
Cohomologie et Homologie de Poisson : dualité?

Anne Pichereau
(Université de Poitiers)

Les différentielles de Kähler

(\mathcal{A}, \cdot) \mathbb{F} -algèbre associative, commutative.

\mathcal{A} -module des formes différentielles de Kähler :

$$\Omega^1(\mathcal{A}) := \{g \, df \mid f, g \in \mathcal{A}\},$$

modulo les relations :

- (1) $d(f \cdot g) = f \, dg + g \, df$ (Leibniz),
- (2) $d(f + g) = df + dg$,
- (3) $dc = 0$, $c \in \mathbb{F}$.

k -différentielles de Kähler :

$$\Omega^k(\mathcal{A}) := \bigwedge^k \Omega^1(\mathcal{A}).$$

$$\Omega^\bullet(\mathcal{A}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(\mathcal{A}).$$

Opérations sur les différentielles de Kähler:

(1) Le produit extérieur :

$$\wedge : \Omega^k(\mathcal{A}) \times \Omega^l(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega^{k+l}(\mathcal{A})$$

Associatif, gradué commutatif

(2) La différentielle de **de Rham** :

$d : \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(\mathcal{A})$ définie par :

$$d(f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) := df_0 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$$

d dérivation graduée de $(\Omega^\bullet(\mathcal{A}), \wedge)$:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta,$$

pour $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{A})$, $\beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{A})$.

Les multi-dérivations

(\mathcal{A}, \cdot) \mathbb{F} -algèbre associative, commutative.

Dérivations de (\mathcal{A}, \cdot) : $\mathfrak{X}^1(\mathcal{A}) \subset \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$

$$\mathcal{V}[fg] = f\mathcal{V}[g] + g\mathcal{V}[f] \quad (\text{Leibniz})$$

k -dérivations de (\mathcal{A}, \cdot) : $\mathfrak{X}^k(\mathcal{A}) \subset \text{Hom}(\wedge^k \mathcal{A}, \mathcal{A})$

$$P[fg, f_2, \dots, f_k] = \\ fP[g, f_2, \dots, f_k] + gP[f, f_2, \dots, f_k]$$

$$\mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}^k(\mathcal{A}).$$

Opérations sur les multi-dérivations:

(1) Le produit extérieur :

$$\begin{array}{ccc} \wedge : \mathfrak{X}^p(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}^q(\mathcal{A}) & \rightarrow & \mathfrak{X}^{p+q}(\mathcal{A}) \\ (P, Q) & \mapsto & P \wedge Q \end{array}$$

$$(P \wedge Q)[f_1, \dots, f_{p+q}] :=$$

$$\sum_{\sigma \in S_{p,q}} \epsilon(\sigma) P[f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(p)}] Q[f_{\sigma(p+1)}, \dots, f_{\sigma(p+q)}],$$

Associatif, gradué commutatif :

$$P \wedge Q = (-1)^{pq} Q \wedge P.$$

(2) Le crochet de Schouten :

$$[\cdot, \cdot]_S : \mathfrak{X}^p(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}^q(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{X}^{p+q-1}(\mathcal{A})$$

$$(P, Q) \mapsto [P, Q]_S$$

$$[P, Q]_S [f_1, \dots, f_{p+q-1}] =$$

$$\sum_{\sigma \in S_{q,p-1}} \epsilon(\sigma) P \left[Q[f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(q)}], f_{\sigma(q+1)}, \dots, f_{\sigma(q+p-1)} \right]$$

$$-(-1)^{(p-1)(q-1)} \left(P \longleftrightarrow Q \right)$$

Crochet de Lie gradué sur $\mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A})$.

- gradué (modulo un décalage des degrés),
- anti-commutativité graduée,
- Jacobi gradué.

Produit intérieur

Action naturelle de $\mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A})$ sur $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$.

