X)XY - \mathrm{tr}\,(Y)X^2$$

et $ZX = XYX + \mathrm{tr}\,(X)YX - \det(X)Y - \mathrm{tr}\,(X)YX - \mathrm{tr}\,(Y)X^2$

## $\Phi$ isomorphisme

Le morphisme $\Phi$ est surjectif car $P_X$ et $P_Y$ engendrent $\overline{R}$. En effet, grâce au théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire, on a

$$\mathrm{tr}\,(XY) \in \langle P_X, P_Y \rangle_{k-\mathrm{alg.}}$$

Montrons que $\Phi$ est injectif.
L'élément $Z = XY + YX - \mathrm{tr}\,(X)Y - \mathrm{tr}\,(Y)X \in Z(P_X \sqcup_A P_Y)$.
En effet, on a

$$XZ = XYX + \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y - \mathrm{tr}\,(X)XY - \mathrm{tr}\,(Y)X^2$$

et $\;ZX = XYX + \mathrm{tr}\,(X)YX - \det(X)Y - \mathrm{tr}\,(X)YX - \mathrm{tr}\,(Y)X^2$

et de même avec $Y$.

## $\Phi$ isomorphisme

Le morphisme $\Phi$ est surjectif car $P_X$ et $P_Y$ engendrent $\overline{R}$. En effet, grâce au théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire, on a

$$\mathrm{tr}\,(XY) \in \langle P_X, P_Y \rangle_{k-\text{alg.}}$$

Montrons que $\Phi$ est injectif.
L'élément $Z = XY + YX - \mathrm{tr}\,(X)Y - \mathrm{tr}\,(Y)X \in Z(P_X \sqcup_A P_Y)$.
En effet, on a

$$XZ = XYX + \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y - \mathrm{tr}\,(X)XY - \mathrm{tr}\,(Y)X^2$$

et $\;ZX = XYX + \mathrm{tr}\,(X)YX - \det(X)Y - \mathrm{tr}\,(X)YX - \mathrm{tr}\,(Y)X^2$

et de même avec $Y$.
Par ailleurs, on a $P_X \sqcup_A P_Y = A[Z] + A[Z]X + A[Z]Y + A[Z]XY$.

## $\Phi$ isomorphisme

Le morphisme $\Phi$ est surjectif car $P_X$ et $P_Y$ engendrent $\overline{R}$. En effet, grâce au théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire, on a

$$\mathrm{tr}\,(XY) \in \langle P_X, P_Y \rangle_{k-\mathsf{alg.}}$$

Montrons que $\Phi$ est injectif.
L'élément $Z = XY + YX - \mathrm{tr}\,(X)Y - \mathrm{tr}\,(Y)X \in Z(P_X \sqcup_A P_Y)$.
En effet, on a

$$XZ = XYX + \mathrm{tr}\,(X)XY - \det(X)Y - \mathrm{tr}\,(X)XY - \mathrm{tr}\,(Y)X^2$$

$$\text{et} \quad ZX = XYX + \mathrm{tr}\,(X)YX - \det(X)Y - \mathrm{tr}\,(X)YX - \mathrm{tr}\,(Y)X^2$$

et de même avec $Y$.
Par ailleurs, on a $P_X \sqcup_A P_Y = A[Z] + A[Z]X + A[Z]Y + A[Z]XY$.
Cela résulte de la relation $YX = Z + tr(Y)X + \mathrm{tr}\,(X)Y - XY$ .

# Fin de la preuve

On a $\Phi(Z) = \mathrm{tr}\,(XY) - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire).

# Fin de la preuve

On a $\Phi(Z) = \mathrm{tr}\,(XY) - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire). Ainsi

$$\Phi : A[Z] \longrightarrow A[\mathrm{tr}\,(XY) - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)] = C$$

est injective

## Fin de la preuve

On a $\Phi(Z) = \mathrm{tr}\,(XY) - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire). Ainsi

$$\Phi : A[Z] \longrightarrow A[\mathrm{tr}\,(XY) - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)] = C$$

est injective puisque $\mathrm{tr}\,(XY) - \mathrm{tr}\,(X)\mathrm{tr}\,(Y)$ est transcendant sur $A$.

