# EPREUVE

Durée de l'épreuve : **3 heures**.
Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est autorisée.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

## Exercice 1 — 6 points

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement et avec remise $n$ boules (on remet la boule tirée dans l'urne après chaque tirage). On suppose que les tirages sont aléatoires et indépendants. Soit $X_i$ le numéro de la i$^{\text{ème}}$ boule tirée.

1. Quelle est la loi de $X_i$, pour $1 \leq i \leq n$ ?
2. Calculer $E(X_i)$ et $\mathrm{Var}(X_i)$, pour $1 \leq i \leq n$.
3. Soit $Z = \max(X_1, X_2)$. Déterminer la loi de $Z$. (Indication : déterminer les valeurs possibles de $X_1$ et $X_2$ telles que $Z = k$, pour $k = 1, 2$ ou 3.) Calculer $E(Z)$.
4. Soit $\bar{X} = (X_1 + ... + X_n)/n$. Calculer $E(\bar{X})$ et $\mathrm{Var}(\bar{X})$.
5. Quelle loi continue peut-on utiliser pour approcher la loi de $\bar{X}$ si $n$ est suffisamment grand ? (Préciser les paramètres de la loi.)
6. En déduire les probabilités $P(\bar{X} \leq 2,16)$ et $P(1,84 \leq \bar{X} \leq 2,16)$ pour $n = 100$.

## Exercice 2 — 4 points

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ définie par : $f(x) = \begin{cases} ax^{-\lambda} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, avec $\lambda > 1$.

1. Déterminer la valeur de $a$ en fonction de $\lambda$.
2. Déterminer la fonction de répartition de $X$.
3. Quelles sont les valeurs de $\lambda$ pour que $Var(X)$ existe ? Calculer alors $E(X)$ et $Var(X)$.

## Exercice 3 — 6 points

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires de densité définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-2y} & \text{si } x \in [0, 2] \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Justifier par un calcul que $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre 2 et que la fonction $f_X$ suivante est une densité de $X$ : $f_X(x) = x/2$ si $x \in [0, 2]$, et 0 sinon.
2. Justifier que $X$ et $Y$ sont indépendantes.
3. Calculer $P(X > 1)$, $P(X < 1,\ Y > 2)$.
4. Calculer $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
5. Calculer $E(XY)$ et $E(XY^2)$.

## Exercice 4 — 4 points

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon d'une variable aléatoire de loi $N(m, \sigma^2)$, $n = 9$, les paramètres $m$ et $\sigma^2$ sont inconnus.

1. Quelle est la loi de $\bar{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$ ? (Préciser les paramètres de la loi.)
2. Supposons que les données de l'échantillon sont :

$$2,62 \ ; \ 4.78 \ ; \ 1.48 \ ; \ 0.20 \ ; \ 0.16 \ ; \ 3.98 \ ; \ 2.65 \ ; \ 2.61 \ ; \ 5.84 \ .$$

$$[\text{Simplification de calcul : } \sum_{i=1}^{n} X_i = 24,32; \quad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 95,7494 \ .]$$

Déterminer une estimation de $m$ et de $\sigma^2$. Les estimateurs sont-ils sans biais ? Calculer le biais et la variance de l'estimateur de $m$. Quelle est la loi de l'estimateur de $m$ ?