Pour $P \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$,

$$\iota_P : \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega^{\bullet-p}(\mathcal{A}),$$

application \mathcal{A} -linéaire, donnée par :

$$\iota_P(df_1 \wedge \cdots \wedge df_n) :=$$

$$\sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \epsilon(\sigma) P[f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(p)}] \\ df_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge df_{\sigma(n)}$$

Formule de Cartan

Pour $P, Q \in \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A})$, on a :

$$[\iota_P, d], \iota_Q = \iota_{[P, Q]_S}$$

où le crochet $[\cdot, \cdot]$ désigne le commutateur d'applications linéaires graduées de $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$.

Algèbre de Poisson

Dans la suite, (\mathcal{A}, \cdot) est munie d'une structure de Poisson notée π ou $\{\cdot, \cdot\}$.

Structure de Poisson sur \mathcal{A} :

$$\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{A}) \text{ telle que } [\pi, \pi]_S = 0.$$

On a donc :

$$\{\cdot, \cdot\} = \pi \in \text{Hom}(\wedge^2 \mathcal{A}, \mathcal{A})$$

avec :

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\} \quad \text{Leibniz,}$$

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \quad \text{Jacobi,}$$

pour $f, g, h \in \mathcal{A}$.

Cohomologie de Poisson

$(\mathcal{A}, \cdot, \pi = \{\cdot, \cdot\})$ algèbre de Poisson.

Cochaines : les multidérivations de \mathcal{A} .

Opérateur de cobord de Poisson :

$$\begin{aligned} \delta_\pi = -[\cdot, \pi]_S & : \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{X}^{\bullet+1}(\mathcal{A}) \\ Q & \mapsto \delta_\pi(Q) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi:

$$\begin{aligned} \delta_\pi(Q)[f_0, \dots, f_q] & := \\ & \sum_{i=0}^q (-1)^i \{f_i, Q[f_0, \dots, \hat{f}_i, \dots, f_q]\} \\ & + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} Q[\{f_i, f_j\}, f_0, \dots, \hat{f}_i, \dots, \hat{f}_j, \dots, f_q]. \end{aligned}$$

Les espaces de cohomologie de Poisson :

$$H^k(\mathcal{A}) := \frac{\ker \delta_\pi^k}{\text{Im } \delta_\pi^{k-1}}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Homologie de Poisson

$(\mathcal{A}, \pi = \{\cdot, \cdot\})$ algèbre de Poisson.

Chaines : les différentielles de Kähler.

Opérateur de bord de Poisson :

$$\partial^\pi = [\iota_\pi, d] : \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{A})$$

$$\partial^\pi = [\iota_\pi, d] = \iota_\pi \circ d - d \circ \iota_\pi,$$

ce qui s'écrit aussi:

$$\begin{aligned} \partial^\pi(f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = & \\ & \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \{f_0, f_i\} df_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{df_i} \wedge \cdots \wedge df_k \\ & + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f_0 d\{f_i, f_j\} \wedge df_1 \wedge \\ & \cdots \wedge \widehat{df_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{df_j} \wedge \cdots \wedge df_k. \end{aligned}$$

Les espaces d'homologie de Poisson :

$$H_k(\mathcal{A}) := \frac{\ker \partial_k^\pi}{\text{Im } \partial_{k+1}^\pi}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Dualité?

Cadre géométrique - Cadre algébrique.

(1) $\mathcal{A} = C^\infty(M, \mathbf{R})$, M variété réelle, lisse, orientée de dimension n .

\Rightarrow existence d'une forme volume λ ,
i.e. $\lambda \in \Omega^n(\mathcal{A})$ et $\lambda \neq 0$, sur M .

(2) $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x_1, \dots, x_n]$ et \mathbf{F} alg. clos.

$\Rightarrow \lambda = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, forme volume.

La forme volume λ permet de définir une famille d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \star & : \mathfrak{X}^q(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega^{n-q}(\mathcal{A}) \\ Q & \mapsto \iota_Q \lambda \end{aligned}$$

On définit alors la divergence :

$$\text{Div} : \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{X}^{\bullet-1}(\mathcal{A}),$$

qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\star} & \Omega^{n-\bullet}(\mathcal{A}) \\ \text{Div} \downarrow \cdots & & \downarrow d \\ \mathfrak{X}^{\bullet-1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\star} & \Omega^{n-\bullet+1}(\mathcal{A}) \end{array}$$

Définition : La dérivation (champ de vecteurs) $\text{Div}(\pi)$ est appelée le **champ modulaire**.