## Fin de la preuve

On a $\Phi(Z) = \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton bilinéaire). Ainsi

$$\Phi : A[Z] \longrightarrow A[\operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)] = C$$

est injective puisque $\operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)$ est transcendant sur $A$. Comme $P_X \sqcup_A P_Y = A[Z] + A[Z]X + A[Z]Y + A[Z]XY$ et $\overline{R} = C1 \oplus CX \oplus CY \oplus CXY$, on en déduit que $\Phi$ est injective.

## Graduation

La $k$-algèbre $\mathrm{M}_2(S)$ est une $k$-algèbre graduée (par le degré des polynômes).

# Graduation

La $k$-algèbre $\mathrm{M}_2(S)$ est une $k$-algèbre graduée (par le degré des polynômes).
Les générateurs $X$ et $Y$ de $R$ sont de degré 1.

# Graduation

La $k$-algèbre $\mathrm{M}_2(S)$ est une $k$-algèbre graduée (par le degré des polynômes).
Les générateurs $X$ et $Y$ de $R$ sont de degré 1.
Ainsi $R$ est une $k$-algèbre graduée avec $R_0 = k$.

# Graduation

La $k$-algèbre $\mathrm{M}_2(S)$ est une $k$-algèbre graduée (par le degré des polynômes).
Les générateurs $X$ et $Y$ de $R$ sont de degré 1.
Ainsi $R$ est une $k$-algèbre graduée avec $R_0 = k$.

Soit $J$ l'idéal (bilatère) engendré par les commutateurs de $R$.

## Graduation

La $k$-algèbre $\mathrm{M}_2(S)$ est une $k$-algèbre graduée (par le degré des polynômes).
Les générateurs $X$ et $Y$ de $R$ sont de degré 1.
Ainsi $R$ est une $k$-algèbre graduée avec $R_0 = k$.

Soit $J$ l'idéal (bilatère) engendré par les commutateurs de $R$. Il est homogène.

# Graduation

La $k$-algèbre $\mathrm{M}_2(S)$ est une $k$-algèbre graduée (par le degré des polynômes).
Les générateurs $X$ et $Y$ de $R$ sont de degré 1.
Ainsi $R$ est une $k$-algèbre graduée avec $R_0 = k$.

Soit $J$ l'idéal (bilatère) engendré par les commutateurs de $R$. Il est homogène.

De plus, $R/J = k[X, Y]$ est une algèbre graduée de polynômes en deux indéterminées avec $X$ et $Y$ en degré 1

# Graduation

La $k$-algèbre $\mathrm{M}_2(S)$ est une $k$-algèbre graduée (par le degré des polynômes).
Les générateurs $X$ et $Y$ de $R$ sont de degré 1.
Ainsi $R$ est une $k$-algèbre graduée avec $R_0 = k$.

Soit $J$ l'idéal (bilatère) engendré par les commutateurs de $R$. Il est homogène.

De plus, $R/J = k[X, Y]$ est une algèbre graduée de polynômes en deux indéterminées avec $X$ et $Y$ en degré 1 (on fait $b = c = d = f = g = h = 0$).

# Action de groupes

Le groupe $\mathrm{GL}_2(k)$ agit de façon homogène sur la $k$-algèbre $R$ de la façon suivante : soit $g = \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix}$

$$gX = uX + vY \qquad \text{et} \qquad gY = wX + xY$$

# Action de groupes

Le groupe $\mathrm{GL}_2(k)$ agit de façon homogène sur la $k$-algèbre $R$ de la façon suivante : soit $g = \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix}$

$$gX = uX + vY \qquad \text{et} \qquad gY = wX + xY$$

En effet, $g$ agit par automorphisme sur $k[a, e]$, $k[b, f]$, $k[c, g]$ et $k[d, h]$ via $a \mapsto ua + ve$ et $e \mapsto wa + xe$...

# Le décor

Soit $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(k)$. On a

**Lemme – Finitude.**

- $(R/J)^G$ est une $k$-algèbre de type fini et $R/J$ est de type fini comme $(R/J)^G$-module.
- $J/J^2$ est un $(R/J \otimes (R/J)^{\mathrm{op}})$-module monogène.
- $(J/J^2)^G$ est un module de type fini sur $(R/J)^G \otimes (R/J)^G$.

# Le décor

Soit $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(k)$. On a

**Lemme – Finitude.**

- $(R/J)^G$ est une $k$-algèbre de type fini et $R/J$ est de type fini comme $(R/J)^G$-module.
- $J/J^2$ est un $(R/J \otimes (R/J)^{\mathrm{op}})$-module monogène.
- $(J/J^2)^G$ est un module de type fini sur $(R/J)^G \otimes (R/J)^G$.

**Preuve.**

- Merci Emmy !
- $XY - YX$ engendre l'idéal bilatère $J$.
- $J/J^2$ est de type fini et donc noethérien sur $(R/J)^G \otimes (R/J)^G$.

# Un premier résultat de finitude

**Lemme** On suppose que $\mathrm{car} k \nmid |G|$ alors $(R/J^2)^G$ est une $k$-algèbre de type fini.

# Un premier résultat de finitude

**Lemme** On suppose que $\mathrm{car} k \nmid |G|$ alors $(R/J^2)^G$ est une $k$-algèbre de type fini.

**Preuve.** Soit $a_1, \ldots, a_\ell$ des relevés dans $(R/J^2)^G$ des générateurs de $(R/J)^G$

# Un premier résultat de finitude

**Lemme** On suppose que $\mathrm{car}\, k \nmid |G|$ alors $(R/J^2)^G$ est une $k$-algèbre de type fini.

**Preuve.** Soit $a_1, \ldots, a_\ell$ des relevés dans $(R/J^2)^G$ des générateurs de $(R/J)^G$ et $b_1, \ldots, b_m$ des générateurs de $(J/J^2)^G$ (en tant qu'idéal bilatère de $(R/J^2)^G$).

## Un premier résultat de finitude

**Lemme** On suppose que $\mathrm{car} k \nmid |G|$ alors $(R/J^2)^G$ est une $k$-algèbre de type fini.

**Preuve.** Soit $a_1, \dots, a_\ell$ des relevés dans $(R/J^2)^G$ des générateurs de $(R/J)^G$ et $b_1, \dots, b_m$ des générateurs de $(J/J^2)^G$ (en tant qu'idéal bilatère de $(R/J^2)^G$). Alors $a_1, \dots, a_\ell, b_1, \dots, b_m$ engendre $R/J^2$.

# Un premier résultat de finitude

**Lemme** On suppose que $\mathrm{car} k \nmid |G|$ alors $(R/J^2)^G$ est une $k$-algèbre de type fini.

**Preuve.** Soit $a_1, \ldots, a_\ell$ des relevés dans $(R/J^2)^G$ des générateurs de $(R/J)^G$ et $b_1, \ldots, b_m$ des générateurs de $(J/J^2)^G$ (en tant qu'idéal bilatère de $(R/J^2)^G$). Alors $a_1, \ldots, a_\ell, b_1, \ldots, b_m$ engendre $R/J^2$. En effet, on peut écrire $x \in R/J^2$ sous la forme

$$x = f(a_1, \ldots, a_\ell) + \textstyle\sum_i x_i b_i y_i \,.$$

# Un premier résultat de finitude

**Lemme** On suppose que $\mathrm{car}\, k \nmid |G|$ alors $(R/J^2)^G$ est une $k$-algèbre de type fini.

**Preuve.** Soit $a_1, \ldots, a_\ell$ des relevés dans $(R/J^2)^G$ des générateurs de $(R/J)^G$ et $b_1, \ldots, b_m$ des générateurs de $(J/J^2)^G$ (en tant qu'idéal bilatère de $(R/J^2)^G$). Alors $a_1, \ldots, a_\ell, b_1, \ldots, b_m$ engendre $R/J^2$. En effet, on peut écrire $x \in R/J^2$ sous la forme

$$x = f(a_1, \ldots, a_\ell) + \textstyle\sum_i x_i b_i y_i \,.$$

Mais chacun des $x_i$ et des $y_i$ est congru modulo $J$ à un polynôme (non commutatif) en les $a_i$

# Un premier résultat de finitude

**Lemme** On suppose que $\mathrm{car}\, k \nmid |G|$ alors $(R/J^2)^G$ est une $k$-algèbre de type fini.

**Preuve.** Soit $a_1, \ldots, a_\ell$ des relevés dans $(R/J^2)^G$ des générateurs de $(R/J)^G$ et $b_1, \ldots, b_m$ des générateurs de $(J/J^2)^G$ (en tant qu'idéal bilatère de $(R/J^2)^G$). Alors $a_1, \ldots, a_\ell, b_1, \ldots, b_m$ engendre $R/J^2$. En effet, on peut écrire $x \in R/J^2$ sous la forme

$$x = f(a_1, \ldots, a_\ell) + \sum_i x_i b_i y_i \,.$$

Mais chacun des $x_i$ et des $y_i$ est congru modulo $J$ à un polynôme (non commutatif) en les $a_i$ et les produits $x_i b_i$ et $b_i y_i$ ne dépendent que de la classe modulo $J$ de $x_i$ et $y_i$.

## Commutateurs

**Lemme** On a $J^2 = J(XY - YX)$

# Commutateurs

**Lemme** On a $J^2 = J(XY - YX)$

**Preuve.** Cela résulte directement de

$$J = \overline{R}(XY - YX) = (XY - YX)\overline{R}.$$

## Commutateurs

**Lemme** On a $J^2 = J(XY - YX)$

**Preuve.** Cela résulte directement de

$$J = \overline{R}(XY - YX) = (XY - YX)\overline{R}.$$

L'égalité $J = \overline{R}(XY - YX)$ résulte quant à elle des relations suivantes

$$(XY - YX)X = \mathrm{tr}\,(X)(XY - YX) - X(XY - YX)$$

# Commutateurs

**Lemme** On a $J^2 = J(XY - YX)$

**Preuve.** Cela résulte directement de

$$J = \overline{R}(XY - YX) = (XY - YX)\overline{R}.$$

L'égalité $J = \overline{R}(XY - YX)$ résulte quant à elle des relations suivantes

$$(XY - YX)X = \operatorname{tr}(X)(XY - YX) - X(XY - YX)$$

$$\det(X)(XY - YX) = -X(XY - YX)X$$

# Commutateurs

**Lemme** On a $J^2 = J(XY - YX)$

**Preuve.** Cela résulte directement de

$$J = \overline{R}(XY - YX) = (XY - YX)\overline{R}.$$

L'égalité $J = \overline{R}(XY - YX)$ résulte quant à elle des relations suivantes

$$(XY - YX)X = \mathrm{tr}\,(X)(XY - YX) - X(XY - YX)$$

$$\det(X)(XY - YX) = -X(XY - YX)X$$

$$\mathrm{tr}\,(XY)(XY - YX) = XYXY - YXYX = XY[X, Y] - [X, Y]YX$$

# Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$.

## Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.

# Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif.

## Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif. Soit $a_1, \dots, a_m$ des relevés homogènes dans $R^G$ des générateurs de $(R/J^2)^G$.

# Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif. Soit $a_1, \dots, a_m$ des relevés homogènes dans $R^G$ des générateurs de $(R/J^2)^G$.

Montrons, par récurrence sur le degré, que $R^G$ est engendré par $a_1, \dots, a_m, XY - YX$.

# Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif. Soit $a_1, \ldots, a_m$ des relevés homogènes dans $R^G$ des générateurs de $(R/J^2)^G$.

Montrons, par récurrence sur le degré, que $R^G$ est engendré par $a_1, \ldots, a_m, XY - YX$.

En degré 0, il n'y a que le corps $k$.

# Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif. Soit $a_1, \ldots, a_m$ des relevés homogènes dans $R^G$ des générateurs de $(R/J^2)^G$.

Montrons, par récurrence sur le degré, que $R^G$ est engendré par $a_1, \ldots, a_m, XY - YX$.

