Exposé au GTIA: Sur des invariants d'équivalence dérivée d'agèbres de dimension finie en caractéristique p, d'après des articles de A. Zimmermann, et de C. Bessenrodt, T. Holm et A. Zimmermann

Rachel Taillefer
Université Jean Monnet à St Etienne

17 novembre 2008

Introduction

On s'intéresse aux invariants d'équivalence dérivée d'algèbres de dimension finie :

- ✯ Soit on s'intéresse à certains invariants eux-mêmes, auquel cas il est intéressant de savoir si deux algèbres sont dans la même classe d'équivalence dérivée (surtout si ces invariants sont difficiles à calculer !). Parmi les exemples classiques pour une algèbre A se trouvent
  - ◇ le centre $Z(A)$,
  - ◇ le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ et donc le nombre de classes d'isomorphisme de A-modules simples,
  - ◇ l'homologie et l'anneau de cohomologie de Hochschild (ainsi que sa structure d'algèbre de Gerstenhaber),
  - ◇ l'homologie cyclique,
  - ◇ le fait que A soit de dimension globale finie,
  - ◇ le fait que A soit symétrique,
  - ◇ le fait que A soit autoinjective,
  - ◇ le déterminant de la matrice de Cartan C_A...
- ✯ Soit on cherche à distinguer des classes d'équivalence dérivée, auquel cas il est utile de connaître le plus d'invariants possibles, de préférence "calculables".

Dans cet exposé, nous nous intéressons à ce deuxième aspect : A. Zimmermann a démontré que certains idéaux du centre introduits par Külshammer (dits idéaux de Reynolds généralisés) sont en fait des invariants d'équivalence dérivée. Ces invariants ne sont définis que pour des algèbres symétriques sur un corps parfait de caractéristique positive.

Il a ensuite défini avec C. Bessenrodt et T. Holm des invariants pour des algèbres de dimension finie non symétriques sur un corps parfait de caractéristique positive.

Ces invariants pour les algèbres symétriques ont été utilisés pour distinguer certaines classes d'algèbres à équivalence dérivée près (T. Holm, A. Skowroński, G. Zhou, A. Zimmermann).

Plan

I Catégories dérivées

Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k. Soit A-mod la catégorie des A-modules à gauche de type fini.

On considère la catégorie des complexes de A-modules et des morphismes de complexes, notée $\mathrm{Kom}(A\text{-mod})$.

Définition I.1. *Soient $C = (C_n, d_n)_n$ et $C' = (C'_n, d'_n)_n$ deux complexes de A-modules. Deux morphismes de complexes $f = (f_n)_n$ et $g = (g_n)_n$ de C dans C' sont dits **homotopes** s'il existe des morphismes de A-modules $s_n : C_n \to C'_{n+1}$ tels que $f - g = d's + sd$.*

On définit la catégorie $\mathbb{K}^b(A\text{-mod})$ dont les objets sont les complexes de A-modules dont l'homologie est nulle des deux côtés à partir d'un certain rang et dont les morphismes sont les morphismes de complexes modulo la relation d'homotopie.

Définition I.2. *Un morphisme de complexes $f = (f_n)_n$ de C dans C' est un **quasi-isomorphisme** s'il induit un isomorphisme $\mathrm{H}(f) : \mathrm{H}(C) \to \mathrm{H}(C')$ en cohomologie.*

Définition I.3. *La catégorie dérivée bornée, notée $\mathcal{D}^b(A)$, est alors obtenue en localisant $\mathbb{K}^b(A\text{-mod})$ par rapport aux quasi-isomorphismes, c'est-à-dire que les objets sont ceux de $\mathbb{K}^b(A\text{-mod})$ et les morphismes sont les classes d'équivalence de "fractions" $X \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{f} Z$ où X, Y, Z sont des objets de $\mathbb{K}^b(A\text{-mod})$, f est un morphisme de $\mathbb{K}^b(A\text{-mod})$ et s est un quasi-isomorphisme de $\mathbb{K}^b(A\text{-mod})$, modulo la relation d'équivalence suivante : $X \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{f} Z \sim X \xleftarrow{s'} Y' \xrightarrow{f'} Z$ si et seulement s'il existe une fraction $X \xleftarrow{s''} Y \xrightarrow{f''} Z$ et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Y'' \arrow[l, "s''"'] \arrow[r, "f''"] \arrow[u] \arrow[d] & Z \\ & Y' \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

dans $\mathbb{K}^b(A\text{-mod})$.

La catégorie $\mathcal{D}^b(A)$ est une catégorie *triangulée* (c'est-à-dire qu'il existe une autoéquivalence Σ de $\mathcal{D}^b(A)$ et des triangles dits *distingués* ou *exacts* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{v} \Sigma(X)$ vérifiant des axiomes). Il existe alors un foncteur $Q_A : \mathbb{K}^b(A\text{-mod}) \to \mathcal{D}^b(A)$ qui envoie tout quasi-isomorphisme sur un isomorphisme. De plus, tout autre foncteur ayant cette propriété peut-être factorisé par Q_A.

Remarque I.4. Soit maintenant M un A-module (objet de A-mod). Alors M peut-être considéré comme un objet de $\mathcal{D}^b(A)$ en considérant le complexe dont la composante homogène de degré 0 est M et dont les autres composantes homogènes sont 0. Ceci définit un foncteur qui est pleinement fidèle, donc la catégorie A-mod peut-être considérée comme une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}^b(A)$. On a donc, si M est N sont des A-modules, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$.

II Foncteurs dérivés

Soit A et B deux algèbres de dimension finie sur un corps k.

Soit F un foncteur $A\text{-mod} \to B\text{-mod}$. Il induit naturellement un foncteur sur les catégories de complexes à homotopie près, noté encore $F : \mathbb{K}^b(A\text{-mod}) \to \mathbb{K}^b(B\text{-mod})$.

Si le foncteur F est exact, alors il induit un foncteur $F : \mathcal{D}^b(A) \to \mathcal{D}^b(B)$, qui est exact (envoie les triangles exacts sur des triangles exacts).

