Université Paris 13 — Probabilités et Statistiques
L3 Info — Année 2016-2017

FEUILLE 3 : VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

Exercice 1. Soit X une v. a. de densité

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x - \theta + 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où θ est un paramètre dans [0,1]. Vérifier que f est une densité de probabilité. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2. Soit F une fonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x/4 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -x^2/4 + x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

F est-elle la fonction de répartition d'une v. a. ? Si oui, calculer sa densité et son espérance.

Exercice 3. Un appareil comporte 6 lampes nécessaires à son fonctionnement. La densité de la loi de la durée de vie d'une lampe est donnée par : $f(t) = \frac{1}{16} t \exp(-t/4)$.

– Vérifier que f est une densité de probabilité. Calculer l'espérance et la variance de la durée de vie d'une lampe.
– Quelle est alors la probabilité que l'appareil fonctionne de façon continue pendant 6 ans à partir de sa mise en marche ?

Exercice 4. Soit X une variable uniforme sur $[-1, 1]$ et $Y = X^2$. Déterminer la densité $f_Y(y)$ de Y. Déterminer l'espérance et la variance de Y à partir de la densité f_Y de Y et à partir de la densité f_X de X.

Exercice 5. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(U)$. Déterminer la fonction de répartition F_X et la densité de probabilité de la variable aléatoire X. Quelle est la loi de X ? Donner les valeurs de $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 6. Soit X une v. a. à valeurs dans $]1, \infty[$ telle que $\forall x \in]1, \infty[$, $P(X \geq x) = x^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Déterminer la fonction de répartition de X. X admet-elle une densité ? Calculer la fonction de densité si elle existe. Dans quelle condition X est-elle intégrable ? Dans quelle condition X est-elle carré-intégrable ? Calculer alors $Var(X)$.

Exercice 7. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité f définie par : $f(x, y) = e^{-x-y}$ si $x, y \geq 0$, et $f(x, y) = 0$ sinon.

1- Déterminer les densités de X et Y.
2- Les variables aléatoire X et Y sont-elles indépendantes ?
3- Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$,$E(X^2)$ et $E(X^2Y)$.

Exercice 8. Soit D le disque de centre $(0,0)$ et de rayon $r > 0$. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est la loi uniforme sur D.
1- Déterminer les lois marginales de X et Y. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
2- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3- Calculer $E(XY)$, $Cov(X,Y)$. X et Y sont-elles non-corrélées ?
4- Soit $Z = X^2 + Y^2$, calculer la fonction de répartition et la densité de Z.
5- Calculer $E(Z)$. En déduire $E(X^2)$, $E(Y^2)$, $Var(X)$ et $Var(Y)$.

Exercice 9. Soit $(X_1, ..., X_n)$, n variables indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la fonction de répartition et la densité de $\min(X_1, ..., X_n)$.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. On note $Y = \frac{X^2}{2}$. Déterminer la fonction de répartition de Y et sa densité.

Exercice 11. On suppose que la température (moyenne) du mois de janvier à Bordeaux suit une loi normale de moyenne 3,7 degrés et d'écart type 1,8 degrés. On suppose que les températures des mois de janvier à Bordeaux de différentes années sont indépendantes.
1- Quelle est la loi de la moyenne des températures sur 5 années consécutives ?
2- Quelle est la probabilité que cette moyenne sur 5 ans dépasse 5 degrés ?
3- Quelle est la probabilité que 5 années de suite la température dépasse 5 degrés ? Quelle est la probabilité que sur 20 années la température ne dépasse jamais 5 degrés ?

Exercice 12. Soit X une v. a. de loi normale centrée et réduite et $Y = XU$, où U une v. a. indépendante de X, telle que $P(U = 1) = P(U = -1)$.
1- Montrer que Y est gaussien.
2- Montrer que X et Y sont non-corrélés.
3- Démontrer que X et Y ne sont pas indépendants.
4- X et Y sont-ils gaussiens dans leur ensemble ? Pourquoi ?

Exercice 13. Soit $(X_1, ..., X_n)$ une famille de variables aléatoires iid de loi $N(m, \sigma^2)$, avec $m = 500$, $\sigma = 6$ et $n = 25$.
(1) Quelle est la loi de $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$?
(2) Calculer $P(498 < \bar{X} < 502)$ et $P(495 < \bar{X} < 505)$.
(3) Déterminer un intervalle $[a,b]$ centré en la moyenne de $\bar{X}$ tel que $P(\bar{X} \in [a,b]) = 95\%$.
(4) Quelle est la loi de $T = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma})^2$?
(5) Déterminer un intervalle $[k_1, k_2]$ tel que $P(T \in [k_1, k_2]) = 95\%$.
(6) En déduire un intervalle qui contient $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ avec la probabilité 95%.

Exercice 14. Combien de fois faut-il jeter une pièce équilibrée pour que la proportion de piles obtenues reste dans l'intervalle [0,49, 0,51] avec la probabilité au moins égale à 0,95 ?
1- A l'aide de l'inégalité de Tchebychev.
2- A l'aide du théorème de centrale limite.