Kit de survie sur les séries entières

Définition 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La *série entière* associée à la suite (a_n) est la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, où $x \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

La *fonction somme* de la série entière est la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Elle est définie en tout x tel que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge.

Exemple 1. Premiers exemples.

1. Si $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ et pour tout $n \geq 3$, $a_n = 0$, la série entière converge toujours et sa fonction somme f_1 est simplement la fonction polynomiale, définie sur $\mathbb{R}$,
$$f_1(x) = 1 + 2x - x^2$$
2. La série entière $\sum_{n\geq 0} n!x^n$ ne converge pour aucun réel x sauf 0 (vous pouvez utiliser le critère de d'Alembert pour le démontrer). Sa fonction somme n'est définie qu'en 0 (où elle vaut $0! = 1$).
3. La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x. Sa fonction somme est la fonction exponentielle. Formule à connaître impérativement !
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$
4. La série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge pour $x \in \left]-1\,;1\right[$ et diverge ailleurs. Formule à connaître impérativement !
$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n.$$

Définition 2. Le *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ est défini par

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \sum_{n\geq 1} a_n r^n \text{ converge} \right\} = \sup\left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0 \right\}.$$

Proposition 1. *Si $|x| > R$, alors la série entière diverge en x. Si $|x| < R$, alors la série entière converge en x. Si $|x| = R$, on ne peut rien dire a priori (il peut y avoir convergence ou divergence).*

Exemple 2. Dans l'exemple précédent, on a d'abord $R = \infty$, puis $R = 0$, $R = \infty$ et enfin $R = 1$.

Proposition 2. *Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est infiniment dérivable et « primitivable »sur $\left]-R\,;R\right[$ et on a :*

1. $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$
2. $f''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$
3. *pour tout entier $k \geq 1$,*
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)...(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n\geq 0} (n+1)(n+2)...(n+k) a_{n+k} x^n$$
4. *Si F désigne la primitive de f nulle en 0,*
$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

5. *Toutes ces séries entières ont le même rayon de convergence que la série de départ.*

Exemple 3. Calcul de $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$.

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n \overset{(n'=n-1)}{=} \sum_{n'\geq 0} \frac{1}{n'+1} x^{n'+1} \overset{(n=n')}{=} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

donc f est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ qui s'annule en 0, le rayon de convergence de la série entière est 1 et

$$\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n.$$

Remarquons au passage que pour $x = 1$, la série entière diverge et pour $x = -1$ la série est alternée et converge selon son critère, ce qui montre qu'il peut y avoir ou non convergence lorsque $|x| = R$. Dernière remarque pour les plus matheux : par le théorème de convergence radiale d'Abel on a en fait

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} (-1)^n = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(1-x) = \ln(2).$$

Définition 3. Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire à valeurs entières positives. La fonction génératrice de X est la fonction somme

$$g_X(x) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = n)\, x^n.$$

Remarque 1. Cette fonction est toujours définie en 1 et continue à gauche en 1 par le théorème de convergence radiale d'Abel.

$$g_X(1) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

En particulier le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1.

Proposition 3. *Avec les mêmes notations que précédemment :*

1. *On peut toujours calculer l'espérance :*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(X = n) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g'_X(x).$$

2. *Si* $\mathbb{E}[X] < \infty$,

$$\mathrm{Var}(X) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g''_X(x) + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Remarque 2. Le plus souvent, g' et g'' sont définies et continues en 1, on peut donc remplacer $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g'_X(x)$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g''_X(x)$ respectivement par $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$.

Exemple 4. Vous devez savoir vous-mêmes démontrer tous ces résultats.

1. Si $X \sim$ Bernoulli(p), avec $p \in [0\,;1]$ et $q = 1-p$, alors $g_X(x) = q+px$, $\mathbb{E}[X] = p$ et $\mathrm{Var}(X) = pq$.
2. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, avec n entier naturel non nul, $p \in [0\,;1]$ et $q = 1-p$, alors $g_X(x) = (px+q)^n$, $\mathbb{E}[X] = np$ et $\mathrm{Var}(X) = npq$.
   Indice : utiliser la formule du binôme de Newton à connaître absolument

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, avec $p \in]0\,;1[$ alors $g_X(x) = \frac{p}{q}\frac{1}{1-qx}$, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$.
4. Si $X \sim$ Poisson(λ), avec $\lambda > 0$, alors $g_X(x) = e^{\lambda(x-1)}$, $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.