En degré 0, il n'y a que le corps $k$.

Soit $u$ homogène dans $R^G$.

## Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif. Soit $a_1, \dots, a_m$ des relevés homogènes dans $R^G$ des générateurs de $(R/J^2)^G$.

Montrons, par récurrence sur le degré, que $R^G$ est engendré par $a_1, \dots, a_m, XY - YX$.

En degré 0, il n'y a que le corps $k$.

Soit $u$ homogène dans $R^G$. Il existe $f$ polynôme non commutatif tel que $v := u - f(a_1, \dots, a_m) \in (J^2)^G$ (et $\deg v \leqslant \deg u$).

## Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif. Soit $a_1, \dots, a_m$ des relevés homogènes dans $R^G$ des générateurs de $(R/J^2)^G$.

Montrons, par récurrence sur le degré, que $R^G$ est engendré par $a_1, \dots, a_m, XY - YX$.

En degré 0, il n'y a que le corps $k$.

Soit $u$ homogène dans $R^G$. Il existe $f$ polynôme non commutatif tel que $v := u - f(a_1, \dots, a_m) \in (J^2)^G$ (et $\deg v \leqslant \deg u$).
On écrit $v = w(XY - YX)$ avec $w \in J$.

# Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif. Soit $a_1, \dots, a_m$ des relevés homogènes dans $R^G$ des générateurs de $(R/J^2)^G$.

Montrons, par récurrence sur le degré, que $R^G$ est engendré par $a_1, \dots, a_m, XY - YX$.

En degré 0, il n'y a que le corps $k$.

Soit $u$ homogène dans $R^G$. Il existe $f$ polynôme non commutatif tel que $v := u - f(a_1, \dots, a_m) \in (J^2)^G$ (et $\deg v \leqslant \deg u$).
On écrit $v = w(XY - YX)$ avec $w \in J$. Comme $XY - YX$ n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathrm{M}_2(S)$ ($\det(XY - YX) \neq 0$),

# Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif. Soit $a_1, \ldots, a_m$ des relevés homogènes dans $R^G$ des générateurs de $(R/J^2)^G$.

Montrons, par récurrence sur le degré, que $R^G$ est engendré par $a_1, \ldots, a_m, XY - YX$.

En degré 0, il n'y a que le corps $k$.

Soit $u$ homogène dans $R^G$. Il existe $f$ polynôme non commutatif tel que $v := u - f(a_1, \ldots, a_m) \in (J^2)^G$ (et $\deg v \leqslant \deg u$).
On écrit $v = w(XY - YX)$ avec $w \in J$. Comme $XY - YX$ n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathrm{M}_2(S)$ ($\det(XY - YX) \neq 0$), on en déduit que $w \in J^G$

# Finitude des invariants

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a $g \cdot (XY - YX) = \det g(XY - YX)$. Ainsi, on a $XY - YX \in R^G$.
Le morphisme canonique $R^G \mapsto (R/J^2)^G$ est gradué de degré 0 et surjectif. Soit $a_1, \ldots, a_m$ des relevés homogènes dans $R^G$ des générateurs de $(R/J^2)^G$.

Montrons, par récurrence sur le degré, que $R^G$ est engendré par $a_1, \ldots, a_m, XY - YX$.

En degré 0, il n'y a que le corps $k$.

Soit $u$ homogène dans $R^G$. Il existe $f$ polynôme non commutatif tel que $v := u - f(a_1, \ldots, a_m) \in (J^2)^G$ (et $\deg v \leqslant \deg u$).
On écrit $v = w(XY - YX)$ avec $w \in J$. Comme $XY - YX$ n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathrm{M}_2(S)$ ($\det(XY - YX) \neq 0$), on en déduit que $w \in J^G$ et $\deg w < \deg v \leqslant \deg u$.

# Et si $G \not\subset \mathrm{SL}_2(k)$

Pour l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $X \mapsto X$ et $Y \mapsto -Y$, on a

$$R^G = \langle X, YX^iY, i \in \mathbb{N}\rangle_{k-\text{alg.}}\ .$$