Définition-Proposition II.1. **(i)** *Supposons que le foncteur F soit exact à droite. La catégorie A-mod a assez de projectifs. Alors pour tout $X \in \mathcal{D}^b(A)$, il existe $\mathbf{p}(X) \in \mathcal{D}^b(A)$ dont toutes les composantes homogènes sont projectives et qui soit isomorphe à X dans $\mathcal{D}^b(A)$. On appelle $\mathbf{p}(X)$ une* ***résolution projective*** *de X. Le* ***foncteur dérivé*** *de F, noté $\mathbb{L}F : \mathcal{D}^b(A) \to \mathcal{D}^b(B)$ est défini par $\mathbb{L}F(X) = F(\mathbf{p}(X))$.*

(ii) *On a une définition similaire pour le foncteur dérivé d'un foncteur exact à gauche en utilisant des injectifs.*

(iii) *Si le foncteur F est exact, alors ses foncteurs dérivés à gauche et à droite sont égaux à F.*

III Equivalences dérivées

Soient A et B deux algèbres de dimension finie sur un corps k (des conditions plus faibles suffisent).

Définition III.1. *On dit que A et B sont dans la même classe d'équivalence dérivée si les catégories $\mathcal{D}^b(A)$ et $\mathcal{D}^b(B)$ sont équivalentes comme catégories triangulées (c'est-à-dire que l'équivalence associe des triangles exacts aux triangles exacts).*

Théorème III.2 (Rickard). *Soient A et B deux algèbres de dimension finie sur un corps k. Alors les catégories $\mathcal{D}^b(A)$ et $\mathcal{D}^b(B)$ sont équivalentes comme catégories triangulées si et seulement s'il existe un objet X dans $\mathcal{D}^b(B \otimes_k A^{op})$ tel que $X \otimes_A^{\mathbb{L}} - : \mathcal{D}^b(A) \to \mathcal{D}^b(B)$ soit une équivalence ($X \otimes_A^{\mathbb{L}} -$ désigne le foncteur dérivé à gauche de $X \otimes_A -$).*
Dans ce cas, X est appelé ***complexe basculant bilatère****.*

Démonstration. [R2] ou [KZ, Theorem 6.2.1] □

Proposition III.3 (Rickard). *Si A et B sont dans la même classe d'équivalence dérivée, alors A^{op} et B^{op} sont dans la même classe d'équivalence dérivée.*

Démonstration. [R] ou [KZ, Claim 6.2.5] □

Proposition III.4. *Soient A et B deux algèbres de dimension finie sur un corps k dans la même classe d'équivalence dérivée et soit $X \in \mathcal{D}^b(B \otimes_k A^{op})$ un complexe basculant bilatère. Alors il existe $\tilde{X} \in \mathcal{D}^b(B \otimes_k A^{op})$ tel que $\tilde{X} \cong X$ dans $\mathcal{D}^b(B \otimes A^{op})$ et toutes les composantes homogènes de $\tilde{X}$ sont projectives comme A-modules à droite et comme B-modules à gauche.*

Remarque III.5. Nous pouvons remplacer X par $\tilde{X}$ dans le théorème de Rickard **III.2**, ce que nous ferons par la suite.

Alors le foncteur $X \otimes_A -$ est exact donc égal à son foncteur dérivé. L'équivalence ci-dessus est donc donnée par $X \otimes_A -$.

Le complexe $\mathrm{Hom}_B(X, B) \in \mathcal{D}^b(A \otimes_k B^{op})$ a ses composantes homogènes projectives comme A-modules à gauche et comme B-modules à droite et vérifie :

✯ $X \otimes_A \mathrm{Hom}_B(X, B) \cong B$ dans $\mathcal{D}^b(B \otimes_k B^{op})$

✯ $\mathrm{Hom}_B(X, B) \otimes_B X \cong A$ dans $\mathcal{D}^b(A \otimes_k A^{op})$

✯ $\mathrm{Hom}_B(X, B) \otimes_B -$ et $X \otimes_A -$ sont des équivalences quasi-inverses.
[cf. [KZ, Proposition 6.3.5].]

Notons que par unicité de l'adjoint de $\mathrm{Hom}_B(X, B) \otimes_B -$ on a $X \otimes_A - \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_B(X, B), -)$ et par unicité de l'adjoint de $- \otimes_B X$ on a $- \otimes_A \mathrm{Hom}_B(X, B) \cong \mathrm{Hom}_A(X, -)$.

On a également $B \cong \mathrm{End}_A(X)^{op}$ comme algèbres.

Théorème III.6 (Rickard). *Soient A et B deux algèbres de dimension finie sur un corps k et soit $X \in \mathcal{D}^b(B \otimes_k A^{op})$ un complexe basculant bilatère dont les composantes homogènes sont projectives comme B-modules à gauche et A-modules à droite. Alors les algèbres enveloppantes $A \otimes_k A^{op}$ et $B \otimes_k B^{op}$ sont dans la même classe d'équivalence dérivée, et l'équivalence est donnée par $X \otimes_A - \otimes_A \mathrm{Hom}_B(X, B) : \mathcal{D}^b(A \otimes_k A^{op}) \to \mathcal{D}^b(B \otimes_k B^{op})$. Cette équivalence associe B à A.*

Démonstration. [R2] ou [KZ, Proposition 6.2.2] □

Dans la suite on notera $A^e = A \otimes_k A^{op}$ l'algèbre enveloppante.

IV Algèbres symétriques

Définition IV.1. *Une algèbre A de dimension finie sur un corps k est dite **symétrique** s'il existe une forme linéaire $\theta : A \to k$ telle que $\theta(ab) = \theta(ba)$ pour tous $a, b \in A$ et dont le noyau ne contient aucun idéal à gauche et aucun idéal à droite.*

L'algèbre A est symétrique si et seulement s'il existe une forme bilinéaire symétrique associative ($\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$ pour tous $a, b, c \in A$) et non-dégénérée sur A ; la correspondance est donnée par $\langle a, b\rangle = \theta(ab)$ et $\theta(\lambda) = \langle \lambda, 1\rangle$.

Proposition IV.2. *Soit A une algèbre de dimension finie. Alors A est symétrique si et seulement s'il existe un isomorphisme de A-A-bimodules $A \cong \mathrm{Hom}_k(A, k)$.*

Démonstration. Si A est symétrique, l'isomorphisme est donné par $a \mapsto \langle a, -\rangle$. Si $\psi : A \to A^*$ est un isomorphisme de A-A-bimodules, on pose $\langle a, b\rangle = \psi(a)(b)$. □

Proposition IV.3. *Soient A et B deux algèbres symétriques de dimension finie. Les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(-, A)$, $\mathrm{Hom}_k(-, k)$ et $\mathrm{Hom}_B(-, B)$ sont isomorphes comme foncteurs de la catégorie des B-A-bimodules dans la catégorie des A-B-bimodules.*

Démonstration. Pour tout A-module à droite M on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(M, A) &\cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_k(A, k)) \qquad (A \text{ est symétrique donc } A \cong A^*) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A A, k) \qquad (\text{adjonction}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_k(M, k) \qquad (\text{isomorphisme naturel}). \end{aligned}$$

Explicitement, si $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ on lui associe $\theta_A \circ \alpha \in \mathrm{Hom}_k(M, k)$. De même, pour tout B-module à gauche M on a $\mathrm{Hom}_B(M, B) \cong \mathrm{Hom}_k(M, k)$. Par naturalité, on en déduit que ces foncteurs sont isomorphes sur la catégorie des B-A-bimodules. □

V Idéaux de Reynolds généralisés : Külshammer

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Soit A une algèbre de dimension finie sur k, de centre $Z(A)$. Notons que $Z(A) \cong \mathrm{End}_{A^e}(A)$.

Définition V.1. *On pose*

$$\begin{aligned} K(A) &:= \mathrm{vect}_k \{ab - ba; a, b \in A\}, \\ T_n(A) &:= \left\{a \in A; a^{p^n} \in K(A)\right\} \quad \textit{pour } n \in \mathbb{N} \\ P_n(A) &:= \mathrm{vect}_k \left\{a^{p^n}; a \in A\right\} + K(A) \end{aligned}$$

Brauer a démontré que $(a+b)^{p^n} \equiv a^{p^n} + b^{p^n} \pmod{K(A)}$ donc $T_n(A)$ est un sous-espace vectoriel de A. C'est même un $Z(A)$-module, ainsi que $A/T_n(A)$.

Définition V.2. *Soient V et W deux k-espaces vectoriels. Soit τ un automorphisme de k. Un morphisme de groupes $\rho : V \to W$ est dit **τ-semilinéaire** si $\rho(\lambda v) = \tau(\lambda)\rho(v)$ pour tous $\lambda \in k$ et $v \in V$.*

On note $\tau_n : k \to k$ l'automorphisme (k parfait) de k défini par $\tau_n(\lambda) = \lambda^{p^n}$.

Définition V.3. *On note $\mathrm{Fr}^A : A/K(A) \to A/K(A)$ l'application $a + K(A) \mapsto a^p + K(A)$. Alors $(\mathrm{Fr}^A)^n$ est une application τ_n-semilinéaire, de noyau $T_n(A)/K(A)$ et d'image $P_n(A)/K(A)$.*

On suppose maintenant que A est symétrique, avec forme bilinéaire associée $\langle -, - \rangle$. On note $M^\perp$ l'orthogonal d'une partie M de A pour cette forme bilinéaire. On vérifie facilement que $K(A)^\perp = Z(A)$.

La forme bilinéaire $\langle -, - \rangle$ induit donc une forme bilinéaire $Z(A) \times A/K(A) \to k$, encore notée $\langle -, - \rangle$.

Théorème V.4 (Külshammer). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique application $\zeta_n : Z(A) \to Z(A)$, τ_{-n}-semilinéaire, de noyau $P_n(A)^\perp$ et d'image $T_n(A)^\perp$ telle que $\langle z, a^{p^n} \rangle = \langle \zeta_n(z), a \rangle^{p^n}$ pour tout $a \in A$ et $z \in Z(A)$. De plus, pour $n, m \in \mathbb{N}$ et $y, z \in Z(A)$ on a*

(i) $\zeta_n \circ \zeta_m = \zeta_{n+m}$

(ii) $\zeta_n(yz^{p^n}) = \zeta_n(y)z$.

On obtient une suite d'idéaux de $Z(A)$:

$$Z(A) = K(A)^\perp = T_0(A)^\perp \supseteq T_1(A)^\perp \supseteq T_2(A)^\perp \supseteq \cdots \supseteq T_n(A)^\perp \supseteq \cdots$$

appelés **idéaux de Reynolds généralisés.**

Remarque V.5. Les idéaux de Reynolds généralisés ne dépendent pas du choix de la forme bilinéaire symétrique sur A.

En effet, se donner une forme bilinéaire symétrique associative et non-dégénérée sur A revient à se donner un isomorphisme de A-A-bimodules entre A et A^*. Deux tels isomorphismes diffèrent donc par un élément de $\mathrm{Aut}_{A^e}(A)$ c'est-à-dire par un élément inversible t du centre de A (car $Z(A) \cong \mathrm{End}_{A^e}(A)$). Si ζ_n et ζ'_n sont les applications induites par ces deux formes bilinéaires, il existe donc $t \in Z(A)$ inversible tel que pour tout $z \in Z(A)$ on ait $\zeta_n(z) = \zeta'_n(zt^{-1})t$ et on en déduit que $\mathrm{Im}\, \zeta_n = \mathrm{Im}\, \zeta'_n$.

VI Invariance dérivée des idéaux de Reynolds généralisés : Zimmermann

A. Zimmermann a démontré le résultat suivant.

Théorème VI.1. *Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Soient A et B deux k-algèbres de dimension finie avec A symétrique. Si $\mathcal{D}^b(A) \cong \mathcal{D}^b(B)$ comme catégories triangulées, alors cette équivalence induit un isomorphisme $\varphi : Z(A) \to Z(B)$ entre les centres de A et de B tel que $\varphi(T_n(A)^\perp) = T_n(B)^\perp$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque. Ce théorème a bien un sens, c'est-à-dire que les idéaux de Reynolds généralisés existent bien, car en fait B est symétrique.

Théorème VI.2 (Zimmermann)**.** *Si A est symétrique et B est dans la même classe d'équivalence dérivée que A alors B est symétrique.*

Démonstration. [KZ, Proposition 9.2.7] ou [Z2].

Notons G l'équivalence de catégories $\mathcal{D}^b(A^e) \to \mathcal{D}^b(B^e)$ donnée par $X \otimes_A - \otimes_A Y$ où X est un complexe basculant bilatère dont les composantes homogènes sont projectives comme A-modules à droite et B-modules à gauche et $Y = \mathrm{Hom}_B(X, B)$. On sait que $G(A) \cong B$.

Puisque A est symétrique, il existe un isomorphisme $f : A \to A^*$ de A-A-bimodules. On a donc $G(f) : G(A) \to G(A^*)$ qui est un isomorphisme de B-B-bimodules. On sait que $G(A) \cong B$, il suffit donc de démontrer que $G(A^*) \cong B^*$ pour conclure. □

Plus généralement

Lemme VI.3. *Soit E un espace vectoriel sur k. Alors $\mathrm{Hom}_k(A, E)$ est un A-A-bimodule, et on a : $G(\mathrm{Hom}_k(A, E)) \cong \mathrm{Hom}_k(B, E)$. En particulier, $G(A^*) \cong B^*$.*

Démonstration. La structure de A-A-bimodule de $\mathrm{Hom}_k(A, E)$ est donnée par $(a \cdot \alpha \cdot b)(x) = \alpha(bxa)$ pour tout $x \in A$.

On rappelle que $X \otimes_A - \cong \mathrm{Hom}_A(Y, -)$ et $- \otimes_A Y \cong \mathrm{Hom}_A(X, -)$.

$$\begin{aligned} X \otimes_A \mathrm{Hom}_k(A, E) \otimes_A Y &\cong \mathrm{Hom}_A(Y, \mathrm{Hom}_k(A, E)) \otimes_A Y \\ &\cong \mathrm{Hom}_k(A \otimes_A Y, E) \otimes_A Y \qquad \text{(adjonction)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_k(Y, E) \otimes_A Y \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_k(Y, E)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_k(X \otimes_A Y, E) \qquad \text{(adjonction)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_k(B, E). \end{aligned}$$
□

Remarque VI.4. Si A est symétrique et B est dans la même classe d'équivalence dérivée que A alors on a une équivalence $\mathcal{D}^b(A^e) \to \mathcal{D}^b(B^e)$ qui est donnée par $X \otimes_A - \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X, A)$; en effet, elle est donnée par $X \otimes_A - \otimes_A \mathrm{Hom}_B(X, B)$ et on a $\mathrm{Hom}_B(X, B) \cong X^* \cong \mathrm{Hom}_A(X, A)$ comme A-B-bimodules puisque A et B sont symétriques.

On travaillera dans la suite avec $G = X \otimes_A - \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X, A)$.

Notons que si dans le lemme précédent on remplace Y par $\mathrm{Hom}_A(X, A)$, l'isomorphisme associe à $x \otimes_A \alpha \otimes_A x' \in X \otimes_A \mathrm{Hom}_k(A, E) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X, A)$, l'élément $y \otimes_A y' \mapsto \alpha(x'(y)y'(x))$ dans $\mathrm{Hom}_k(X \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X, A), E)$.

La suite de cette section sera consacrée au plan de la démonstration du théorème **VI.1**.

A Isomorphisme des centres

On a $Z(A) \cong \mathrm{End}_{A^e}(A) = \mathrm{End}_{\mathcal{D}^b(A^e)}(A) \overset{G}{\cong} \mathrm{End}_{\mathcal{D}^b(B^e)}(B) = \mathrm{End}_{B^e}(B) \cong Z(B)$. Notons φ cet isomorphisme induit par G.

B Morphismes de Frobenius

On rappelle que $\tau_n : k \to k$ désigne la n-me puissance de l'automorphisme de Frobenius : $\tau_n(\lambda) = \lambda^{p^n}$.

Notons $k^{(n)}$ le k-espace vectoriel dont la structure est induite par celle de k par restriction des scalaires via τ_n.

Alors on obtient un morphisme $\mathrm{Fr}^k_* : \mathrm{Hom}_k(A/KA, k) \to \mathrm{Hom}_k(A/KA, k^{(1)})$ par composition avec τ_1 (soit $\mathrm{Fr}^k_*(f) = \tau_1 \circ f$).

D'autre part, on a un morphisme $\mathrm{Fr}^A : A/KA \to A/KA$ défini par Külshammer, qui induit un morphisme $(\mathrm{Fr}^A)^* : \mathrm{Hom}_k(A/KA, k) \to \mathrm{Hom}_k(A/KA, k^{(1)})$ qui à f associe $f \circ \mathrm{Fr}^A : a + K(A) \mapsto f(a^p + K(A))$.

Notons que $A/KA \cong A \otimes_{A^e} A$, et que par cet isomorphisme $\mathrm{Fr}^A(a \otimes_{A^e} b) = (ab)^p \otimes_{A^e} 1$. On obtient donc un morphisme $(\mathrm{Fr}^A)^* : \mathrm{Hom}_k(A \otimes_{A^e} A, k) \to \mathrm{Hom}_k(A \otimes_{A^e} A, k^{(1)})$.

En utilisant les isomorphismes d'adjonction on obtient alors les morphismes suivant (notés de la même façon) :

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{Fr}^A)^* : \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^*) & \to & \mathrm{Hom}_{A^e}(A, \mathrm{Hom}_k(A, k^{(1)})) \\
f & \mapsto & [a \mapsto [b \mapsto f((ab)^p)(1) = f(1)((ab)^p)]] \\
\mathrm{Fr}^k_* : \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^*) & \to & \mathrm{Hom}_{A^e}(A, \mathrm{Hom}_k(A, k^{(1)})) \\
f & \mapsto & [a \mapsto [b \mapsto (f(a)(b))^p = (f(ab)(1))^p = (f(1)(ab))^p]].
\end{array}$$

C Interprétation de ζ_n^A

Soit ζ_n^A l'endomorphisme de $Z(A)$ défini par la relation $\langle \zeta_n^A(z), x\rangle^{p^n} = \langle z, x^{p^n}\rangle$ pour tout $x \in A$ et tout $z \in Z(A)$. De même pour B.

Pour démontrer son théorème, A. Zimmermann utilise le fait que $T_n(A)^\perp = \zeta_n^A(Z(A))$. Il s'agit donc de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\zeta_n^A(Z(A)) \cong \zeta_n^B(Z(B))$ par l'équivalence de catégories G. Il commence par donner une interprétation de ζ_n^A.

Lemme VI.5. *ζ_n^A est l'endomorphisme de $Z(A)$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
Z(A) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A) \arrow[r, "h_A"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^*) \arrow[d, "(\mathrm{Fr}^k_*)^n"] \\
& \mathrm{Hom}_{A^e}(A, \mathrm{Hom}_k(A, k^{(n)})) \\
Z(A) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A) \arrow[uu, "\zeta_n^A"] \arrow[r, "h_A"'] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^*) \arrow[u, "((\mathrm{Fr}^A)^*)^n"']
\end{tikzcd}$$

où $h_A(f)(a) = \langle f(a), -\rangle$.

Démonstration. Soit $z \in Z(A)$. Alors $(\mathrm{Fr}^k_*)^n(h_A(\zeta_n^A)(z)) = [a \mapsto [b \mapsto \langle \zeta_n^A(z)a, b\rangle^{p^n} = \langle \zeta_n^A(z), ab\rangle^{p^n}]]$ et $((\mathrm{Fr}^A)^*)^n(h_A(z)) = [a \mapsto [b \mapsto \langle z, (ab)^{p^n}\rangle]]$, donc la commutativité du diagramme est bien équivalente à la condition définissant $\zeta_n^A(z)$. □

Si on applique l'équivalence G à l'isomorphisme $A \to A^* : a \mapsto \langle a, -\rangle$ de A-A-bimodules, on obtient un isomorphisme de B-B-bimodules $B \to B^*$ qui définit donc une forme bilinéaire symétrique associative non-dégénérée sur B. On remplace la forme bilinéaire donnée sur B par celle-ci, ce qui ne change pas l'image de ζ_n^B qui nous intéresse, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{B^e}(B,B) \arrow[r, "h_B"] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^*) \\
\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A) \arrow[r, "h_A"] \arrow[u, "G"', "(\varphi)"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^*) \arrow[u, "G"'] \arrow[d, "(\mathrm{Fr}^k_*)^n"] \\
 & \mathrm{Hom}_{A^e}(A,\mathrm{Hom}_k(A,k^{(n)})) \\
\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A) \arrow[r, "h_A"'] \arrow[uu, "\zeta_n^A"] \arrow[d, "G"', "(\varphi)"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^*) \arrow[u, "((\mathrm{Fr}^A)^*)^n"'] \arrow[d, "G"] \\
\mathrm{Hom}_{B^e}(B,B) \arrow[r, "h_B"'] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^*)
\end{tikzcd}$$

dans lequel tous les morphismes horizontaux sont induits par les formes bilinéaires (sur A et sur B).

D Plan de la démonstration

Le lemme **VI.3** donne $G(\mathrm{Hom}_k(A,k^{(n)})) \cong \mathrm{Hom}_k(B,k^{(n)})$.
On démontre que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^*) \arrow[r, "\sim", "G"'] \arrow[d, "(\mathrm{Fr}^k_*)^n"] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^*) \arrow[d, "(\mathrm{Fr}^k_*)^n"] \\
\mathrm{Hom}_{A^e}(A,\mathrm{Hom}_k(A,k^{(n)})) \arrow[r, "\sim", "G"'] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,\mathrm{Hom}_k(B,k^{(n)}))
\end{tikzcd} \tag{1}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A^e}(A,\mathrm{Hom}_k(A,k^{(n)})) \arrow[r, "\sim", "G"'] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,\mathrm{Hom}_k(B,k^{(n)})) \\
\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^*) \arrow[r, "\sim", "G"'] \arrow[u, "((\mathrm{Fr}^A)^*)^n"] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^*) \arrow[u, "((\mathrm{Fr}^B)^*)^n"']
\end{tikzcd} \tag{2}$$

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{B^e}(B,B) \arrow[r, "h_B"] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^*) \arrow[ddr, "(\mathrm{Fr}^k_*)^n"] & \\
\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A) \arrow[r, "h_A"] \arrow[u, "G"', "(\varphi)"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^*) \arrow[u, "G"'] \arrow[d, "(\mathrm{Fr}^k_*)^n"] & \\
 & \mathrm{Hom}_{A^e}(A,\mathrm{Hom}_k(A,k^{(n)})) \arrow[r, "G", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,\mathrm{Hom}_k(B,k^{(n)})) \\
\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A) \arrow[r, "h_A"'] \arrow[uu, "\zeta_n^A"] \arrow[d, "G"', "(\varphi)"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^*) \arrow[u, "((\mathrm{Fr}^A)^*)^n"'] \arrow[d, "G"] & \\
\mathrm{Hom}_{B^e}(B,B) \arrow[r, "h_B"'] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^*) \arrow[uur, "((\mathrm{Fr}^B)^*)^n"'] &
\end{tikzcd}$$

et donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z(B) \cong \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B) \arrow[r, "h_B"] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^*) \arrow[d, "(\mathrm{Fr}^k_*)^n"] \\
 & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,\mathrm{Hom}_k(B,k^{(n)})) \\
Z(B) \cong \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B) \arrow[uu, "\varphi\circ\zeta_n^A\circ\varphi^{-1}"] \arrow[r, "h_B"'] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B,B^*) \arrow[u, "((\mathrm{Fr}^B)^*)^n"']
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $\varphi \circ \zeta_n^A \circ \varphi^{-1} = \zeta_n^B$ et donc les images de ζ_n^A et ζ_n^B sont isomorphes via l'isomorphisme φ entre les centres induit par G.

On a donc bien $(T_nA)^{\perp} = \mathrm{Im}\,\zeta_n^A \cong \mathrm{Im}\,\zeta_n^B = (T_nB)^{\perp}$, isomorphisme induit par l'isomorphisme φ entre les centres.

E Commutativité du premier carré (1)

Intuitivement : G agit sur les variables "A" et $(\mathrm{Fr}^k_*)^n$ agit sur les variables "k" donc il est clair que le diagramme commute.

