Université Paris 13 — Probabilités et Statistiques
L3 Info — Année 2017-2018

FEUILLE 4 : ESTIMATION

Exercice 1. Pour préserver l'anonymat des répondants à un sondage sur la consommation de drogue on demande à chacun de lancer un dé et de répondre oui (même si c'est faux) si le résultat est 1 ou 2 , non (même si c'est faux) si le résultat est 3 ou 4 et de répondre la vérité si le résultat est 5 ou 6. Le résultat du jet du dé reste inconnu des sondeurs.

(1) Déterminer la probabilité q d'obtenir oui d'une personne au sondage en fonction de la proportion des gens qui ont consommé cette drogue.

(2) Quelles sont les bornes pour la probabilité q ?

(3) On obtient 96/200 de oui. Quelle est d'après la méthode des moments l'estimation de la proportion des gens qui ont déjà consommé cette drogue ?

Exercice 2. Soit X le nombre d'arrivées de voitures à un péage sur l'autoroute pendant une minute. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ . Le tableau suivant résume un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de X :

Nombre de voitures par minute	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fréquence	1	15	30	46	38	30	16	13	5	3	2	1

(1) Déterminer un estimateur $\hat{\lambda}_n$ du paramètre λ par la méthode des moments.

(2) Quelle est alors la valeur estimée du paramètre ?

(3) Vérifier que $\hat{\lambda}_n$ converge vers λ presque sûrement.

Exercice 3. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon d'une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p.

(1) Supposons $S = X_1 + \cdots + X_n$, calculer $E(S)$ et $\mathrm{Var}(S)$. Soit $U = \frac{S+\sqrt{n}/2}{n+\sqrt{n}}$ un estimateur de p, est-il sans biais ?

(2) Déterminer un estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}$ de p. Est-il sans biais ?

(3) Calculer les risques quadratiques $R(U)$ et $R(\hat{p})$. Lequel des deux estimateurs choisiriez-vous ?

Exercice 4. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon d'une variable aléatoire X de loi $N(m, \sigma^2)$. Déterminer un estimateur $(\hat{m}, \hat{\sigma^2})$ du maximum de vraisemblance de (m, σ^2). $\hat{m}$ et $\hat{\sigma^2}$ sont-ils sans biais ? Supposons $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ un estimateur de σ^2, est-il sans biais ?

Exercice 5. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de n=20 observations d'une variable aléatoire de la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$, μ inconnu et $\sigma = 2$. Les données suivantes ont été obtenues de l'échantillon : $\sum_{i=1}^{n} X_i = 57$ et $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 251$.

(1) Déterminer une estimation de μ. Quelle est alors la loi de l'estimateur ?

(2) Calculer $P(\bar{X} < \mu - 0,5)$ et $P(\bar{X} > \mu + 0,6)$.

(3) Déterminer un intervalle de confiance pour μ de niveau 95%.

(4) Supposons σ inconnu. Déterminer une estimation de σ^2 et un intervalle de confiance pour μ de niveau 95%.

Exercice 6. Sur un échantillon de 100 personnes, on constate que 60 sont fumeurs. Estimer la proportion des fumeurs dans la population. Déterminer un intervalle de confiance pour la proportion des fumeurs de niveau 95%.

Exercice 7. Un institut de sondage se propose d'estimer les proportions dans une population par les proportions correspondantes dans un échantillon de façon à ce que la marge d'erreur soit au plus de 2/100 et ce 19 fois sur 20 en moyenne. Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon ?