Le problème d'isomorphisme des algèbres enveloppantes en petites dimensions, d'après un article Chun, Kajiwara and Lee

César Lecoutre

Université Clermont Auvergne

GTIA – 15 Novembre et 13 Décembre 2021

Motivation

Soit $\mathbb{k}$ un corps, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des $\mathbb{k}$-algèbres de Lie et $U(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{h})$ leurs algèbres enveloppantes. Alors

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \implies U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h})$$

C'est une conséquence de la propriété universelle suivante de $U(\mathfrak{g})$. On notera $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ l'injection canonique d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans son algèbre enveloppante.

Proposition

Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre et $\tau : \mathfrak{g} \to A$ une application $\mathbb{k}$-linéaire telle

$$\tau(x)\tau(y) - \tau(y)\tau(x) = \tau([x, y])$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$. Alors il existe un unique morphisme de $\mathbb{k}$-algèbre $\tau' : U(g) \to A$ tel que $\tau'(1) = 1$ et $\tau' \circ \sigma = \tau$.

$\longrightarrow$ On étend les isomorphismes réciproques $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$.

Motivation

Qu'en est-il du l'implication réciproque : pour deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, a-t-on

$$U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h}) \implies \mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \quad ?$$

Motivation

Qu'en est-il du l'implication réciproque : pour deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, a-t-on

$$U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h}) \implies \mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \quad ?$$

- Contre-exemples en positive caractéristique : certaines algèbres nilpotentes et métabéliennes, ainsi qu'avec certaines algèbres de Lie libres
- Résultat positif en caractéristique zéro si l'isomorphisme respecte la structure de Hopf
- Des résultats positifs en petite dimension
  - $\mathrm{car}\,\mathbb{k} \neq 2$ et $\mathfrak{g}$ simple de dimension 3 par Malcolmson
  - $\mathrm{car}\,\mathbb{k} \neq 2$ et $\dim \mathfrak{g} \leqslant 3$ par Chun, Kajiwara et Lee
  - $\mathrm{car}\,\mathbb{k} = 0$ et $\mathfrak{g}$ résoluble de dimension 4 par Vilca Rodriguez, Schneider et Usefi
- Vrai en nilpotent en caractéristique zéro par Campos, Petersen, Wierstra et Robert-Nicoud

$\longrightarrow$ Etude du résultat de Chun, Kajiwara et Lee

Un premier invariant : la dimension

Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de dimension finie. Alors*

$$GK\dim U(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}.$$

En particulier, $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h})$ *implique* $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}$*.*

Démonstration.

- $GK\dim(U(\mathfrak{g})) = GK\dim(gr\ U(\mathfrak{g}))$ car $U(\mathfrak{g})$ est finiment engendrée,
- $gr\ U(\mathfrak{g})$ est une algèbre de polynôme en $\dim \mathfrak{g}$ variables,
- $GK\dim(\mathbb{k}[X_1, \ldots, X_s]) = s$ par calcul direct.

$\square$

Dimensions 1 et 2

• $\dim \mathfrak{g} = 1$. Il existe une unique algèbre de Lie de dimension 1, l'algèbre abélienne. Ainsi, si $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h})$ pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 1, alors on a $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$.

• $\dim \mathfrak{g} = 2$. A isomorphisme près, il existe deux algèbres de Lie de dimension 2, l'algèbre abélienne et la "petite résoluble", de base $\{x, y\}$ avec $[x, y] = y$.

Lemme

Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ on a l'équivalence suivante

$$\mathfrak{g} \text{ est abélienne} \iff U(\mathfrak{g}) \text{ est commutative}$$

Ainsi, si $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h})$ pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 2, alors on a $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$.

Quelques résultats classiques

Théorème (PBW)

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie n et soit $\{g_1, \dots, g_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$. Alors les monômes ordonnées $g_1^{\alpha_1} \dots g_n^{\alpha_n}$ où $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout i forment une base de $U(\mathfrak{g})$.

Corollaire

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie et soit $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Lie. Notons $\{g_1, \dots, g_m\}$ une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $U(\mathfrak{g})$ est un $U(\mathfrak{k})$-module à droite et à gauche de base les monômes ordonnées $g_1^{\alpha_1} \dots g_m^{\alpha_m}$ où $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout i.

Démonstration.

Soit $\{g_{m+1}, \dots, g_n\}$ une base de $\mathfrak{k}$. Soit $u \in U(\mathfrak{g})$. Par le thèorème, $u = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{N}} g_1^{\alpha_1} \dots g_m^{\alpha_m} u_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ où $u_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} \in U(\mathfrak{k})$. On a le résultat (à droite) puisque cette écriture est unique. $\square$

Quelques résultats classiques

Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$.

a) *L'idéal à droite $\mathfrak{k}U(\mathfrak{g})$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$.*
b) *Le morphisme d'algèbres de $U(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ induit par la projection canonique π est surjectif de noyau $\mathfrak{k}U(\mathfrak{g})$.*

Démonstration.

Soit $\{g_1, \ldots, g_m\}$ une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors

$$U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^m} g_1^{\alpha_1} \ldots g_m^{\alpha_m} U(\mathfrak{k}) = \bigoplus_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^m} U(\mathfrak{k}) g_1^{\alpha_1} \ldots g_m^{\alpha_m}$$

par le corollaire. Pour $u \in U(\mathfrak{g})$ posons $u = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^m} g_1^{\alpha_1} \ldots g_m^{\alpha_m} u_{\underline{\alpha}}$ et notons $\epsilon(u_{\underline{\alpha}})$ le terme constant de $\pi(u_{\underline{\alpha}})$. $\square$

Quelques résultats classiques

Démonstration.

$$U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^m} g_1^{\alpha_1}\dots g_m^{\alpha_m} U(\mathfrak{k}) = \bigoplus_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^m} U(\mathfrak{k}) g_1^{\alpha_1}\dots g_m^{\alpha_m} \qquad (1)$$

Pour $u \in U(\mathfrak{g})$ posons $u = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^m} g_1^{\alpha_1}\cdots g_m^{\alpha_m} u_{\underline{\alpha}}$ et notons $c(u_{\underline{\alpha}})$ le terme constant de $\pi(u_{\underline{\alpha}})$. Alors

$$\pi(u) = \sum_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^m} \pi(g_1)^{\alpha_1}\cdots\pi(g_m)^{\alpha_m} c(u_{\underline{\alpha}})$$

Notons $\varepsilon : U(\mathfrak{k}) \to \mathbb{k}$ le morphisme d'algèbres qui envoie $\mathfrak{k}$ sur 0 et soit $U(\mathfrak{k})_+$ son noyau. On a donc

$$\ker\pi = \bigoplus_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^m} g_1^{\alpha_1}\cdots g_m^{\alpha_m} U(\mathfrak{k})_+ = \bigoplus_{\underline{\alpha}\in\mathbb{N}^m} g_1^{\alpha_1}\cdots g_m^{\alpha_m} U(\mathfrak{k})\mathfrak{k} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$$

Avec la deuxième écriture de (1) on obtient de même que $\ker\pi = \mathfrak{k}U(\mathfrak{g})$. □

Un second invariant

Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ on note $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ son algèbre dérivée.

Corollaire

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des algèbres de Lie de dimension finies telles que $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h})$. Alors $\mathfrak{g}'U(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}'U(\mathfrak{h})$ et $\dim \mathfrak{g}' = \dim \mathfrak{h}'$.

Remarque

L'idéal bilatère $\mathfrak{g}'U(\mathfrak{g})$ est égal à l'idéal bilatère engendré par les commutateurs de $U(\mathfrak{g})$ puisque $[-,-]$ est une bidérivation de $U(\mathfrak{g})$.

Démonstration.

Si $\Psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ est un isomorphisme d'algèbres, alors $\Psi(\mathfrak{g}'U(\mathfrak{g})) = \mathfrak{h}'U(\mathfrak{h})$. Donc

$$U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \cong U(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}'U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}'U(\mathfrak{h}) \cong U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'),$$

par la Proposition, et alors $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') = \dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}')$ par le premier invariant. Comme on a aussi $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h})$ par le premier invariant, on obtient l'égalité désirée $\dim \mathfrak{g}' = \dim \mathfrak{h}'$. $\square$

Dimension 3 – La classification de Jacobson

Lemme

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des algèbres de Lie. On a $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} \implies \mathfrak{g}' \cong \mathfrak{h}'$.

Jacobson propose la classification à isomorphisme près suivante des algèbres de Lie de dimension 3.

(a) $\dim \mathfrak{g}' = 0$, $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie abélienne,

(b) $\dim \mathfrak{g}' = 1$ et $\mathfrak{g}' \subset Z(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Heisenberg de base $\{x, y, z\}$ avec $[x, y] = z$ et $[x, z] = [y, z] = 0$,

(c) $\dim \mathfrak{g}' = 1$ et $\mathfrak{g}' \not\subset Z(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de base $\{x, y, z\}$ avec $[x, y] = y$ et $[x, z] = [y, z] = 0$,

(d) $\dim \mathfrak{g}' = 2$, $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de base $\{x, y, z\}$ avec $[y, z] = 0$, $[x, y] = ay + bz$ et $[x, z] = cy + dz$, où $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{k})/\mathbb{k}^\times$,

(e) $\dim \mathfrak{g}' = 3$, $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de base $\{x, y, z\}$ avec $[x, y] = z$, $[y, z] = ax$ et $[z, x] = by$, où $a, b \in \mathbb{k}^\times$ (dès que $\mathrm{car}\,\mathbb{k} \neq 2$).

Dimension 3 – La classification de Jacobson

Puisque $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h})$ implique que $\dim \mathfrak{g}' = \dim \mathfrak{h}'$, on peut traiter séparément chacun des cas de la classification de Jacobson.

Sans perte de généralité, il ne reste plus que à considérer les cas $\dim \mathfrak{g}' = 1$ et $\dim \mathfrak{g}' = 2$ puisque

(a) le cas $\dim \mathfrak{g}' = 0$ ne concerne qu'une algèbre (abélienne),

(e) Si $\operatorname{car} \mathbb{k} \neq 2$, le cas $\dim \mathfrak{g}' = 3$ est résolu par Malcolmson :

$$U(\mathfrak{g}_{a,b}) \cong U(\mathfrak{g}_{a',b'}) \iff \mathfrak{g}_{a,b} \cong \mathfrak{g}_{a',b'} \iff (a,b) = (a',b')$$

pour tout $a, b \in \mathbb{k}^{\times}$.

Nous sommes donc ramené aux cas suivants :

(b/c) $\dim \mathfrak{g}' = 1$, deux algèbres de Lie à isomorphisme près, l'une nilpotente, l'autre non

(d) $\dim \mathfrak{g}' = 2$, une famille d'algèbres de Lie résolubles

<u>Observations</u> : $\mathfrak{g}'$ est un idéal abélien.

Un diagramme

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathfrak{g}' \in \{1, 2\}$.
Supposons que $\Psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ soit un isomorphisme d'algèbres.

Un diagramme

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathfrak{g}' \in \{1, 2\}$.
Supposons que $\Psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ soit un isomorphisme d'algèbres.
Alors il existe un isomorphisme d'algèbres $\overline{\Psi} : U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}')$.

Un diagramme

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathfrak{g}' \in \{1, 2\}$.
Supposons que $\Psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ soit un isomorphisme d'algèbres.
Alors il existe un isomorphisme d'algèbres $\overline{\Psi} : U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}')$.
Notre objectif est de construire le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Un diagramme

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathfrak{g}' \in \{1, 2\}$. Supposons que $\Psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ soit un isomorphisme d'algèbres. Alors il existe un isomorphisme d'algèbres $\overline{\Psi} : U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}')$. Notre objectif est de construire le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

- $\mathfrak{m}$ l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{g}$ (ou $\sigma(\mathfrak{g})$), on a $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m} \cong \mathbb{k}$

Un diagramme

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathfrak{g}' \in \{1, 2\}$.
Supposons que $\Psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ soit un isomorphisme d'algèbres.
Alors il existe un isomorphisme d'algèbres $\overline{\Psi} : U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}')$.
Notre objectif est de construire le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

- $\mathfrak{m}$ l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{g}$ (ou $\sigma(\mathfrak{g})$), on a $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m} \cong \mathbb{k}$
- $\mathfrak{m}' = \Psi(\mathfrak{m})$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{h})$ tel $U(\mathfrak{h})/\Psi(\mathfrak{m}) \cong U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m} \cong \mathbb{k}$ (1er théorème d'isomorphisme avec $\Psi^{-1} \circ \pi : U(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m})$

Un diagramme

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $\dim \mathfrak{g} = 3$ et $\dim \mathfrak{g}' \in \{1, 2\}$. Supposons que $\Psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ soit un isomorphisme d'algèbres. Alors il existe un isomorphisme d'algèbres $\overline{\Psi} : U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}')$. Notre objectif est de construire le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

- $\mathfrak{m}$ l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{g}$ (ou $\sigma(\mathfrak{g})$), on a $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m} \cong \mathbb{k}$
- $\mathfrak{m}' = \Psi(\mathfrak{m})$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{h})$ tel $U(\mathfrak{h})/\Psi(\mathfrak{m}) \cong U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m} \cong \mathbb{k}$ (1er théorème d'isomorphisme avec $\Psi^{-1} \circ \pi : U(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\cong} U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}$)
- $I = \mathfrak{g}' U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}'$ et $J = \Psi(I) = \mathfrak{h}' U(\mathfrak{h}) = U(\mathfrak{h})\mathfrak{h}'$

$\mathfrak{m} = \langle \sigma(\mathfrak{g}) \rangle$, $\mathfrak{m}' = \Psi(\mathfrak{m})$, $I = \langle \sigma(\mathfrak{g}') \rangle$ et $J = \Psi(I)$

Lemme

Il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $I/I\mathfrak{m}$ et $J/J\mathfrak{m}'$.

