

FEUILLE 4 : ESTIMATION

Exercice 1 Soit X le nombre d'arrivées de voitures à un péage sur l'autoroute pendant une minute. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ . Le tableau suivant résume un échantillon (X_1, \dots, X_n) de X :

Débit en voitures par minute	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fréquences observées	1	15	30	46	38	30	16	13	5	3	2	1

Déterminer un estimateur $\hat{\lambda}_n$ du paramètre λ par la méthode des moments. Quelle est alors la valeur estimée du paramètre ? Démontrer que $\hat{\lambda}_n$ converge vers λ presque sûrement.

Exercice 2 Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon d'une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p .

- Supposons $S = X_1 + \dots + X_n$, calculer $E(S)$ et $Var(S)$. Soit $U = \frac{S + \sqrt{n}/2}{n + \sqrt{n}}$ un estimateur de p . Est-il sans biais ?
- Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance \hat{p} de p . Est-il sans biais ?
- Calculer les risques quadratiques $R(U)$ et $R(\hat{p})$. Lequel des deux estimateurs choisiriez-vous ?

Exercice 3 Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de la loi de Poisson de paramètre p inconnu. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de p . Est-il sans biais ? Etudier son efficacité.

Exercice 4 (X_1, \dots, X_n) est un échantillon de loi $N(m, \sigma^2)$. Soit $(\hat{m}, \hat{\sigma}^2)$ l'estimateur du maximum de vraisemblance. \hat{m} et $\hat{\sigma}^2$ sont-ils sans biais ? Soit $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ un estimateur de σ^2 . Est-il sans biais ?

Exercice 5 Pour déterminer la concentration d'un certain produit dans une solution on effectue des dosages à l'aide d'une technique expérimentale donnée. On admet que le résultat de chaque dosage suit la loi $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0,05$ grammes. On effectue 6 dosages : 2,97; 3,01 ; 2,98 ; 2,94; 3,03; 2,95 grammes/litre. Déterminer une estimation de μ . Donner un intervalle de confiance pour μ de niveau 95%. Même question en supposant σ inconnu.

Exercice 6 Sur un échantillon de 100 personnes, on constate que 60 sont fumeurs. Estimer la vraie proportion des fumeurs. Déterminer un intervalle de confiance pour la proportion des fumeurs au risque de 5%.

Exercice 7 Une maison de sondages se propose d'estimer des proportions dans une population par les proportions correspondantes dans un échantillon de façon à ce que la marge d'erreur soit au plus de 2/100 et ce 19 fois sur 20 en moyenne. Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon ?