Exposé au groupe de travail “GTIA” à l’IHP (Paris).
Notes pour un résumé présenté à la réunion de rentrée du GTIA
le 12 Octobre 2009, Anne Pichereau

Équivalence de problèmes de déformation :
méthodes L_∞, correspondance de M. Kontsevich, déformations de structures de Poisson

1. Introduction

On s’intéresse à des problèmes de déformation :

- déformations de produits associatifs ($*$-produits)
- déformations de crochets de Poisson.

Pourquoi s’intéresser aux déformations ? : Classique question du passage :
“mécanique classique $\rightsquigarrow$ mécanique quantique.”

On veut utiliser les algèbres L_∞ et leurs morphismes pour obtenir différents résultats d’“équivalence de problèmes de déformations”. En utilisant cette idée, M. Kontsevich montre que le problème de déformation d’un produit associatif est “équivalent” au problème de déformation d’un crochet de Poisson. *(On expliquera un peu plus tard et plus en détails ce que l’on entend par ces phrases).*

On peut aussi utiliser cette théorie pour obtenir une équivalence d’un problème de déformations “compliqué” avec un problème de déformation “simple”. C’est ce que l’on va faire pour étudier les déformations d’une certaine famille de crochets de Poisson. (*Dans ce cas, le “compliqué” se trouve déplacé dans les structures L_∞ et le morphisme).*

Dans l’exposé, on retrouvera donc :

(1) les objets que l’on va manipuler : les algèbres de Lie différentielles graduées, leurs morphismes, l’équation de Maurer-Cartan qui leur est associée. Puis, on verra les algèbres de Lie différentielles graduées comme des cas particuliers d’algèbres L_∞ et on définira les <u>morphismes L_∞</u> entre algèbres de Lie différentielles graduées, et ce que ces morphismes entrainent au niveau des solutions des équations de Maurer-Cartan.

   Remarque : pour simplifier, au lieu de “algèbre de Lie différentielle graduée”, nous dirons plutôt “dg-algèbre de Lie”.

(2) on expliquera (sans rentrer dans tous les détails) un résultat de M. Kontsevich, c’est-à-dire qu’on expliquera le résultat qui nous intéresse ici : la correspondance entre les $*$-produits et les déformations formelles de crochet de Poisson (aussi appelé <u>théorème de formalité</u>) ; mais on expliquera aussi l’enchainement d’idées et de résultats de la théorie L_∞ qui permet d’y arriver, car c’est cet enchainement que l’on va grosso modo réutiliser dans le troisième point :

(3) finalement, on expliquera l’interprétation L_∞ d’une classification de déformations de structures de Poisson en dimension trois (ce qui est dans [7]) ; celà nous demandera d’utiliser “pour de vrai” les algèbres L_∞ *(c’est-à-dire que l’on*

va devoir travailler avec une algèbre L_∞, qui n'est pas une dg-algèbre de Lie), on redéfinira les structures de Poisson que l'on va considérer, et surtout on expliquera que l'on va devoir faire ce que nous pourrions appeler un "transfert de structure avec contraintes", pour pouvoir ensuite appliquer l'enchainement dont on a parlé juste au dessus, qui permet ensuite de conclure, en utilisant la théorie des algèbres L_∞ et de leurs morphismes L_∞.

Partout : le corps de base est $\mathbf{C}$. *(Dans notre exposé, ce sera un corps $\mathbf{F}$ arbitraire de caractéristique zéro).*

2. Dg-algèbres de Lie, Maurer-Cartan et différents morphismes

Définition 2.1. Une algèbre de Lie différentielle graduée (ou "dg-algèbre de Lie") est une algèbre de Lie graduée $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, munie d'une différentielle $\partial_{\mathfrak{g}}$, qui est une dérivation pour le crochet de Lie gradué $[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}}$.
En détails :

– une algèbre de Lie graduée est un espace vectoriel gradué[1] $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$, muni d'un crochet de Lie gradué $[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$,

c'est-à-dire une application antisymétrique, graduée de degré 0 (i.e., $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{i+j}$) et qui vérifie l'identité de Jacobi graduée :

$$(-1)^{|x||z|}\left[[x,y]_{\mathfrak{g}}\,,z\right]_{\mathfrak{g}} + (-1)^{|y||x|}\left[[y,z]_{\mathfrak{g}}\,,x\right]_{\mathfrak{g}} + (-1)^{|z||y|}\left[[z,x]_{\mathfrak{g}}\,,y\right]_{\mathfrak{g}} = 0,$$

pour $x, y, z \in \mathfrak{g}$ des éléments homogènes dont on note[2] le degré avec des $|\cdot|$.

– une dg-algèbre de Lie est une algèbre de Lie graduée $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, munie en plus d'une différentielle $\partial_{\mathfrak{g}}$,

c'est-à-dire une application $\partial_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, graduée de degré 1 (i.e., $\partial_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}$), telle que $\partial_g \circ \partial_{\mathfrak{g}} = 0$, ou $\partial_g^{i+1} \circ \partial_{\mathfrak{g}}^i = 0$, si on note $\partial_{\mathfrak{g}}^i : \mathfrak{g}_i \to \mathfrak{g}_{i+1}$,

qui est une dérivation pour le crochet $[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}}$,

c'est-à-dire qui vérifie :

$$\partial_{\mathfrak{g}}\left([x,y]_{\mathfrak{g}}\right) = [\partial_{\mathfrak{g}}(x), y]_{\mathfrak{g}} + (-1)^{|x|}\,[x, \partial_{\mathfrak{g}}(y)]_{\mathfrak{g}}\,,$$

pour $x, y \in \mathfrak{g}$ des éléments homogènes.

Exemple 2.2. Dg-algèbre de Lie associée au complexe de Hochschild.
Pour $(\mathcal{A}, \mu)$ une algèbre associative, l'espace gradué

$$\mathfrak{g}_\mu := \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{A}) = \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^i, \mathcal{A}),$$

peut-être muni d'une structure de dg-algèbre de Lie, avec :

$$\begin{aligned} [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}_\mu} &:= [\cdot\,,\cdot]_G\,,\ \text{le crochet de Gerstenhaber}\,, \\ \partial_{\mathfrak{g}_\mu} &:= [\mu,\cdot]_G\,,\ \text{l'opérateur de cobord de Hochschild.} \end{aligned}$$

Alors $(\mathfrak{g}_\mu, \partial_{\mathfrak{g}_\mu}[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}_\mu})$ est la dg-algèbre de Lie associée au complexe de Hochschild de $(\mathcal{A}, \mu)$ (modulo un décalage de degré).

---

[1] *Même si dans la pratique, ce sera toujours gradué sur* $\mathbf{N} \cup \{-1\}$

[2] Ce que l'on entend par là : si $x \in \mathfrak{g}_i$ est un élément de $\mathfrak{g}$ homogène, de degré i, on notera plutôt $|x| := i$

Pour mémoire, l'opérateur de cobord de Hochschild peut aussi être défini ainsi : pour $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^k, \mathcal{A})$ *et* $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\partial_{\mathfrak{g}_\mu}(\phi)(x_0,\ldots,x_k) &:= x_0\cdot\phi(x_1,\ldots,x_k)\\ &- \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\phi(x_0,\ldots,x_i\cdot x_{i+1},\ldots,x_k) + (-1)^{k+1}\phi(x_0,\ldots,x_{k-1})\cdot x_k,\end{aligned}$$

où l'on a noté le produit associatif μ *plutôt par "$\cdot$".*

Exemple 2.3. Dg-algèbre de Lie associée au complexe de Poisson.
Cette construction est tout à fait similaire au cas de Hochschild.
Pour $(\mathcal{A}, \cdot, \pi)$ une algèbre de Poisson, l'espace gradué des multidérivations antisymétriques de $\mathcal{A}$

$$\mathfrak{g}_\pi := \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \mathfrak{X}^i(\mathcal{A}),$$

peut-être muni d'une structure de dg-algèbre de Lie, avec :

$$\begin{aligned}[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}_\pi} &:= [\cdot\,,\cdot]_S\,, \text{ le crochet de Schouten },\\ \partial_{\mathfrak{g}_\pi} &:= [\pi,\cdot]_S\,, \text{ l'opérateur de cobord de Poisson.}\end{aligned}$$

Alors $(\mathfrak{g}_\pi, \partial_{\mathfrak{g}_\pi}[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}_\pi})$ est la dg-algèbre de Lie associée au complexe de Poisson de $(\mathcal{A}, \cdot, \pi)$ (modulo un décalage de degré).