Démonstration.

L'application $\mathbb{k}$-linéaire $\pi \circ \Psi|_I : I \xrightarrow{\cong} J \xrightarrow{\pi} J/J\mathfrak{m}'$ est de noyau $\ker(\pi \circ \Psi|_I)$ égal à

$$\{a \in I \mid \Psi|_I(a) \in J\Psi(\mathfrak{m})\} = \Psi^{-1}(J\Psi(\mathfrak{m})) = I\mathfrak{m}$$

On conclut par le premier théorème d'isomorphisme pour les espaces vectoriels. L'isomorphisme linéaire ainsi obtenu respecte les crochets de Lie induits par les commutateurs. $\square$

On a donc un isomorphisme d'algèbres de Lie entre les algèbres de Lie de dérivations

$$\Psi^* : \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}')$$

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Proposition

Soit $\mathfrak{k}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ et I l'idéal de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{k}$. Alors, pour tout idéal bilatère $\mathfrak{m}$ de $U(\mathfrak{g})$, maximal, contenant I et tel que $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m} \cong \mathbb{k}$, il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{k}$ et $I/I\mathfrak{m}$.

Démonstration.

1er cas : $\mathfrak{m} = \langle \sigma(\mathfrak{g}) \rangle$. Notons $\{g_1, \ldots, g_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$ étendant une base $\{g_1, \ldots, g_m\}$ de $\mathfrak{k}$. Par double inclusion on obtient

$$I = \mathfrak{k}U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{s \geqslant 1} \mathbb{k} g_{i_1} \cdots g_{i_s} \text{ où } 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_s \text{ et } i_1 \leqslant m.$$

$\supseteq$ est clair car $g_{i_1} \in \mathfrak{k}$, et pour $\subseteq$ on a pour tout $F \in I$ que

$$F = \sum_{i=1}^{N} k_i u_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} g_j u_i = \sum_{j=1}^{m} g_j \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ij} u_i.$$

De plus la somme est directe par le théorème PBW. $\square$

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

De même on obtient $I\mathfrak{m} = \bigoplus_{s\geqslant 2} \mathbb{k} g_{i_1}\cdots g_{i_s}$ où $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_s$ et $i_1 \leqslant m$. L'inclusion $\supseteq$ est clair car $g_{i_1}\cdots g_{i_s}$ s'écrit $g_{i_1} g_{i_2}\cdots g_{i_s}$ avec $g_{i_1} \in \mathfrak{k}$ et $g_{i_2}\cdots g_{i_s} \in \mathfrak{m}$. Pour $\subseteq$ on a pour tout $F \in I\mathfrak{m}$ que

$$F = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s\geqslant 1} \lambda_s g_{i_1}\cdots g_{i_s} \sum_{t\geqslant 1} \lambda'_t g'_{j_1}\cdots g'_{j_t}$$

$$= \sum \lambda g_{i_1}\cdots g_{i_s} g'_{j_1}\cdots g'_{j_t} = \sum \lambda \underbrace{g_{i_1}}_{\in\mathfrak{k}} \underbrace{g_{i_2}\cdots g_{i_s} g'_{j_1}\cdots g'_{j_t}}_{\text{longueur } s+t-1}$$

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

De même on obtient $I\mathfrak{m} = \bigoplus_{s\geqslant 2} \Bbbk g_{i_1}\cdots g_{i_s}$ où $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_s$ et $i_1 \leqslant m$. L'inclusion $\supseteq$ est clair car $g_{i_1}\cdots g_{i_s}$ s'écrit $g_{i_1} g_{i_2}\cdots g_{i_s}$ avec $g_{i_1} \in \mathfrak{k}$ et $g_{i_2}\cdots g_{i_s} \in \mathfrak{m}$. Pour $\subseteq$ on a pour tout $F \in I\mathfrak{m}$ que

$$
\begin{aligned}
F = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s\geqslant 1} \lambda_s g_{i_1}\cdots g_{i_s} \sum_{t\geqslant 1} \lambda'_t g'_{j_1}\cdots g'_{j_t} \\
&= \sum \lambda g_{i_1}\cdots g_{i_s} g'_{j_1}\cdots g'_{j_t} = \sum \lambda \underbrace{g_{i_1}}_{\in\mathfrak{k}} \underbrace{g_{i_2}\cdots g_{i_s} g'_{j_1}\cdots g'_{j_t}}_{\text{longueur } s+t-1}
\end{aligned}
$$

<u>Fait :</u> Tout monôme en les vecteurs de bases d'une algèbre de Lie de longueur $L \geqslant 1$ s'exprime comme une somme de monômes ordonnés de longueurs $\geqslant 1$

