Invariants quantiques sans tressage

A. Bruguières[1]
partiellement collaboration avec A. Virelizier[2]

[1]Montpellier II [2]Berkeley

La Rochelle, 2006

Plan

1. Introduction
   - Motivation
   - Trois pistes
2. Monades de Hopf (travail en cours avec A. Virelizier)
3. Enlacements, twists et catégories en turbans

Plan

1. Introduction
   - Motivation
   - Trois pistes
2. Monades de Hopf (travail en cours avec A. Virelizier)
3. Enlacements, twists et catégories en turbans

Les invariants quantiques en dimension 3

$$\begin{array}{ccll}
\text{Groupes Quantiques aux racines de l'unité} & \longrightarrow & \text{Invariants quantiques de 3-variétés} & \\
\downarrow & & & \\
\text{catégorie modulaire} & \xrightarrow{\text{Turaev}} & \text{RT} & \text{chiral (par chirurgie)} \\
\downarrow & & & \\
\text{catégorie sphérique} & \xrightarrow{\text{B. - W.}} & \text{TV} & \text{achiral (par triangulations)}
\end{array}$$

catégorie modulaire : catégorie **en rubans** (tressée avec bons duaux) et **semisimple**
catégorie sphérique : catégorie avec bons duaux (mais pas de tressage) et **semisimple**

Par ailleurs dans un contexte **non semisimple** :

Algèbre de Hopf de dim $< \infty$ $\longrightarrow$ Invariants de 3-variétés 'non semisimples'

Hennings, Kauffmann-Radford :
invariant "de type RT" (= cadre tressé)

Kuperberg :
invariant "de type TV" (= cadre non tressé)

Deux questions naturelles

1. Peut-on unifier les séries 'RT' et 'TV' ?

Le centre (ou double) de Kassel-Turaev est le reflet catégorique du double de Drinfeld

$\mathcal{S}$ catégorie monoïdale $\longmapsto Z(\mathcal{S})$ catégorie monoïdale tressée

Dans le cadre semisimple...

Théorème (Müger) : si $\mathcal{S}$ est sphérique, $Z(\mathcal{S})$ est modulaire

Conjecture (Turaev et al.) $TV_{\mathcal{S}} = RT_{Z\mathcal{S}}$.

2. Peut-on trouver un cadre qui unifie les invariants semisimples et les invariants non-semisimples ?
Dans le cas RT (tressé) : Lyubashenko

L'approche unificatrice de Lyubashenko

Lyubashenko evisage le cadre suivant :
une catégorie

- en rubans
- admettant un coend L
- (cadre non linéaire)

Une catégorie en rubans $\mathcal{C}$ est

- une catégorie monoïdale, produit tensoriel $\otimes$, objet unité I ;
- munie d'un tressage $c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$
- avec des 'bons duaux' (structure souveraine)

Théorème de Shum : La catégorie des enchevêtrements Tang (tangles) en rubans est la catégorie en rubans universelle.

Corollaire : une catégorie en rubans $\mathcal{C}$ définit des invariants d'enchevêtrements en rubans colorés par les objets de $\mathcal{C}$.

Un coend de $\mathcal{C}$ est la donnée de

- un objet L de $\mathcal{C}$;
- pour tout X dans $\mathcal{C}$, $i_X : X^* \otimes X \to L$
- i_X est dinaturel en X ;
- (L, i) est universel pour ces propriétés

Remarques

$$i_X : X^* \otimes X \to L \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \delta_X : X \to X \otimes L$$

et i_X dinaturel : $\iff$ δ_X naturel ;
le coend, s'il existe, est unique à iso unique près (et c'est une notion 'monoïdale')

Notation de McLane : $L = \int^{\mathcal{C}} X^* \otimes X$

Mirifique coend !

Le coend L est un objet mirifique : il a une structure très riche.