Pour mémoire, une algèbre de Poisson est une algèbre associative commutative $(\mathcal{A}, \cdot)$*, munie d'un crochet de Lie* $\pi : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *(application bilinéaire antisymétrique, qui vérifie l'identité de Jacobi simple (non graduée)), qui est une bidérivation, c'est-à-dire telle que, pour* $x, y, z \in \mathcal{A}$, $\pi[x\cdot y, z] = x\cdot\pi[y,z] + y\cdot\pi[x,z]$.

Une k-dérivation antisymétrique $Q \in \mathfrak{X}^k(\mathcal{A})$ *est une application* $Q : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}$, *k-linéaire antisymétrique, qui est une dérivation en chacun de ses arguments : pour* $x, y, y_2, \ldots, y_k \in \mathcal{A}$, $Q[x\cdot y, y_2, \ldots, y_k] = x\cdot Q[y, y_2, \ldots, y_k] + y\cdot Q[x, y_2, \ldots, y_k]$.

On ne rappelera pas la définition du crochet de Schouten $[\cdot\,,\cdot]_S$*, mais c'est un crochet de Lie gradué qui étend le commutateur de dérivations (ou champs de vecteurs, si on préfère une vision plus géométrique), en un crochet qui est une dérivation pour le produit extérieur* $\wedge$ *de dérivations (ou champs de vecteurs). Ce qu'il faut retenir : il a les mêmes propriétés que le crochet de Gerstenhaber et il va jouer un rôle complètement similaire au rôle du crochet de Gerstenhaber mais dans le versant "Poisson".*

L'opérateur de cobord de Poisson peut être défini comme étant $-[\cdot, \pi]_S$*, ou plus explicitement : pour* $Q \in \mathfrak{X}^k(\mathcal{A})$ *et* $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\partial_{\mathfrak{g}_\pi}(Q)[x_0,\ldots,x_k] &:= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\,\{x_i, Q[x_0,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_k]\}\\ &+ \sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}Q[\{x_i,x_j\}, x_0,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_k],\end{aligned}$$

où l'on a noté le crochet de Poisson π *plutôt par "$\{\cdot\,,\cdot\}$".*

Exemple 2.4. On peut faire pareil avec le complexe de Chevalley-Eilenberg (qui régit la cohomologie d'une algèbre de Lie, à coefficient dans elle-même). Ici, le crochet de Gerstenhaber (ou de Schouten) est remplacé par le crochet de Nijenhuis-Richardson et la différentielle devient l'opérateur de cobord de Chevalley-Eilenberg..

En règle générale, on ne va considérer que des dg-algèbres de Lie de ce type : $(\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}}\mathfrak{g}_i, [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est une algèbre de Lie graduée, qui contient un élément $x_0 \in \mathfrak{g}_1$ de degré 1, vérifiant : $[x_0, x_0]_{\mathfrak{g}} = 0$. Alors l'application $\partial_{\mathfrak{g}} := [x_0, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ est une différentielle et $(\mathfrak{g}, \partial_{\mathfrak{g}}, [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est une dg-algèbre de Lie. Cette construction englobe les exemples que l'on a donnés ci-dessus.

Définition 2.5. Soient $(\mathfrak{g}, \partial_{\mathfrak{g}}, [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ et $(\mathfrak{h}, \partial_{\mathfrak{h}}, [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ deux dg-algèbres de Lie. Un morphisme de dg-algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie graduées $(f([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [f(x), f(y)]_{\mathfrak{h}})$, qui commute avec les différentielles $(f \circ \partial_{\mathfrak{g}} = \partial_{\mathfrak{h}} \circ f)$.

Soit $(\mathfrak{g}, \partial_{\mathfrak{g}}, [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une dg-algèbre de Lie. Alors lui est associé un complexe :

$$\cdots \longrightarrow \mathfrak{g}_{i-1} \xrightarrow{\partial_{\mathfrak{g}}^{i-1}} \mathfrak{g}_i \xrightarrow{\partial_{\mathfrak{g}}^{i}} \mathfrak{g}_{i+1} \xrightarrow{\partial_{\mathfrak{g}}^{i+1}} \cdots$$

dont la cohomologie est notée $H^\bullet(\mathfrak{g})$. Par définition, si $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme de dg-algèbres de Lie, f induit un morphisme entre les cohomologies associées $f : H^\bullet(\mathfrak{g}) \to H^\bullet(\mathfrak{h})$. On dit ensuite que f est un quasi-isomorphisme de dg-algèbres de Lie si le morphisme associé $f : H^\bullet(\mathfrak{g}) \to H^\bullet(\mathfrak{h})$ est un isomorphisme.

À $(\mathfrak{g}, \partial_{\mathfrak{g}}, [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ est aussi associée une équation appelée équation de Maurer-Cartan et donnée par : $\partial_{\mathfrak{g}}(x) + \frac{1}{2}[x,x]_{\mathfrak{g}} = 0$, pour $x \in \mathfrak{g}_1$, élément de degré 1. On va tout de suite rajouter un paramètre formel, ν, et on va noter $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g})$ l'ensemble des solutions formelles de cette équation :

$$\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}) := \left\{ x \in \mathfrak{g} \otimes \nu\mathbf{C}[[\nu]] \mid \partial_{\mathfrak{g}}(x) + \frac{1}{2}[x,x]_{\mathfrak{g}} = 0 \right\}.$$

En fait, un élément de $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g})$ est une série formelle $x = \sum_{i\geq 1} x_i \nu^i$, avec les $x_i \in \mathfrak{g}_1$ des éléments de degré 1 dans $\mathfrak{g}$. Puis, on a sous-entendu que $\partial_{\mathfrak{g}}$ et $[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ ont été étendus par (bi)linéarité par rapport au paramètre formel ν. Quand on regarde dans l'équation de Maurer-Cartan le coefficient de ν^n, on obtient une somme finie, donc $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g})$ est un objet bien défini.

Il y aussi une notion d'équivalence sur les solutions formelles de l'équation de Maurer-Cartan associée à $\mathfrak{g}$, notée $\sim$. *(On ne détaille pas cette équivalence ici).*

On reprend les exemples des dg-algèbres de Lie associées au complexe de Hochschild et de Poisson :

Exemple 2.6. Soient $(\mathcal{A}, \mu)$ une algèbre associative et $(\mathfrak{g}_\mu, \partial_{\mathfrak{g}_\mu} [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}_\mu})$ sa dg-algèbre de Lie associée. Alors un élément de $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}_\mu)$ est une série formelle $\mu_* = \sum_{i\geq 1} \mu_i \nu^i$, avec pour tout $i \in \mathbf{N}$, $\mu_i \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^2, \mathcal{A})$ application bilinéaire[3] de $\mathcal{A}$, telle que :

$$* := \mu + \mu_* = \mu + \sum_{i\geq 1} \mu_i \nu^i$$

est une déformation formelle du produit associatif μ, c'est-à-dire que $*$ est un produit associatif (formel) sur $\mathcal{A}[[\nu]]$, qui étend μ (i.e., qui est égal à μ, modulo ν). Si l'on demande en plus aux éléments de $\mathfrak{g}_\mu$ d'être des opérateurs multidifférentiels, $*$ est même un star-produit pour μ.

[3] *à cause du décalage de degré que l'on a rapidement évoqué plus haut, un élément de degré 1 de $\mathfrak{g}_\mu$ est en fait une application* **bi***linéaire*

En fait, ce dont il faut se souvenir, c'est que pour une application bilinéaire $m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$*, la propriété d'associativité s'écrit exactement :* $[m, m]_G = 0$*. Puis un élément de* $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}_\mu)$ *est une série formelle* $\mu_* = \sum_{i\geq 1} \mu_i \, \nu^i$*, vérifiant :*

$$\begin{aligned} 0 = \partial_{\mathfrak{g}_\mu}(\mu_*) + \frac{1}{2}\,[\mu_*, \mu_*]_{\mathfrak{g}_\mu} &= [\mu, \mu_*]_G + \frac{1}{2}\,[\mu_*, \mu_*]_G \\ &= \frac{1}{2}\,[\mu + \mu_*, \mu + \mu_*]_G\,, \end{aligned}$$

car $[\mu, \mu]_G = 0$ *(*μ *associatif), et ceci est équivalent à dire que* $\mu + \mu_*$ *est bien un produit associatif, qui étend* μ *par définition, donc une déformation formelle de* μ*.*