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

De même on obtient $I\mathfrak{m} = \bigoplus_{s \geqslant 2} \mathbb{k} g_{i_1} \cdots g_{i_s}$ où $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_s$ et $i_1 \leqslant m$. L'inclusion $\supseteq$ est clair car $g_{i_1} \cdots g_{i_s}$ s'écrit $g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_s}$ avec $g_{i_1} \in \mathfrak{k}$ et $g_{i_2} \cdots g_{i_s} \in \mathfrak{m}$. Pour $\subseteq$ on a pour tout $F \in I\mathfrak{m}$ que

$$
\begin{aligned}
F = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{s \geqslant 1} \lambda_s g_{i_1} \cdots g_{i_s} \sum_{t \geqslant 1} \lambda'_t g'_{j_1} \cdots g'_{j_t} \\
&= \sum \lambda g_{i_1} \cdots g_{i_s} g'_{j_1} \cdots g'_{j_t} = \sum \lambda \underbrace{g_{i_1}}_{\in \mathfrak{k}} \underbrace{g_{i_2} \cdots g_{i_s} g'_{j_1} \cdots g'_{j_t}}_{\text{longueur } s+t-1}
\end{aligned}
$$

Fait : Tout monôme en les vecteurs de bases d'une algèbre de Lie de longueur $L \geqslant 1$ s'exprime comme une somme de monômes ordonnés de longueurs $\geqslant 1$ (récurrence sur L et $g_i g_j = g_j g_i + \underbrace{[g_i, g_j]}_{\in \mathfrak{g}}$).

On a le résultat puisque $\mathfrak{k}$ est abélienne.

$\square$

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

On a $I = \bigoplus_{s\geqslant 1} \Bbbk g_{i_1}\cdots g_{i_s}$ avec $g_{i_1} \in \mathfrak{k}$ et $I\mathfrak{m} = \bigoplus_{s\geqslant 2} \Bbbk g_{i_1}\cdots g_{i_s}$ donc $I/I\mathfrak{m} \cong \mathfrak{k}$ en tant qu'espace vectoriel,

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

On a $I = \bigoplus_{s \geqslant 1} \Bbbk g_{i_1} \cdots g_{i_s}$ avec $g_{i_1} \in \mathfrak{k}$ et $I\mathfrak{m} = \bigoplus_{s \geqslant 2} \Bbbk g_{i_1} \cdots g_{i_s}$ donc $I/I\mathfrak{m} \cong \mathfrak{k}$ en tant qu'espace vectoriel, donc en tant qu'algèbres de Lie abéliennes en considérant le crochet

$$[x + I\mathfrak{m}, y + I\mathfrak{m}] = xy - yx + I\mathfrak{m} = I\mathfrak{m}$$

sur $I\mathfrak{m}$ (trivial car $I^2 \subseteq I\mathfrak{m}$).

<u>Cas général :</u> soit $\alpha : U(\mathfrak{g}) \to \Bbbk$ un morphisme d'algèbres surjectif de noyau $\mathfrak{m}$.

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

On a $I = \bigoplus_{s \geqslant 1} \Bbbk g_{i_1} \cdots g_{i_s}$ avec $g_{i_1} \in \mathfrak{k}$ et $I\mathfrak{m} = \bigoplus_{s \geqslant 2} \Bbbk g_{i_1} \cdots g_{i_s}$ donc $I/I\mathfrak{m} \cong \mathfrak{k}$ en tant qu'espace vectoriel, donc en tant qu'algèbres de Lie abéliennes en considérant le crochet

$$[x + I\mathfrak{m}, y + I\mathfrak{m}] = xy - yx + I\mathfrak{m} = I\mathfrak{m}$$

sur $I\mathfrak{m}$ (trivial car $I^2 \subseteq I\mathfrak{m}$).

Cas général : soit $\alpha : U(\mathfrak{g}) \to \Bbbk$ un morphisme d'algèbres surjectif de noyau $\mathfrak{m}$. Par propriété universelle on obtient un automorphisme d'algèbre de $U(\mathfrak{g})$ en posant $\phi(x) = x - \alpha(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ ($x \mapsto x + \alpha(x)$ fournit un inverse).

On a $\phi(\langle \mathfrak{g} \rangle) = \mathfrak{m} = \ker \alpha$. En effet, pour $g \in \mathfrak{g}$ on a

$$\alpha\big(\phi(g)\big) = \alpha(g - \alpha(g)) = \alpha(g) - \alpha(g) = 0$$

donc $\phi(\langle \mathfrak{g} \rangle) \subseteq \mathfrak{m}$ et on a égalité par maximalité de $\phi(\langle \mathfrak{g} \rangle)$. $\square$

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

On a donc $\phi(\langle\mathfrak{g}\rangle) = \mathfrak{m}$.