F Commutativité du deuxième carré (2)

On traite le cas $n = 1$ (le cas général est semblable, ou obtenu par itération). On rappelle que $B \cong X \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X, A)$ et que l'isomorphisme $G(A^*) \cong B^* \cong \mathrm{Hom}_k(X \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X, A), k)$ est donné par $x \otimes_A g \otimes_A \alpha \mapsto [y \otimes_A \beta \mapsto g(\alpha(y)\beta(x))]$.

Nous aurons besoin de connaître le produit sur $X \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X, A) \cong \mathrm{End}_A(X)^{op}$ (isomorphe à B).

L'isomorphisme $X \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X, A) \cong \mathrm{End}_A(X)^{op}$ est donné par $x \otimes_A \alpha \mapsto x\alpha(-)$. Le transport de la composition sur $\mathrm{End}_A(X)^{op}$ donne le produit suivant :

$$(y \otimes_A \beta)(x \otimes_A \alpha) = x\alpha(y) \otimes_A \beta.$$

On a en particulier $(x \otimes_A \alpha)^p = x\alpha(x)^{p-1} \otimes_A \alpha$.

Soit maintenant $f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^*)$. Alors on a $G(f) = \mathrm{id}_X \otimes_A f \otimes_A \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(X,A)}$:

$$\begin{array}{ccccc}
X \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X,A) & \to & X \otimes_A A^* \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X,A) & \xrightarrow{\sim} & (X \otimes \mathrm{Hom}_A(X,A))^* \\
x \otimes_A \alpha & \mapsto & x \otimes_A f(1) \otimes_A \alpha & \mapsto & [y \otimes_A \beta \mapsto f(1)(\alpha(y)\beta(x))].
\end{array}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Fr}^B)^*(G(f))(x \otimes_A \alpha)(y \otimes_A \beta) &= G(f)(1)(((x \otimes_A \alpha)(y \otimes_A \beta))^p) \\
&= G(f)(1)(((y \otimes_A \beta)(x \otimes_A \alpha))^p) \\
&= G(f)(1)((x\alpha(y) \otimes_A \beta)^p) \\
&= G(f)(1)(x\alpha(y)(\beta(x)\alpha(y))^{p-1} \otimes_A \beta) \\
&= G(f)(1)((y(\beta(x)\alpha(y))^{p-1} \otimes_A \beta)(x \otimes_A \alpha)) \\
&= G(f)(x \otimes_A \alpha)(y(\beta(x)\alpha(y))^{p-1} \otimes_A \beta) \\
&= f(1)(\alpha(y(\beta(x)\alpha(y))^{p-1}\beta(x))) \\
&= f(1)((\alpha(y)\beta(x))^p) \\
&= ((\mathrm{Fr}^A)^*(f))(1)(\alpha(y)\beta(x)) \\
&= G((\mathrm{Fr}^A)^*(f))(x \otimes_A \alpha)(y \otimes_A \beta)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que le diagramme (2) commute.

VII Invariants d'algèbres non-symétriques : Bessenrodt-Holm-Zimmermann

Soit Λ une algèbre quelconque de dimension finie sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$.

[BHZ] ont défini des invariants d'équivalence dérivée pour Λ, qui sont les idéaux de Reynolds généralisés lorsque Λ est symétrique. Pour cela, ils sont passés par une algèbre symétrique associée à Λ.

A Extensions triviales

On rappelle que Λ^* est un Λ-Λ-bimodule pour l'action $(a\varphi b)(\lambda) = \varphi(b\lambda a)$ pour $a, b, \lambda \in \Lambda$ et $\varphi \in \Lambda^*$.

Définition VII.1. *L'extension triviale de Λ est l'algèbre $\mathbb{T}(\Lambda) = \Lambda \ltimes \Lambda^*$ dont le produit est défini par $(a, \varphi)(b, \psi) = (ab, a\psi + \varphi b)$.*

C'est une algèbre symétrique avec $\theta : \mathbb{T}(\Lambda) \to k$ défini par $\theta(a, \varphi) = \varphi(1)$, ce qui correspond à la forme bilinéaire symétrique $\langle (a, \varphi), (b, \psi) \rangle = \theta(ab, a\psi + \varphi b) = \psi(a) + \varphi(b)$.

Si V est un sous-espace vectoriel de Λ on note $\mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(V) = \{\varphi \in \Lambda^*; \varphi(V) = 0\}$.

Proposition VII.2. **(i)** $Z(\mathbb{T}(\Lambda)) = Z(\Lambda) \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(K(\Lambda))$

(ii) $K(\mathbb{T}(\Lambda)) = K(\Lambda) \ltimes [\Lambda, \Lambda^*]$

(iii) $T_n(\mathbb{T}(\Lambda)) = T_n(\Lambda) \ltimes \Lambda^*$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

Démonstration. **(i)** Soit $(a, \varphi) \in Z(\mathbb{T}(\Lambda))$. Alors on a $a \in Z(\Lambda)$. De plus, pour tout $b \in \Lambda$ et pour tout $\psi \in \Lambda^*$ on a $a\psi_\varphi b = b\varphi + \psi a$. Cette relation est équivalente à dire que pour tout $c \in \Lambda$ on a $\psi(ca) + \varphi(bc) = \varphi(cb) + \psi(ac)$ soit $\varphi(bc) = \varphi(cb)$ puisque a est central et donc $\varphi(K(\Lambda)) = 0$. La réciproque est similaire.

(ii) On a $(a, \varphi)^{p^n} = ((a, 0) + (0, \varphi))^{p^n} \equiv (a, 0)^{p^n} + (0, \varphi)^{p^n} \pmod{K(\mathbb{T}(\Lambda))} \equiv (a^{p^n}, 0) \pmod{K(\mathbb{T}(\Lambda))}$. En particulier, $(a, \varphi) \in T_n(\mathbb{T}(\Lambda)) \iff (a, \varphi)^{p^n} \in K(\mathbb{T}(\Lambda)) \iff a^{p^n} \in K(\Lambda) \iff a \in T_n(\Lambda)$.

(iii) On a $(a\varphi - \varphi a)(z) = \varphi(za) - \varphi(az) = \varphi(za - az) = \varphi(0) = 0$ pour tout $z \in Z(\Lambda)$ donc $[\Lambda, \Lambda^*] \subseteq \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(Z(\Lambda))$.

Réciproquement, soit $\varphi \in \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(Z(\Lambda))$. Puisque Λ est symétrique et $\varphi \in \Lambda^*$, il existe un élément $b \in \Lambda$ tel que $\varphi = \langle -, b \rangle$. Puisque φ s'annule sur $Z(\Lambda)$ on en déduit que $b \in (Z(\Lambda)^\perp) = K(\Lambda)$. Posons $b = uv - vu$. Alors, pour tout $x \in \Lambda$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \langle x, b \rangle = \langle x, uv - vu \rangle &= \langle x, uv \rangle - \langle x, vu \rangle \\ &= \langle x, uv \rangle - \langle vu, x \rangle \\ &= \langle xu, v \rangle - \langle v, ux \rangle \\ &= \langle xu - ux, v \rangle \\ &= (u\psi - \psi u)(x) \end{aligned}$$

si on pose $\psi = \langle -, v \rangle$. Donc $\varphi \in [\Lambda, \Lambda^*]$. □

Théorème VII.3. **(i)** $T_0(\mathbb{T}(\Lambda))^\perp = Z(\mathbb{T}(\Lambda)) = Z(\Lambda) \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(K(\Lambda))$

(ii) *Pour* $n \geqslant 1$, $T_n(\mathbb{T}(\Lambda))^\perp = 0 \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_n(\Lambda))$

(iii) *Pour* $n \geqslant 1$, $T_n(Z(\mathbb{T}(\Lambda)))^\perp / K(\mathbb{T}(\Lambda)) = 0 \ltimes (\mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_n(Z(\Lambda)))/[\Lambda, \Lambda^*])$

Démonstration. **(i)** Déjà fait.

(ii) On a $T_n(\mathbb{T}(\Lambda))^\perp = \{(b,\psi) \in \mathbb{T}(\Lambda); \psi(a) + \varphi(b) = 0 \quad \forall a \in T_n(\Lambda), \forall \varphi \in \Lambda^*\}$. En prenant $a = 0$ on en déduit que $b = 0$ et alors

$$T_n(\mathbb{T}(\Lambda))^\perp = \{(0,\psi) \in \mathbb{T}(\Lambda); \psi(a) = 0 \quad \forall a \in T_n(\Lambda)\} = 0 \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_n(\Lambda)).$$

(iii) Notons que puisque $Z(\mathbb{T}(\Lambda))$ est commutative, $K(Z(\mathbb{T}(\Lambda))) = 0$, donc $(a,\varphi) \in T_n(Z(\mathbb{T}(\Lambda)))$ si et seulement si

$$(0,0) = (a,\varphi)^{p^n} \equiv (a,0)^{p^n} + (0,\varphi)^{p^n} \equiv (a^{p^n},0) \pmod{K(Z(\mathbb{T}(\Lambda))) = 0}$$

soit $a^{p^n} = 0$ c'est-à-dire $a \in T_n(Z(\Lambda))$.
Donc puisque $Z(\mathbb{T}(\Lambda)) = Z(\Lambda) \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(K(\Lambda))$ on a $T_n(Z(\mathbb{T}(\Lambda))) = T_n(Z(\Lambda)) \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(K(\Lambda))$.
Prenons les orthogonaux : $(a,\varphi) \in T_n(Z(\mathbb{T}(\Lambda)))^\perp \iff \langle (a,\varphi),(b,\psi)\rangle = \varphi(z) + \psi(a) = 0$ pour tout $(z,\psi) \in T_n(Z(\Lambda)) \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(K(\Lambda))$. En prenant $z = 0$ on en déduit que $a \in K(\Lambda)$. De plus, en prenant $\psi = 0$ on en déduit que $\varphi \in \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_n(Z(\Lambda)))$. Il reste à faire le quotient par $K(\mathbb{T}(\Lambda)) = K(\Lambda) \ltimes [\Lambda,\Lambda^*]$. □

B Invariants d'équivalence dérivée

Corollaire VII.4. $\dim \Lambda - \dim T_n(\Lambda)$ *est un invariant d'équivalence dérivée.*

Démonstration. Supposons que Λ soit dans la même classe d'équivalence dérivée que Γ. Alors $\mathbb{T}(\Lambda)$ est dans la même classe d'équivalence dérivée que $\mathbb{T}(\Gamma)$ [R3, Rickard]. On sait donc [Z, Zimmermann] que l'isomorphisme $Z(\mathbb{T}(\Lambda)) \cong Z(\mathbb{T}(\Gamma))$ induit un isomorphisme $T_n(\mathbb{T}(\Lambda))^\perp \cong T_n(\mathbb{T}(\Gamma))^\perp$. Grâce au théorème, on a donc

$$\begin{aligned}\dim \Lambda - \dim T_n(\Lambda) &= \dim \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_n(\Lambda)) \\ &= \dim T_n(\mathbb{T}(\Lambda))^\perp \\ &= \dim T_n(\mathbb{T}(\Gamma))^\perp \\ &= \dim \mathrm{Ann}_{\Gamma^*}(T_n(\Gamma)) \\ &= \dim \Gamma - \dim T_n(\Gamma).\end{aligned}$$ □

Corollaire VII.5. *Soient Λ et Γ deux algèbres de dimension finie sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ telles que $\mathcal{D}^b(\Lambda) \sim \mathcal{D}^b(\Gamma)$ comme catégories triangulées. Alors l'isomorphisme entre $Z(\Lambda)$ et $Z(\Gamma)$ induit par un complexe basculant bilatère induit un isomorphisme de la suite de $Z(\Lambda)$-modules*

$$\mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_1(\Lambda)) \supseteq \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_2(\Lambda)) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_n(\Lambda)) \supseteq \cdots$$

vers la suite de $Z(\Gamma)$-modules

$$\mathrm{Ann}_{\Gamma^*}(T_1(\Gamma)) \supseteq \mathrm{Ann}_{\Gamma^*}(T_2(\Gamma)) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Ann}_{\Gamma^*}(T_n(\Gamma)) \supseteq \cdots$$