Exemple 2.7. De façon tout à fait similaire en Poisson :
Soient $(\mathcal{A}, \cdot, \pi)$ une algèbre de Poisson et $(\mathfrak{g}_\pi, \partial_{\mathfrak{g}_\pi}[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}_\pi})$ sa dg-algèbre de Lie associée. Alors on a une correspondance biunivoque :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}_\pi) & \longleftrightarrow & \{\text{ déformations formelles de } \pi\} \\ \pi_* = \sum\limits_{i\geq 1} \pi_i \, \nu^i & \longleftrightarrow & \pi + \pi_* \end{array}$$

À retenir : dans les cas que l'on va considérer en tout cas, un problème de déformation peut être codé dans une dg-algèbre de Lie et son équation de Maurer-Cartan associée. De plus, il faut savoir que, dans cette correspondance entre solutions formelles de Maurer-Cartan et déformations formelles du produit initial, les deux notions d'équivalence qui interviennent correspondent aussi l'une à l'autre.

À retenir -bis- : Soient $(\mathfrak{g}, \partial_\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot]_\mathfrak{g})$ et $(\mathfrak{h}, \partial_\mathfrak{h}, [\cdot\,,\cdot]_\mathfrak{h})$ deux dg-algèbres de Lie et $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un morphisme de dg-algèbres de Lie. Alors f induit une application :

$$f : \mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}) \to \mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h}).$$

Parce que f *commute avec les crochets et les différentielles, si* x *est solution de l'équation de Maurer-Cartan dans* $\mathfrak{g}$*,* $f(x)$ *est solution de l'équation de Maurer-Cartan dans* $\mathfrak{h}$

Si f est en plus un quasi-isomorphisme de dg-algèbres de Lie, alors l'application induite

$$f : \mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g})/\sim\; \to \mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h})/\sim$$

est une bijection.

Première conclusion (en réunissant le "À retenir" et le "À retenir -bis-") : l'existence d'un quasi-isomorphisme entre deux dg-algèbres de Lie entraine une équivalence entre les deux problèmes de déformations qui leur sont associés. (Autrement dit, celà entraine une correspondance biunivoque entre les classes d'équivalence de déformations de chaque coté).

Malheureusement, l'hypothèse de l'existence d'un quasi-isomorphisme de dg-algèbres de Lie est très (trop) forte. L'idée est donc de relacher cette contrainte en remplaçant la notion de "quasi-isomorphisme de dg-algèbres de Lie" par la notion de "quasi-isomorphisme L_∞".

En fait, les dg-algèbres de Lie sont des cas particuliers des "algèbres L_∞". Là où une dg-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie de deux applications de structure

$$\partial_\mathfrak{g} \text{ et } [\cdot\,,\cdot]_\mathfrak{g}\,,$$

une algèbre L_∞ est quant à elle munie de toute une collection d'applications de structure :

$$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_n, \ldots,$$

vérifiant une sorte d'identité de Jacobi généralisée :

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_\sigma \pm \ell_j \left(\ell_i\left(\cdots\right), \cdots\right) = 0, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

(Le $\sum_\sigma$ signifie qu'il y a une permutation (shuffle) des arguments).

Bien sûr, avec cette notion d'algèbre L_∞, il existe une notion de morphisme L_∞ entre algèbres L_∞. Cependant, on peut aussi regarder des morphismes L_∞ entre dg-algèbres de Lie (puisqu'elles sont des cas particuliers d'algèbres L_∞), on obtient (à peu près) la définition suivante :

Définition 2.8. Soient $(\mathfrak{g}, \partial_\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot]_\mathfrak{g})$ et $(\mathfrak{h}, \partial_\mathfrak{h}, [\cdot\,,\cdot]_\mathfrak{h})$ deux dg-algèbres de Lie. Un morphisme L_∞ entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ est une collection d'applications :

$$f_\bullet := \left(f_n : \bigotimes^n \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}\right)_{n\in\mathbf{N}^*},$$

vérifiant les équations :

$$(\mathcal{E}_n) \qquad \begin{array}{c} \partial_\mathfrak{h}\left(f_n(\cdots)\right) + \displaystyle\sum_{\substack{s+t=n\\ s,t\geq 1}} \sum_\sigma \pm\ \left[f_s\left(\cdots\right), f_t\left(\cdots\right)\right]_\mathfrak{h} = \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \pm f_i\left(\cdots, \partial_\mathfrak{g}(\cdot), \cdots\right) + \sum_\sigma \pm f_{n-1}\left(\left[\cdot,\cdot\right]_\mathfrak{g}, \cdot, \cdots\right), \end{array}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Propriétés (importantes pour nous) d'un morphisme L_∞ entre deux dg-algèbres de Lie $f_\bullet : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

(1) L'équation $\mathcal{E}_n$ pour $n = 1$ donne en particulier : $\partial_\mathfrak{h} \circ f_1 = f_1 \circ \partial_\mathfrak{g}$, donc, comme dans le cas d'un morphisme (simple) de dg-algèbres de Lie, $f_\bullet$ (en fait f_1) induit un morphisme $H^\bullet(\mathfrak{g}) \to H^\bullet(\mathfrak{h})$. Comme précédemment, si ce morphisme $H^\bullet(\mathfrak{g}) \to H^\bullet(\mathfrak{h})$ est un isomorphisme, alors on dit que $f_\bullet$ est un quasi-isomorphisme L_∞.

(2) Comme dans le cas d'un morphisme (simple) de dg-algèbres de Lie (mais avec une formule plus compliquée), $f_\bullet$ induit une application bien définie :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}) & \to & \mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h}) \\ x & \mapsto & \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \pm f_n(x, \ldots, x). \end{array}$$

Et si de plus, $f_\bullet$ est un quasi-isomorphisme L_∞, alors l'application ci-dessus induit une bijection :

$$\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g})/\sim\ \longrightarrow\ \mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h})/\sim.$$

Remarque : ceci marche encore si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont des algèbres L_∞ (même si dans ce cas, l'équation de Maurer-Cartan se complique car elle prend en compte toute la structure L_∞).

Deuxième conclusion : un quasi-isomorphisme L_∞ entre deux dg-algèbres de Lie (ou entre deux algèbres L_∞) entraine aussi une équivalence entre les deux problèmes de déformations associés.

En résumé, on a une formule plus compliquée pour un quasi-isomorphisme L_∞ que pour un simple quasi-isomorphisme de dg-algèbres de Lie, mais c'est une condition plus faible qu'avoir un quasi-isomorphisme de dg-algèbres de Lie, ET ça garde les propriétés qui nous intéressaient).

3. Formalité et dictionnaire de M. Kontsevich

Ce que fait M. Kontsevich (entre autres).

Soient M une variété lisse et $(\mathcal{A} = C^\infty(M), \mu)$, son algèbre de fonctions associée *(qui est évidemment associative).*
M. Kontsevich construit un quasi-isomorphisme L_∞ entre la dg-algèbre de Lie associée au complexe de Hochschild de $(\mathcal{A}, \mu)$: $\mathfrak{g}_\mu$, et la dg-algèbre de Lie associée au complexe de Poisson associé au crochet de Poisson trivial : $\mathfrak{g}_{\pi=0}$.

D'après ce qu'on a vu plus haut, ce résultat donne donc :
• une bijection entre $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}_\mu)/\sim$ et $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}_{\pi=0})/\sim$;

c'est-à-dire :
• une correspondance biunivoque entre :

- les classes d'équivalence de $*$-produits de μ,
- et les classes d'équivalence de déformations formelles du crochet de Poisson trivial $\pi = 0$;

c'est-à-dire encore, si maintenant M est munie d'un structure de Poisson π (non nécessairement triviale cette fois) :
• une correspondance biunivoque entre :

- les classes d'équivalence de $*$-produits de μ, dont le premier terme est donné par π ;
- et les classes d'équivalence de déformations formelles du crochet de Poisson π.

Il faut savoir que l'existence d'un quasi-isomorphisme L_∞ entre deux dg-algèbres de Lie a aussi d'autres conséquences, comme des liens entre les cohomologies des structures déformées. Dans le cadre ci-dessus, le résultat de M. Kontsevich est aussi lié à l'isomorphisme de Duflo, mais nous n'entrerons pas dans les détails de celà.