De plus ϕ induit l'identité sur $\mathfrak{k}$ puisque $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{m} = \ker \alpha$,

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

On a donc $\phi(\langle \mathfrak{g} \rangle) = \mathfrak{m}$.
De plus ϕ induit l'identité sur $\mathfrak{k}$ puisque $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{m} = \ker \alpha$, et donc ϕ induit un isomorphisme d'espace vectoriel de I dans I puisque $I = \langle \mathfrak{k} \rangle = \mathfrak{k}U(\mathfrak{g})$.
Par passage au quotient, puis application du 1er théorème d'isomorphisme, ϕ induit un isomorphisme vectoriel $I/I\langle \mathfrak{g} \rangle \to I/I\mathfrak{m}$.
C'est en fait un isomorphisme d'algèbres de Lie puisque $\phi|_I$ l'est.
Finalement on a un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{k} \to I/I\langle \mathfrak{g} \rangle \to I/I\mathfrak{m}$$

□

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

On a donc $\phi(\langle\mathfrak{g}\rangle) = \mathfrak{m}$.

De plus ϕ induit l'identité sur $\mathfrak{k}$ puisque $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{m} = \ker\alpha$, et donc ϕ induit un isomorphisme d'espace vectoriel de I dans I puisque $I = \langle\mathfrak{k}\rangle = \mathfrak{k}U(\mathfrak{g})$.

Par passage au quotient, puis application du 1er théorème d'isomorphisme, ϕ induit un isomorphisme vectoriel $I/I\langle\mathfrak{g}\rangle \to I/I\mathfrak{m}$.

C'est en fait un isomorphisme d'algèbres de Lie puisque $\phi|_I$ l'est.

Finalement on a un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{k} \to I/I\langle\mathfrak{g}\rangle \to I/I\mathfrak{m}$$

□

Dans notre situation $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}'$ sont abéliens et on peut appliquer la proposition. On obtient donc la 2ième ligne du diagramme :

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \xrightarrow{\Psi^*} \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') \xleftarrow{\cong} \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}')$$

L'isomorphisme $\mathfrak{g}' \cong I/I\mathfrak{m}$

Démonstration.

On a donc $\phi(\langle \mathfrak{g} \rangle) = \mathfrak{m}$.

De plus ϕ induit l'identité sur $\mathfrak{k}$ puisque $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{m} = \ker \alpha$, et donc ϕ induit un isomorphisme d'espace vectoriel de I dans I puisque $I = \langle \mathfrak{k} \rangle = \mathfrak{k} U(\mathfrak{g})$.

Par passage au quotient, puis application du 1er théorème d'isomorphisme, ϕ induit un isomorphisme vectoriel $I/I\langle \mathfrak{g} \rangle \to I/I\mathfrak{m}$.

C'est en fait un isomorphisme d'algèbres de Lie puisque $\phi|_I$ l'est.

Finalement on a un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{k} \to I/I\langle \mathfrak{g} \rangle \to I/I\mathfrak{m}$$

□

Dans notre situation $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}'$ sont abéliens et on peut appliquer la proposition. On obtient donc la 2ième ligne du diagramme :

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \xrightarrow{\Psi^*} \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') \xleftarrow{\cong} \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}')$$

puisque $I \subseteq \mathfrak{m} \implies J = \Psi(I) \subseteq \Psi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}'$.

Le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

Le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}
$$

- L'injection canonique $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres de Lie en munissant $U(\mathfrak{g})$ du crochet de Lie des commutateurs.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

- L'injection canonique $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres de Lie en munissant $U(\mathfrak{g})$ du crochet de Lie des commutateurs.
- ρ et ρ' sont les morphismes d'algèbres de Lie induits par les dérivations intérieures $g \mapsto [g, -]$ (bien définis puisque $I\mathfrak{m}$ et $J\mathfrak{m}'$ sont des idéaux).

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

- L'injection canonique $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres de Lie en munissant $U(\mathfrak{g})$ du crochet de Lie des commutateurs.
- ρ et ρ' sont les morphismes d'algèbres de Lie induits par les dérivations intérieures $g \mapsto [g, -]$ (bien définis puisque $I\mathfrak{m}$ et $J\mathfrak{m}'$ sont des idéaux).
- Le carré central est commutatif (écrire toutes les flèches en détails et ça marche)

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

- L'injection canonique $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres de Lie en munissant $U(\mathfrak{g})$ du crochet de Lie des commutateurs.
- ρ et ρ' sont les morphismes d'algèbres de Lie induits par les dérivations intérieures $g \mapsto [g, -]$ (bien définis puisque $I\mathfrak{m}$ et $J\mathfrak{m}'$ sont des idéaux).
- Le carré central est commutatif (écrire toutes les flèches en détails et ça marche)
- On note d et δ les morphismes d'algèbres de Lie obtenus par composition

Produit semi-direct d'algèbres de Lie

Soient $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$ des algèbres de Lie et d un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}_0)$. En posant

$$\left[(g_0, g_1), (g_0', g_1')\right] = \left([g_0, g_0'] + d(g_1)(g_0') - d(g_1')(g_0), [g_1, g_1']\right)$$

pour tout $g_0, g_0' \in \mathfrak{g}_0$ et $g_1, g_1' \in \mathfrak{g}_1$, on définit un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1$ et l'on note cette algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 \rtimes_d \mathfrak{g}_1$.

Lemme

Supposons le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathfrak{h}_1 \\ \Big\downarrow d & & \Big\downarrow \delta \\ \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}_0) & \xrightarrow{\varphi_0^*} & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}_0) \end{array}$$

où $\varphi_i : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{h}_i$ est un isomorphisme.

Alors $\mathfrak{g}_0 \rtimes_d \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}_0 \rtimes_\delta \mathfrak{h}_1$ via $(g_0, g_1) \mapsto (\varphi_0(g_0), \varphi_1(g_1))$.

Démonstration.

Par calcul direct, long mais sans problème. □

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$

Si $\dim \mathfrak{g}' = 2$ notons $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{k}z$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{h}_1 = \mathbb{k}t$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$

Si $\dim \mathfrak{g}' = 2$ notons $\mathfrak{g}_1 = \Bbbk z$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{h}_1 = \Bbbk t$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\ \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Comme $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}')$ est un anneau de polynôme en une indéterminée on a $\overline{\Psi}(z + \mathfrak{g}') = a(t + \mathfrak{h}') + b$ avec $a, b \in \Bbbk$ et $a \neq 0$.

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$

Si $\dim \mathfrak{g}' = 2$ notons $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{k}z$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{h}_1 = \mathbb{k}t$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\ \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Comme $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}')$ est un anneau de polynôme en une indéterminée on a $\overline{\Psi}(z + \mathfrak{g}') = a(t + \mathfrak{h}') + b$ avec $a, b \in \mathbb{k}$ et $a \neq 0$. On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "z \mapsto at"] \arrow[d, "d"] & \mathfrak{h}_1 \arrow[d, "\delta"] \\ \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\widetilde{\Psi}"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \end{tikzcd}$$

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$

Si $\dim \mathfrak{g}' = 2$ notons $\mathfrak{g}_1 = \Bbbk z$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{h}_1 = \Bbbk t$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Comme $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}')$ est un anneau de polynôme en une indéterminée on a $\overline{\Psi}(z + \mathfrak{g}') = a(t + \mathfrak{h}') + b$ avec $a, b \in \Bbbk$ et $a \neq 0$. On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_1 \arrow[r, "z \mapsto at"] \arrow[d, "d"] & \mathfrak{h}_1 \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\widetilde{\Psi}"] & \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{h}')
\end{tikzcd}$$

Diagramme commutatif car le grand diagramme l'est et car $\rho'(a\sigma(t+\mathfrak{h}')+b) = \rho'(a\sigma(t+\mathfrak{h}'))$ puisque ρ' agit par l'action adjointe.

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$

Si $\dim \mathfrak{g}' = 2$ notons $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{k}z$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{h}_1 = \mathbb{k}t$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Comme $U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}')$ est un anneau de polynôme en une indéterminée on a $\overline{\Psi}(z + \mathfrak{g}') = a(t + \mathfrak{h}') + b$ avec $a, b \in \mathbb{k}$ et $a \neq 0$. On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_1 \arrow[r, "z \mapsto at"] \arrow[d, "d"] & \mathfrak{h}_1 \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\widetilde{\Psi}"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}')
\end{tikzcd}$$

Diagramme commutatif car le grand diagramme l'est et car $\rho'(a\sigma(t+\mathfrak{h}')+b) = \rho'(a\sigma(t+\mathfrak{h}'))$ puisque ρ' agit par l'action adjointe.

Par la proposition on a un isomorphisme $\mathfrak{g}' \rtimes_d \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}' \rtimes_\delta \mathfrak{h}_1$.

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$: on a $\mathfrak{g}' \rtimes_d \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}' \rtimes_\delta \mathfrak{h}_1$

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$: on a $\mathfrak{g}' \rtimes_d \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}' \rtimes_\delta \mathfrak{h}_1$

Lemme

Soit $\mathfrak{g}_0$ un idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telles que il existe une sous algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ supplémentaire de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes \mathfrak{g}_1$ (produit semi-direct interne).

