FEUILLE 1 : ÉVÈNEMENTS, ESPACE DE PROBABILITÉ, INDÉPENDANCE

Exercice 1. A, B et C sont trois évènements, exprimer chacun des évènements suivants à l'aide des opérations de complémentation, union et intersection : (a) A seul se produit ; (b) A et B se produisent mais non C ; (c) les trois évènements se produisent ; (d) au moins un des évènements se produit ; (e) au moins deux des évènements se produisent ; (f)un évènement au plus se produit ; (g) aucun des trois évènements ne se produit ; (h) exactement deux évènements se produisent ; (i) pas plus de deux évènements ne se produisent.

Exercice 2. Soit Ω l'ensemble fondamental associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce trois fois. Soit A l'évènement $\ll$ Face apparaît deux fois $\gg$, B l'évènement $\ll$ Face apparaît au moins deux fois $\gg$ et C l'évènement $\ll$ Face apparaît lorsque Pile est apparu au moins une fois $\gg$. Donner les éléments de A, B, C, et décrire $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $A \cap C$.

Exercice 3. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A et B deux évènements.

(1) Calculer $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A \cup \bar{B})$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
(2) Soit C un événement, calculer $P(A \cup B \cup C)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(C \cap B)$ et $P(A \cap B \cap C)$.

Exercice 4. Les coefficients a, b, c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont déterminés en lançant trois fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité que les racines soient réelles ? Complexes non réelles ?

Exercice 5. On lance 3 fois une pièce de monnaie équilibrée, on suppose que les 3 lancers sont indépendants. On considère les 2 évènements suivants : A : $\ll$ le premier jet donne une pile $\gg$, B : $\ll$ on obtient au moins 2 piles $\gg$. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 6. Un questionnaire comprend 4 questions pour chacune desquelles on propose 5 réponses dont une seule est exacte. Si on décide de répondre au hasard et que le choix des réponses se fait de façon indépendante. Calculer la probabilité d'obtenir k réponses exactes, k=0,1,2,3,4.

Exercice 7. On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 . U_1 contient 3 boules blanches et 5 boules rouges. U_2 contient 1 boule blanche et 6 boules rouges. U_3 contient 7 boules blanches et 2 rouges. On choisit au hasard l'une des urnes et on tire une boule dans l'urne choisie. Quelle est alors la probabilité que la boule soit rouge ?

Exercice 8. Un antivirus assure avec une fiabilité de $a = 95\%$ la détection d'un malware M lorsqu'il est effectivement présent. Cependant, le test indique aussi un résultat faussement positif pour $b = 1\%$ des systèmes réellement sains à qui on l'applique. On suppose qu'une proportion $p = 0.5\%$ des systèmes ont le malware M.

(1) Déterminer la probabilité qu'un système soit vraiment atteint sachant qu'il a un test positif ?
(2) Déterminer la probabilité qu'un système ne soit pas infecté alors que le test est négatif.

Exercice 9. Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives 1,2,..., n,... On suppose que les sauts sont indépendants et que la probabilité de succès à la hauteur n est égale à 1/n. Le sauteur est éliminé à son premier échec. Soit X la hauteur du dernier saut réussi. Pour tout n, calculer la probabilité p_n de l'événement $\ll X = n \gg$. Vérifier que $\sum_{n \geq 1} p_n = 1$.