Remarque 3.1. Pourquoi appelle-t-on ce résultat de M. Kontsevich, théorème de "formalité" ?
On dit qu'une dg-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est formelle s'il existe un quasi-isomorphisme L_∞ entre elle et la dg-algèbre de Lie donnée par la cohomologie $H^\bullet(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, munie de la différentielle nulle et du crochet de Lie gradué induit par celui de $\mathfrak{g}$, $[\cdot\,,\cdot]_\mathfrak{g}$. Or d'après le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg, $H^\bullet(\mathfrak{g}_\mu)$ coincide avec $\mathfrak{g}_{\pi=0}$, donc le résultat précédent de M. Kontsevich montre la formalité de $\mathfrak{g}_\mu$.

Ce résultat de M. Kontsevich donne un “dictionnaire”, pour une variété lisse de Poisson (M,π) :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Classes d'équivalence} \\ \text{de star-produits de } (M,\pi) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Classes d'équivalence} \\ \text{de déformations formelles de } \pi \end{array} \right\}$$

$$[*] \longleftrightarrow [\pi_*]$$

4. Interprétation L_∞ d'une classification des déformations de structures de Poisson en dimension trois

Intérêt dans la suite de l'exposé : le versant “Poisson” de ce dictionnaire.
On regarde les structures de Poisson sur $\mathbf{C}^3$ du type :

$$\pi_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y},$$

où $\varphi \in \mathcal{A} := \mathbf{C}[x,y,z]$ est un polynôme (quasi-) homogène, à singularité isolée (i.e., tel que la surface $\{\varphi = 0\} \subset \mathbf{C}^3$ n'ait qu'une seule singularité en l'origine).

À propos de ces structures de Poisson, on connait déjà la cohomologie de Poisson, puisque on a obtenu des bases explicites pour les espaces de cohomologie de Poisson associés à $(\mathcal{A},\pi_\varphi)$ (dans [8]). Avec des méthodes “élémentaires”, on a déjà obtenu toutes les déformations formelles de π_φ à équivalence près, un représentant explicite pour chacune des classes d'équivalence, et une classification de ces déformations, dans le cas générique (dans [9]).

Ce que l'on veut faire ici : interpréter ces résultats en termes d'algèbres L_∞ et de leurs morphismes.

<u>Pourquoi ?</u> Evidemment pas seulement pour ré-obtenir le résultat que l'on avait déjà obtenu, mais pour :

(1) mieux comprendre ce résultat (nous expliquerons dans l'exposé ce que nous comprenons mieux),
(2) étendre, élargir ce résultat (nous expliquerons aussi),
(3) revenir au dictionnaire de M. Kontsevich et utiliser des méthodes L_∞ pour voir à quoi correspondent, du coté “star-produit”, les classes d'équivalence de déformations formelles de π_φ que nous avons obtenues,
(4) aborder d'autres questions dont nous parlerons dans l'exposé ..

<u>Comment ?</u> On veut utiliser l'idée déjà expliquée mais dans cette configuration :
un quasi-isomorphisme L_∞ : $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}$ est une dg-algèbre de Lie, mais $\mathfrak{h}$ est une “vraie” algèbre L_∞. Dans ce contexte, ce qui ne sera pas donné d'avance, ce qui sera à construire, sera : la structure L_∞ sur $\mathfrak{h}$ et le quasi-isomorphisme L_∞. Nous allons maintenant expliquer le travail à faire. On rappelle que $\mathcal{A} := \mathbf{C}[x,y,z]$.

(1) On a une structure de dg-algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A})$, dont le problème de déformation associé est celui qui nous intéresse :

$$\mathfrak{g}_\varphi := \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}), \quad [\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}_\varphi} := [\cdot\,,\cdot]_S\,, \quad \partial_{\mathfrak{g}_\varphi} := [\pi_\varphi,\cdot]_{\mathfrak{g}_\varphi}\,,$$

en effet ici, $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}_\varphi)$ correspond aux déformations formelles de π_φ.

