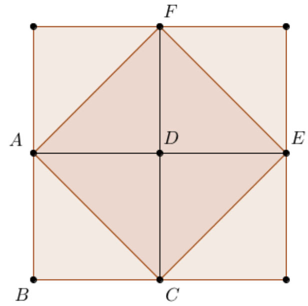
Autour des aires

(rittaud@math.univ-paris13.fr)

La duplication du carré

Dans le dialogue *Ménon*, Platon (Vᵉ-IVᵉ siècle avant notre ère) démontre le résultat suivant : *un carré étant donné, le carré construit sur l'une de ses diagonales est d'aire double*.



1) Le démontrer à l'aide de la figure ci-contre.

2) En déduire le rapport de la diagonale au côté.

Le format A4

Une feuille au format standard A4 a pour dimensions 21 cm et 29,7 cm. L'objectif de cet exercice est de comprendre l'origine mathématique de ces valeurs.

1) Calculer 29,7/21.

2) Lorsqu'on plie en deux une feuille A4 dans le sens de la largeur, on obtient le format A5. Calculer le rapport de la longueur à la largeur pour ce format. Que constate-t-on ? En déduire le lien géométrique qu'entretiennent les formats A4 et A5.

3) Le A3 s'obtient en accolant deux A4 dans le sens de leur longueur. Calculer à nouveau le rapport longueur/largeur. Comment aurait-on pu anticiper le résultat ?

4) Que vaut le rapport (aire du A4)/(aire du A5) ? En déduire les rapports (longueur du A4)/(longueur du A5) et (largeur du A4)/(largeur du A5). En déduire également l'expression du rapport (longueur du A4)/(largeur du A4).

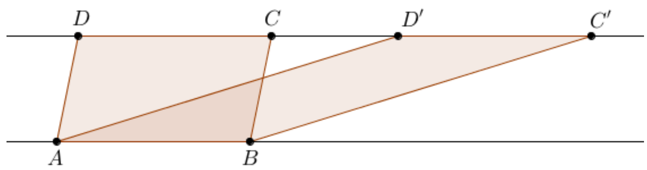
5) Quelles sont les dimensions d'une feuille au format A0 ? Calculer une valeur approchée de l'aire du A0. En déduire la définition mathématique sous-jacente au choix des dimensions du A4.

Aire d'un parallélogramme

On suppose connue la formule de l'aire d'un rectangle, mais aucune autre formule d'aire.

1) Soit $ABCD$ un parallélogramme, soit E l'intersection de (CD) avec la perpendiculaire à (CD) passant par B et soit F l'intersection de (AB) avec la perpendiculaire à (CD) passant par A. En déplaçant convenablement le triangle BCE, montrer que l'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale au produit $AB \times BE$.

2) Des deux parallélogrammes $ABCD$ et $ABC'D'$ ci-contre, lequel a l'aire la plus grande ?



Aire de figures rectilignes

1) *Triangle rectangle* — Soit ABC un triangle rectangle en A. En complétant ce triangle pour obtenir un rectangle, montrer que l'aire de ABC est égale à $AB \times AC/2$.

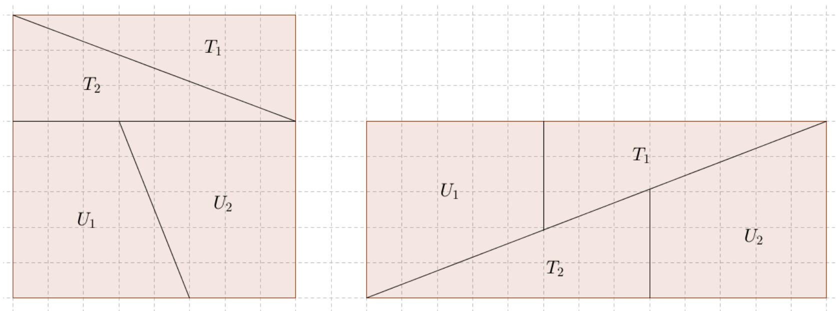
2) *Triangle quelconque* — Soit ABC un triangle quelconque, soit H le pied de sa hauteur issue de A. En l'écrivant comme la somme des aires des triangles ABH et AHC, démontrer que l'aire de ABC est égale à $BC \times AH/2$.

3) *Losange* — Déterminer une formule donnant l'aire d'un losange $ABCD$ en fonction des longueurs de ses diagonales AC et BD.

4) *Trapèze* — Même chose pour un trapèze $ABCD$ (où (AB) est parallèle à (CD) et à distance h), en fonction de h et des longueurs AB et CD.

Un paradoxe de Carroll

Voici deux dispositions possibles des pièces T_1, T_2, U_1, et U_2.

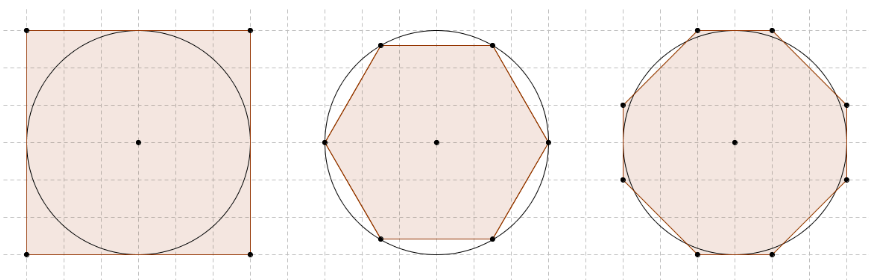


1) Calculer l'aire du carré de gauche et celle du rectangle de droite.

2) Expliquer le phénomène.

Le nombre π

1) La circonférence d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$ et son aire πr^2. À l'aide de l'une ou l'autre de ces formules, déduire de la figure de gauche (resp. du milieu, de droite) une majoration (resp. une minoration, une valeur approchée) de π.



2) À l'aide du dessin ci-contre, expliquer pourquoi c'est bien le même π qui apparaît dans la formule de l'aire et celle de la circonférence.