Variétés unimodulaires

(1) $\text{Div}(\pi)$ est un 1-cocycle de Poisson.

(2) Pour une autre forme volume : $\mu = f \lambda$, avec $f \in \mathcal{A}$. (Si $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x_1, \dots, x_n]$, \mathbf{F} alg. clos, f est une constante). Alors,

$$\text{Div}_\mu(\pi) = \text{Div}_\lambda(\pi) + \frac{1}{f} \delta_\pi(f).$$

Dans les cadres considérés, on a donc :

$$\boxed{\text{Div}_\mu(\pi) = \text{Div}_\lambda(\pi) + \delta_\pi(\ln f)},$$

\Rightarrow La classe de $\text{Div}_\lambda(\pi)$ ne dépend pas de λ .

On l'appelle la **classe modulaire**.

On dit que (\mathcal{A}, π) est **unimodulaire**, si la classe modulaire est nulle.

(3) Si (\mathcal{A}, π) est unimodulaire, il existe une forme volume λ avec

$$\text{Div}_\lambda(\pi) = 0.$$

Dualité pour les variétés unimodulaires

Les égalités

$$\begin{aligned} \star \operatorname{Div}(\pi) &= d \star \pi && \text{(déf. de Div),} \\ \partial^\pi \lambda &= -d \star \pi && \text{(déf. de } \partial^\pi \text{),} \\ \left[[i_\pi, d], i_Q \right] &= i_{[\pi, Q]_S} && \text{(Cartan)} \end{aligned}$$

donnent :

$$(-1)^q \partial^\pi (\star Q) + \star \delta_\pi(Q) + \star (\operatorname{Div}(\pi) \wedge Q) = 0.$$

Donc, si \mathcal{A} est unimodulaire, $\operatorname{Div}(\pi) = 0$ et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\star} & \Omega^{n-\bullet}(\mathcal{A}) \\ \delta_\pi \downarrow & & \downarrow \partial^\pi \\ \mathfrak{X}^{\bullet+1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\star} & \Omega^{n-1-\bullet}(\mathcal{A}) \end{array}$$

et donc :

$$H^k(\mathcal{A}) \simeq H_{n-k}(\mathcal{A}), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Exemples

(1) (M^{2r}, ω) , variété symplectique.

$\lambda = \omega^r$ forme volume.

π structure de Poisson canonique.

$$\boxed{\text{Div}_\lambda(\pi) = 0}$$

\Rightarrow Dualité.

(2) $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x, y]$. $\lambda = dx \wedge dy$.

Les structures de Poisson :

$$\pi = \psi \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}, \quad \psi \in \mathbf{F}[x, y].$$

$$\boxed{\text{Div}_\lambda(\pi) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}},$$

les 1-cobords :

$$\delta_\pi(f) = \psi \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

\Rightarrow Classe modulaire jamais nulle!

Pas de dualité :

si ψ est homogène, sans facteur carré, les espaces de cohomologie de Poisson sont :

$$H^0(\mathbf{F}[x, y]) \simeq \mathbf{F},$$

$$H^1(\mathbf{F}[x, y]) \simeq \mathbf{F}[x, y]_d \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \oplus \mathbf{F} \operatorname{Div}_\lambda(\pi),$$

$$H^2(\mathbf{F}[x, y]) \simeq \mathbf{F}[x, y]_d \psi \oplus \frac{\mathbf{F}[x, y]}{\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle},$$

où $\mathbf{F}[x, y]_d = \{\text{polynômes homogènes de degré } d = d^\circ(\psi) - 2\}$.

