

La tour de Hanoï

(rittaud@math.univ-paris13.fr)

Première partie : résolution du jeu

1) Résoudre le jeu avec 1, 2, 3, 4 et 5 disques et indiquer, dans chaque cas, le nombre minimal de déplacements nécessaires.

2) Proposer une formule générale exprimant le nombre minimal de déplacements à effectuer en fonction du nombre n de disques.

3) Proposer un algorithme pour un nombre quelconque n de disques.

4) Dédire de cet algorithme une démonstration de la formule proposée en 2.

Deuxième partie : la base deux

Pour écrire un nombre en base deux, on peut s'aider d'un tableau des puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...), comme ici pour le nombre 25 :

	32	16	8	4	2	1
25	0	1	1	0	0	1
reste	25	9	1	1	1	0

Le tableau se lit de gauche à droite de la façon suivante :

- 32 est plus grand que 25, donc on laisse, et il reste toujours 25.
- 16 n'est pas plus grand que 25, donc on enlève 16 à 25, il reste 9.
- 8 n'est pas plus grand que 9, donc on enlève 8, il reste 1.
- 4 est plus grand que 1, donc on laisse, et il reste toujours 1.
- 2 est plus grand que 1, donc on laisse, et il reste toujours 1.
- 1 n'est pas plus grand que 1, donc on l'enlève, et il reste 0.

L'écriture en base deux de 25 est donc 011001 ou, en enlevant le 0 initial (tout comme on le fait en base dix), 11001. On écrit : $[25]_2 = 11001$.

- 1) Donner l'écriture en base deux des vingt premiers entiers.
- 2) Proposer un critère de divisibilité par 2, par 4 et par 3 pour les nombres écrits en base deux.

Troisième partie : codage des états de la tour de Hanoi

- 1) Écrire la liste des états successifs du jeu pour $n = 4$, et coder chaque état par les premiers entiers (à partir de 0) écrits en base deux.
- 2) À quoi correspondent, dans ce codage de chaque état, les déplacements du plus petit disque ? du plus grand disque ? Chercher une généralisation aux autres disques.

Quatrième partie : la variante circulaire

On interdit désormais les mouvements directs de A à C et de C à A.

- 0) Pourquoi cette variante est-elle dite « circulaire » ?
- 1) Résoudre le jeu dans le cas de 1, 2 et 3 disques.
- 2) En s'inspirant de la première partie, déterminer un algorithme de résolution pour n disques ainsi qu'une formule indiquant le nombre d'étapes.
- 3) En s'inspirant des deuxième et troisième parties, établir un lien entre la variante du jeu et la base trois.
- 4) Démontrer que les états successifs décrivent l'ensemble des états admissibles pour le jeu.