Cohomologie de Hochschild des produits croisés I (d'après Siegel-Witherspoon, Witherspoon)

Patrick Le Meur

19 janvier 2009

Soit k un corps, R une k-algèbre et G un groupe fini agissant sur R. Cette séance est consacrée à l'étude de l'algèbre de cohomologie de Hochshild $\mathsf{HH}^*(R \rtimes G)$ (pour le cup-produit) du produit croisé $R \rtimes G$.

Dans le cas où le groupe G agit trivialement sur R, l'algèbre $R \rtimes G$ est l'algèbre RG du groupe G et un résultat classique d'algèbre homologique affirme que $\mathsf{HH}^*(RG) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathsf{H}^*(H_i)$ comme k-espaces vectoriels, où $g_1, \ldots, g_r \in G$ forment un système complet de représentants des classes de conjugaison de G, où le groupe H_i est le centralisateur de g_i et $\mathsf{H}^*(H_i)$ est la cohomologie du groupe (à coefficients dans R). En 1997, Cibils conjectura ([1]) une description du cup-produit dans $\mathsf{HH}^*(RG)$ en termes de la décomposition ci-dessus et des cup-produits dans les $\mathsf{HH}^*(H_i)$.

Cette description fut d'abord démontrée en 1997 par Cibils et Solotar dans le cas de l'algèbre RG d'un groupe abélien ([2]), puis en 1999 par Siegel et Witherspoon pour une algèbre de groupe RG quelconque ([3]). Enfin, en 2004, Witherspoon généralisa le résultat au cas d'un produit croisé $R \rtimes G$ quelconque ([4]) : elle démontra une décomposition de $\mathsf{HH}^*(R \rtimes G)$ selon les classes de conjugaison de G et décrivit le cup-produit dans $\mathsf{HH}^*(R \rtimes G)$ en termes de cette décomposition.

Le but de l'exposé est de présenter cette description du cup-produit dans $\mathsf{HH}^*(R \rtimes G)$ et d'étudier sa démonstration proposée par Witherspoon en essayant d'en comprendre les raisons profondes. Si le temps le permet, nous essaierons de voir comment le crochet de Gerstenhaber dans $\mathsf{HH}^*(R \rtimes G)$ peut s'exprimer d'une manière similaire.

Références

[1] C. Cibils. Tensor product of Hopf bimodules over a group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(5) :1315–1321, 1997.

[2] C. Cibils and A. Solotar. Hochschild cohomology algebra of abelian groups. *Arch. Math*, 68 :17–21, 1997.

[3] S. F. Siegel and S. J. Witherspoon. The Hochschild cohomology ring of a group algebra. *Proc. London Math. Soc.*, 79(3) :131–157, 1999.

[4] S. J. Witherspoon. Products in Hochschild cohomology and Grothendieck rings of group crossed-products. *Adv. Math.*, 185 :136–158, 2004.