Les espaces d'homologie de Poisson sont :

$$H_0(\mathbf{F}[x, y]) \simeq \mathbf{F}[x, y] / \langle \psi \rangle,$$

$$H_1(\mathbf{F}[x, y]) \simeq \langle x, y \rangle / \langle \psi \rangle,$$

$$H_2(\mathbf{F}[x, y]) \simeq \{0\}.$$

(3) $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x, y, z]$, $\lambda = dx \wedge dy \wedge dz$.

Pour une structure de Poisson

$$\pi = f_1 \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + f_2 \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + f_3 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\boxed{\text{Div}(\pi) = \text{Rot}(f_1, f_2, f_3)}.$$

$\varphi \in \mathbf{F}[x, y, z] \Rightarrow$ structure de Poisson :

$$\pi_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\boxed{\text{Div}(\pi_\varphi) = \text{Rot}(\nabla \varphi) = 0}.$$

\Rightarrow Dualité pour $(\mathbf{F}[x, y, z], \pi_\varphi)$.

$\chi, \varphi \in \mathbf{F}[x, y, z] \Rightarrow$ autre structure de Poisson :

$$\pi_{\chi, \varphi} = \chi \pi_\varphi,$$

$$\boxed{\text{Div}(\pi_{\chi, \varphi}) = \text{Rot}(\chi \nabla \varphi) = \nabla \chi \times \nabla \varphi}.$$

1-cobords de Poisson :

$$\delta(f) = \chi \nabla f \times \nabla \varphi.$$

\Rightarrow Classe modulaire non nulle.

(4) $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x, y, z]/\langle \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathbf{F}[x, y, z]$,
munie de π_φ .

Pas de forme volume.

Pas de dualité : si φ est homogène, et

$$\mathcal{A}_{sing} := \frac{\mathbf{F}[x, y, z]}{\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\rangle} = \langle u_0, u_1, \dots, u_{\mu-1} \rangle_{\mathbf{F}},$$

les espaces de cohomologie de Poisson sont :

$$H^0(\mathcal{A}) \simeq \mathbf{F},$$

$$H^1(\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{d^\circ(u_j) = d^\circ(\varphi) - 3} \mathbf{F} u_j \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$H^2(\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{d^\circ(u_j) = d^\circ(\varphi) - 3} \mathbf{F} u_j \pi_\varphi,$$

$$H^3(\mathcal{A}) \simeq \{0\}.$$

Les espaces d'homologie de Poisson :

$$H_0(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}_{sing},$$

$$H_1(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}_{sing}/\mathbf{F},$$

$$H_2(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}_{sing},$$

$$H_3(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}_{sing}.$$

Cohomologie de Poisson de $(\mathbb{F}[x, y, z], \pi_\varphi)$

$\varphi \in \mathbb{F}[x, y, z]$ est homogène, à singularité isolée.

On prend $u_0 = 1, u_1, \dots, u_{\mu-1} \in \mathcal{A}$, dont les images dans \mathcal{A}_{sing} forment une \mathbb{F} -base.

$$H^0(\mathcal{A}) = \text{Cas}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{F} \varphi^i,$$

$$H^1(\mathcal{A}) \simeq \begin{cases} \{0\} & \text{si } d^\circ(\varphi) \neq 3, \\ \text{Cas}(\mathcal{A}) \vec{e} & \text{si } d^\circ(\varphi) = 3, \end{cases}$$

où $\vec{e} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ est le champ d'Euler,

$$H^3(\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{sing} \varphi^i.$$

$$H^2(\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{\substack{j=1 \\ d^\circ(u_j) \neq d^\circ(\varphi) - 3}}^{\mu-1} \text{Cas}(\mathcal{A}) \nabla u_j$$

$$\oplus \bigoplus_{\substack{j=0 \\ d^\circ(u_j) = d^\circ(\varphi) - 3}}^{\mu-1} \text{Cas}(\mathcal{A}) u_j \nabla \varphi$$

$$\oplus \bigoplus_{\substack{j=1 \\ d^\circ(u_j) = d^\circ(\varphi) - 3}}^{\mu-1} \mathbf{F} \nabla u_j.$$