- L est une cogèbre et tout objet X est un L-comodule via δ_X
- L est une algèbre de Hopf dans $\mathcal{C}$ (Majid)

Alors comme ça :
groupe quantique $\longrightarrow$ catégorie $\longrightarrow$ groupe quantique dans la catégorie
tout ça pour ça ? ! ?
En fait il se passe quelque chose de non-trivial

Exemple : H algèbre de Hopf de dim finie co-quasitriangulaire $\longrightarrow \mathcal{C} =$ comod H catégorie tressée.
Le coend L de $\mathcal{C}$, en tant que cogèbre : H muni de la coaction (co)adjointe.
Mais **le produit de L n'est pas celui de H :**
La R-matrice intervient dans l'expression du produit de L.

Mirifique coend - suite

- L est une algèbre de Hopf dans $\mathcal{C}$
- tout enchevêtrement de type 'n-poignée' définit une n-forme sur L
- tout 'élément' de L ($\alpha : I \to L$) définit un invariant d'entrelacs en rubans $\langle \quad \rangle_\alpha$
- un 'élément de Kirby' (Virelizier) définit un invariant de 3-variétés RT_α.

Au tableau pour les explications !

Mirifique coend - suite

- L est une algèbre de Hopf dans $\mathcal{C}$
- tout enchevêtrement de type 'n-poignée' définit une n-forme sur L
- tout 'élément' de L ($\alpha : I \to L$) définit un invariant d'entrelacs en rubans $\langle \quad \rangle_\alpha$
- un 'élément de Kirby' (Virelizier) définit un invariant de 3-variétés RT_α.

Au tableau pour les explications !

Plan

1. Introduction
   - Motivation
   - Trois pistes
2. Monades de Hopf (travail en cours avec A. Virelizier)
3. Enlacements, twists et catégories en turbans

Résumons-nous

Pour construire des invariants, on a besoin :

1) d'un bon cadre catégorique ;
2) d'un objet L de nature algébrique, de type 'groupe quantique', qui vit dans ce cadre catégorique ;
3) d'un encodage des 'n-poignées' par des n-formes sur L.

Peut-on exprimer l'encodage des n-poignées par une formule universelle, indépendamment du choix d'une catégorie ou d'un objet L particulier ?

Oui : par les Diagrammes de Hopf, cf. *Hopf Diagrams and Quantum Invariants,* B. - V. AGT 2006.

Par quoi peut-on remplacer la notion d'algèbre de Hopf dans un cadre non tressé ?

Par la notion de **monade de Hopf** : $\longrightarrow$ partie 2

A-t-on réellement besoin du tressage pour décrire de manière catégorique les entrelacs et les enchevêtrements qui servent dans la construction des invariants à la RT ?

Non : la notion d'**enlacement** suffit (au prix d'une axiomatique moins facile à manipuler que celle des catégories en rubans), cf *Double Braidings, Twists and Tangle Invariants,* B. JPAA 2005 : $\longrightarrow$ partie 3

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie 'nue'. La catégorie EndoFun $\mathcal{C}$ est monoïdale pour $\circ$
Une **monade** est un monoïde dans EndoFun($\mathcal{C}$), soit :

- un foncteur $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
- deux morphismes (transformations naturelles) $\mu : T^2 \to T$ et $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to T$
- axiomes d'associativité et d'unité.

On définit la notion de T-module (aussi appelée T-algèbre). Soit $T - \mathcal{C}$ la catégorie des T-modules.

On a une paire de foncteurs adjoints :

$$(F_T : \mathcal{C} \to T - \mathcal{C}, U_T : T - \mathcal{C} \to \mathcal{C})$$

Bimonades

Supposons $\mathcal{C}$ monoïdale.
Une monade T est une **bimonade** si $T-\mathcal{C}$ est monoïdal (et U_T monoïdal strict).
Théorème. T est une bimonade $\iff$ T est muni de

$$\Delta_{X,Y} : T(X \otimes Y) \to T(X) \otimes T(Y)$$

$$\varepsilon : I \to T(I)$$

avec axiomes de coassociativité, coünité, et compatibilité au produit μ.

Petit miracle : la compatibilité s'écrit sans tressage

Notion introduite par Moerdijk sous le nom 'Hopf monad'...

Monades de Hopf

Supposons que $\mathcal{C}$ a des bons duaux (pour simplifier).

Une monade de Hopf est une bimonade T telle que $T - \mathcal{C}$ a des duaux à droite et à gauche.

Théorème. T est 'de Hopf' si et seulement si T a un antipode à droite et à gauche.

Axiomes des antipodes

Un antipode à gauche *left antipode for T* est un morphisme fonctoriel

$$s^l_X : T((TX)^*) \to X^*$$

vérifiant

$$(\eta_X \otimes 1_{X^*})\,\mathrm{coev}_X\,\varepsilon = (\mu_X \otimes s^l_X)\Delta(T(X),(T(X))^*)T(\mathrm{coev}_{T(X)})$$

$$\varepsilon T(\mathrm{ev}_X)T((\eta_X)^* \otimes 1_X) = \mathrm{ev}_{T(X)}(s^l_{T(X)}T(^\vee\mu_X) \otimes 1_{T(X)})\Delta((T(X))^*, X)$$

$$s^l_X \mu_{T(X)^*} = s^l_X T(s^l_{T(X)}) T^2(\mu_X)^*$$

Remarque a posteriori : le dernier axiome est conséquence des deux autres, comme dans le cas des algèbres de Hopf, mais la preuve est plus difficile...

Monades de Hopf, suite

Si H est une algèbre de Hopf dans une catégorie tressée $\mathcal{C}$, le foncteur $X \mapsto X \otimes H$ est une monade de Hopf.

La plupart des notions associées aux algèbres de Hopf de dimension finie s'étendent aux monades de Hopf :
- modules de Hopf et théorème de structure des modules de Hopf (Sweedler)
- monades de Hopf quasitriangulaires, élément de Drinfeld, twist, structure balancée, monade de Hopf en rubans...
- monades de Hopf involutives : $s^l = s^r$
- monades de Hopf semisimples, séparables

Théorème de Maschke : T semisimple $\iff$ T separable $\iff$ T admet une intégrale λ tq $\varepsilon\lambda = 1_I$.

Intégrale : $\lambda : I \to T(I)$ tq $\mu_I T(\lambda) = \lambda\varepsilon$.

L'exemple central

Soit C catégorie monoïdale avec bons duaux. On suppose

$$Z(X) := \int^{Y \in \mathcal{C}} Y^* \otimes X \otimes Y$$

existe pour tour X.
Notons que $Z(I)$ est le coend L et, si $\mathcal{C}$ est tressée, $Z(X) = X \otimes L$.

Théorème. Z est une monade de Hopf en rubans involutive, et $Z - \mathcal{C} = Z(\mathcal{C})$

Corollaire. Si $\mathcal{C}$ est sphérique, $Z(\mathcal{C})$ est prémodulaire.

L'inversibilité de la S-matrice résiste encore un peu.

Ce qu'on espère

Démontrer le théorème de Müger (dans un cadre non-linéaire, et non-semisimple) par des techniques classiques de théorie des algèbres de Hopf.
A terme, pouvoir unifier les invariants de type RT, TV dans le cadre le plus général.

Turbans

Un turban est un enchevêtrement en rubans tel que deux composantes distinctes se croisent un nombre pair de fois. Exemples : une tresse pure, un stringlink, une 'n-poignée', un entrelacs.

Proposition - remarque : la catégorie des turbans est la sous-catégorie monoïdale de la catégorie Tang engendrée par le twist et la dualité (évaluations et coévaluations).

Enlacement

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale. Un enlacement (twine) est un iso fonctoriel

$$D_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} X \otimes Y$$

vérifiant :

$$D_{I,I} = 1_I$$

$$(D_{X,Y} \otimes 1_Z) D_{X \otimes Y, Z} = (1_X \otimes D_{Y,Z}) D_{X, Y \otimes Z}$$

$$\begin{aligned} & (D_{X \otimes Y, Z} \otimes 1_T)(1_X \otimes D^{-1}_{Y,Z} \otimes 1_T)(1_X \otimes D_{Y, Z \otimes T}) \\ = \quad & (1_X \otimes D_{Y, Z \otimes T})(1_X \otimes D^{-1}_{Y,Z} \otimes 1_T)(D_{X \otimes Y, Z} \otimes 1_T) \end{aligned}$$