(2) On voudrait : a) construire une dg-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, b) telle que : $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h})$ soit très simple *(c'est-à-dire que le problème de déformation associé à $\mathfrak{h}$ soit très simple)*, c) et : on veut aussi un quasi-isomorphisme $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, qui soit adapté

à notre problème et qui soit “utilisable”.
Avec l'idée de “formalité” en tête, on pense à $\mathfrak{h} = H^\bullet(\mathfrak{g}_\varphi)$, que l'on connait très bien. Par contre les hypothèses a), b) et c) ne marchent pas tout à fait. Il faut remplacer a), b), c) par : a') construire une structure d'algèbre L_∞ sur $\mathfrak{h} = H^\bullet(\mathfrak{g}_\varphi)$, b')=b) telle que : $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h})$ soit très simple, c') et : on veut aussi un quasi-isomorphisme L_∞, $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, qui soit adapté à notre problème et qui soit “utilisable”.
(Dans ce contexte, on dit que la structure L_∞ sur $\mathfrak{h} = H^\bullet(\mathfrak{g}_\varphi)$ est obtenue par transfert de la structure de dg-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$.)
Conclusion : on n'obtiendra pas ici un nouveau résultat de formalité pour $\mathfrak{g}_\varphi$, mais quelque chose qui nous donne bien l'équivalence du problème de déformation qui nous intéresse (codé dans $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}_\varphi)$) avec un problème de déformation beaucoup plus simple (codé dans $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h})$).

Par contre, on a des contraintes pour ce transfert de structure :
1) on veut que $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h})$ soit simple *(en fait, on veut même que $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1 = H^2(\mathcal{A}, \pi_\varphi)$)*,
2) on veut que l'image de $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h})$ (dans $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{g}_\varphi)$) par l'application $x \mapsto \sum \pm f_n(x, \dots, x)$, induite par le quasi-isomorphisme L_∞, $f_\bullet$, redonne les déformations que l'on avait obtenues dans [9].

(3) Remarque importante : il existe un théorème de transfert qui nous assure qu'il existe une structure L_∞ sur $\mathfrak{h} = H^\bullet(\mathfrak{g}_\varphi)$ et un quasi-isomorphisme $f_\bullet : H^\bullet(\mathfrak{g}_\varphi) \to \mathfrak{g}_\varphi$. MAIS ce théorème ne permet pas (en tout cas, pour nous) de respecter nos contraintes 1) et 2), c'est-à-dire d'avoir du contrôle sur $\mathcal{MC}^\nu(\mathfrak{h})$ ou sur $f_\bullet$. Nous expliquerons donc aussi ce point.

5. Bibliographie (réduite)

Concernant le résultat de M. Kontsevich : [4] et [2] ;
concernant les déformations en général : [1] ;
concernant les variétés de Poisson, leur cohomologie : [6] ;
concernant les algèbres L_∞ : [10] (algèbres A_∞), [3] et aussi : [5] (ce sont les conventions de signes de l'appendice de cet article que nous utiliserons).
Ensuite pour la cohomologie des structures de Poisson du type π_φ : dans [8], leurs déformations (sans algèbre L_∞) : dans [9] et l'interprétation L_∞, dans [7].

Références

[1] François Bayen, Moshé Flato, Christian Fronsdal, André Lichnerowicz, and Daniel Sternheimer. Deformation theory and quantization. I and II. *Annals of Physics*, 111(1) :61–110, 1978.

[2] Alberto Cattaneo, Bernhard Keller, Charles Torossian, and Alain Bruguières. Déformation, quantification, théorie de Lie. *Panoramas et Synthèses*, 20 :viii+186, 2005.

[3] Martin Doubek, Martin Markl, and Petr Zima. Deformation theory (lecture notes). *Universitatis Masarykianae Brunensis. Facultas Scientiarum Naturalium. Archivum Mathematicum*, 43(5) :333–371, 2007.

[4] Maxim Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. *Letters in Mathematical Physics*, 66(3) :157–216, 2003.

[5] Calin I. Lazaroiu. String field theory and brane superpotentials. *The Journal of High Energy Physics*, Paper 18(10) :40 p, 2001.

[6] André Lichnerowicz. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *Journal of Differential Geometry*, 12(2) :253–300, 1977.

[7] Anne Pichereau. L_∞-interpretation of a classification of deformations of poisson structures in dimension three. *à paraitre dans les Proceedings de "Algebraic and Geometric Deformation Spaces", Aspects of mathematics.*

[8] Anne Pichereau. Poisson (co)homology and isolated singularities. *Journal of Algebra*, 299(2) :747–777, 2006.

[9] Anne Pichereau. Formal deformations of poisson structures in low dimensions. *Pacific Journal of Mathematics*, 239(01) :105 – 133, 2009.

[10] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces. I, II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 108 :293–312, 1963.