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$: on a $\mathfrak{g}' \rtimes_d \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}' \rtimes_\delta \mathfrak{h}_1$

Lemme

Soit $\mathfrak{g}_0$ un idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telles que il existe une sous algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ supplémentaire de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes \mathfrak{g}_1$ (produit semi-direct interne).

Démonstration.

Un isomorphisme est $(g_0, g_1) \mapsto g_0 + g_1$. $\square$

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$: on a $\mathfrak{g}' \rtimes_d \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}' \rtimes_\delta \mathfrak{h}_1$

Lemme

Soit $\mathfrak{g}_0$ un idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telles que il existe une sous algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ supplémentaire de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes \mathfrak{g}_1$ (produit semi-direct interne).

Démonstration.

Un isomorphisme est $(g_0, g_1) \mapsto g_0 + g_1$. $\square$

Lemme

Un produit semi-direct interne $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes \mathfrak{g}_1$ est isomorphe au produit semi direct externe $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes_d \mathfrak{g}_1$ où $d : \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{Der}_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}_0$ est induite par l'action adjointe dans $\mathfrak{g}$.

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$: on a $\mathfrak{g}' \rtimes_d \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}' \rtimes_\delta \mathfrak{h}_1$

Lemme

Soit $\mathfrak{g}_0$ un idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telles que il existe une sous algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ supplémentaire de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes \mathfrak{g}_1$ (produit semi-direct interne).

Démonstration.

Un isomorphisme est $(g_0, g_1) \mapsto g_0 + g_1$. □

Lemme

Un produit semi-direct interne $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes \mathfrak{g}_1$ est isomorphe au produit semi direct externe $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes_d \mathfrak{g}_1$ où $d : \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}\mathfrak{g}_0$ est induite par l'action adjointe dans $\mathfrak{g}$.

Démonstration.

Classique. □

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 2$: on a $\mathfrak{g}' \rtimes_d \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}' \rtimes_\delta \mathfrak{h}_1$

Lemme

Soit $\mathfrak{g}_0$ un idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telles que il existe une sous algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ supplémentaire de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes \mathfrak{g}_1$ (produit semi-direct interne).

Démonstration.

Un isomorphisme est $(g_0, g_1) \mapsto g_0 + g_1$. □

Lemme

Un produit semi-direct interne $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes \mathfrak{g}_1$ est isomorphe au produit semi direct externe $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \rtimes_d \mathfrak{g}_1$ où $d : \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}\mathfrak{g}_0$ est induite par l'action adjointe dans $\mathfrak{g}$.

Démonstration.

Classique. □

On applique les lemmes à $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ pour avoir que

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}' \rtimes \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}' \rtimes_d \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}' \rtimes_\delta \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}' \rtimes \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}$$

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 1$

Il y a deux classes d'isomorphismes d'algèbres de Lie de dim 3 :

(b) $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}\{x, y, z\}$ avec $[x, y] = z$ et $[x, z] = [y, z] = 0$,

(c) $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}\{x, y, z\}$ avec $[x, y] = y$ et $[x, z] = [y, z] = 0$.

(b) est nilpotente et (c) ne l'est n'est pas. Pour $\dim \mathfrak{g}' = 1$ on a

$$\mathfrak{g} \text{ est nilpotente} \iff \mathfrak{g}' \subset Z(\mathfrak{g}) \iff \rho \text{ est trivial}$$

Pour la dernière équivalence : ρ est induit par les commutateurs.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Cas $\dim \mathfrak{g}' = 1$

Il y a deux classes d'isomorphismes d'algèbres de Lie de dim 3 :

(b) $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}\{x, y, z\}$ avec $[x, y] = z$ et $[x, z] = [y, z] = 0$,

(c) $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}\{x, y, z\}$ avec $[x, y] = y$ et $[x, z] = [y, z] = 0$.

(b) est nilpotente et (c) ne l'est n'est pas. Pour $\dim \mathfrak{g}' = 1$ on a

$$\mathfrak{g} \text{ est nilpotente} \iff \mathfrak{g}' \subset Z(\mathfrak{g}) \iff \rho \text{ est trivial}$$

Pour la dernière équivalence : ρ est induit par les commutateurs.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \arrow[r, hook, "\sigma"] \arrow[d, "d"] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') \arrow[r, "\overline{\Psi}"] \arrow[d, "\rho"] & U(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}') \arrow[d, "\rho'"] & \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}\mathfrak{m}) \arrow[r, "\Psi^*"] & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathrm{J}/\mathrm{J}\mathfrak{m}') & \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{h}') \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Soit $\dim \mathfrak{g}' = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} \text{ nilpotente} \iff \rho \text{ trivial} &\iff \rho' = \Psi^* \circ \rho \circ \overline{\Psi}^{-1} \text{ trivial} \\
&\iff \mathfrak{h} \text{ nilpotente}
\end{aligned}$$