Démonstration. On sait ([Z, Zimmermann]) que la suite

$$\begin{array}{ccccccc} Z(\mathbb{T}(\Lambda)) & \supseteq & T_1(\mathbb{T}(\Lambda)) & \supseteq & T_2(\mathbb{T}(\Lambda)) & \supseteq \cdots \\ = Z(\Lambda) \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(K(\Lambda)) & \supseteq & 0 \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_1(\Lambda)) & \supseteq & 0 \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_2(\Lambda)) & \supseteq \cdots \end{array}$$

est envoyée par l'équivalence dérivée sur la suite

$$\begin{array}{ccccccc} Z(\mathbb{T}(\Gamma)) & \supseteq & T_1(\mathbb{T}(\Gamma)) & \supseteq & T_2(\mathbb{T}(\Gamma)) & \supseteq \cdots \\ = Z(\Gamma) \ltimes \mathrm{Ann}_{\Gamma^*}(K(\Gamma)) & \supseteq & 0 \ltimes \mathrm{Ann}_{\Gamma^*}(T_1(\Gamma)) & \supseteq & 0 \ltimes \mathrm{Ann}_{\Gamma^*}(T_2(\Gamma)) & \supseteq \cdots \end{array}$$

De plus, on vérifie facilement que l'action de $Z(\Lambda) \ltimes 0 \subseteq Z(\mathbb{T}(\Lambda))$ sur $0 \ltimes \mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_n(\Lambda))$ est la même que celle de $Z(\Lambda)$ sur $\mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_n(\Lambda))$. D'où le résultat. □

Remarque VII.6. Si Λ est symétrique, il y a un isomorphisme de $Z(\Lambda)$-modules entre $\mathrm{Ann}_{\Lambda^*}(T_n(\Lambda))$ et $T_n(\Lambda)^{\perp}$ induit par l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\Lambda \cong \Lambda^*$ défini par la forme bilinéaire symétrique sur Λ. On retrouve donc les mêmes invariants.

VIII Applications

A Classification de blocs d'algèbres de groupes

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p et soit G un groupe fini. Alors l'algèbre du groupe kG est une somme directe d'algèbres indécomposables, appelées **blocs** de kG. Chaque bloc est une algèbre symétrique, et lorsque p divise l'ordre de G ces blocs ne sont généralement pas semisimples. Etant donné un bloc B de kG, un **groupe de défaut** de B est un sous-groupe minimal D de G tel que tout B-module est de la forme $W \otimes_{kD} kG$ pour un kD-module W.

K. Erdmann [E] a étudié les représentations de blocs de kG, en particulier lorsque les blocs sont de type de représentation modéré. Dans ce cas, les groupes de défaut sont dihédraux, semi-dihédraux ou quaternionique généralisés et la caractéristique de k est 2. K. Erdmann a donc été amenée à étudier les algèbres de dimension finie symétriques de type dihédral, semi-dihédral et quaternionique, qu'elle classifie à équivalence Morita près, en donnant une liste de représentants définis par carquois et relations. Parmi les questions qui se posent, est celle de savoir si ces algèbres sont toutes Morita (ou autre) équivalentes à des blocs d'algèbres de groupe.

T. Holm [H] a classifié ces algèbres à équivalence dérivée près, à l'exception de certains cas qu'il n'a pas pu séparer. Il en a déduit en particulier qu'une partie des algèbres dans la liste étaient dans la même classe d'équivalence dérivée que des blocs d'algèbres de groupe (lorsque $p = 2$), laissant la question ouverte pour d'autres algèbres.

En utilisant les idéaux de Reynolds généralisés, T. Holm et A. Zimmermann [HZ] ont pu continuer la classification dans le cas des algèbres de type dihédral et de type semi-dihédral (le cas dihédral, qu'ils terminent, a également été terminé par des méthodes moins élémentaires par M. Kauer ; le cas semi-dihédral n'est toujours pas complet). Pour cela, ils ont défini une forme bilinéaire associative symétrique non-dégénérée précise sur ces algèbres (valable pour toute algèbre symétrique définie par carquois et relations). Dans leurs calculs, il suffit de considérer $T_1(A)^{\perp}$.

D'autre part, T. Holm et G. Zhou [HZh] utilisent les idéaux de Reynolds généralisés pour démontrer qu'une famille d'algèbres dans la liste de K. Erdmann étaient effectivement dans la même classe d'équivalence dérivée que des blocs d'algèbres de groupe en caractérisitique 2.

B Classification d'algèbres symétriques de type domestique

Par des méthodes similaires, T. Holm et A. Skowroński [HS] ont terminé la classification à équivalence dérivée près des algèbres symétriques de type de représentation domestique sur un corps algébriquement clos, complétant ainsi des travaux de R. Bocian, T. Holm et A. Skowroński.

Références

[BHZ] C. Bessenrodt, T. Holm, A. Zimmermann, *Generalized Reynolds ideals for non-symmetric algebras,* J. Algebra **312**, 985-994 (2007).

[E] K. Erdmann, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras,* Lecture Notes Math. **1428**.

[H] T. Holm, *Derived Equivalence Classification of ALgebras of Dihedral, Semidihedral, and Quaternion Type,* J. Algebra **211** (1999), 159–205.

[HS] T. Holm, A. Skowroński, *Derived equivalence classification of symmetric algebras of domestic type,* `arXiv : math.RT/0511227`.

[HZh] T. Holm, G. Zhou *Külshammer ideals and the scalar problem for blocks with dihedral defect groups,* `arXiv : 0809.1363`.

[HZ] T. Holm, A. Zimmermann, *Generalized Reynolds ideals and derived equivalences for algebras of dihedral and semidihedral type,* `arXiv : 0807.0688`.

[KZ] S. König et A. Zimmermann, *Derived Equivalences for Group Rings.*

[R] J. Rickard, *Morita theory for derived categories,* J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 436–456.

[R2] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors,* J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), no. 1, 37–48.

[R3] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalences,* J. Pure Appl. Algebra **61** (1989) 303–317.

[Z] A. Zimmermann, *Invariance of generalised Reynolds ideals under derived equivalences,* Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy **107**A (1), 1–9 (2007).

[Z2] A. Zimmermann, *Tilted symmetric orders are symmetric orders,* Arch. Math. (Basel) **73** (1999), no. 1, 15–17.