Séries entières et développements limités

Minimum vital, et même un peu moins

4 novembre 2016

1 Séries

Commençons par essayer de donner un sens à l'égalité suivante

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^k} + ... = 1.$$

En étant plus rigoureux, cela s'écrit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^n} = 1.$$

On se souvient (minimum vital !) de la formule suivante, apprise au lycée (qu'on peu démontrer par récurrence) :

Proposition 1. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* q*, avec* $q \neq 1$*, alors*

$$\sum_{k=n_0}^{N} u_k = \frac{u_{n_0} - u_{N+1}}{1-q}.$$

Ici, la raison est $\frac{1}{2}$ le premier terme est $\frac{1}{2}$ et le premier terme non pris en compte est $\frac{1}{2^{n+1}}$, cela donne

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Par ailleurs, on sait depuis le lycée :

Proposition 2. *Soit* q *un nombre réel.*

1. *Si* $|q| < 1$*, alors* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.
2. *Si* $q > 1$*, alors* $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Dans notre cas, $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, donc $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et finalement,

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\ \infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1,$$

ce qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

On dit alors que la *série de terme général* $\frac{1}{2^k}$ est *convergente*, de somme 1. Plus généralement,

Proposition 3. *Soit* q *un nombre réel tel que* $|q| < 1$*. La série de terme général* q^k *est convergente, de somme*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}.$$

Donnons d'autres exemples.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} k = \infty$. On dit que cette série est *divergente*.
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Vous pouvez l'admettre, cela se démontre par comparaison avec une intégrale. En tout cas cela montre *qu'il ne suffit pas que le terme général tende vers 0 pour que la série converge.*
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Très jolie formule, non ? (N'essayez pas de la démontrer)

2 Développements limités

L'idée est de donner une approximation d'une fonction (plus ou moins compliquée) par un polynôme.

En voici un premier exemple, pas encore rigoureux, d'un développement limité à l'ordre 3.

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3, \quad \text{quand } x \text{ est « proche de 0 ».}$$

Ci-dessous (figure 1) la courbe de la fonction sin et celle de la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{6}x^3$. Pour rendre ceci rigoureux, on écrit plutôt

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon\left(x\right), \quad \text{où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ce qui signifie vraiment que ce qui n'est pas écrit dans le développement est « négligeable par rapport à x^3 ». Comme, à la longue, on est fatigué de toujours écrire des fonctions ε, on utilise la notation « petit o » de Landau :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

qui signifie exactement la même chose.

Le calcul de développements limités est une technique à part entière qui demande beaucoup d'entraînement.

Pour un minimum vital, on se contentera de la formule de Taylor en 0 que je vais tenter d'expliquer avec les doigts.

Considérons une fonction f définie sur un voisinage de 0. On cherche à approcher cette fonction par des polynômes.

Le niveau 0 de cette approximation est de dire : « si x est très proche de 0, alors $f(x)$ est très proche de $f(0)$ ». C'est en effet vrai *si la fonction f est continue en* 0. On obtient le développement limité suivant :

$$f(x) = f(0) + o\left(1\right),$$

où la notation $o\left(1\right)$ signifie « une fonction qui tend vers 0 en 0 ». C'est déjà bien, et suffisant dans beaucoup de cas mais pas dans tous les cas, notamment lorsque la fonction f vaut déjà 0 en 0.

Pour faire mieux, on peut voir, en utilisant la définition du nombre dérivé, que *si f est dérivable en* 0,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x).$$

C'est la formule de Taylor-Young, à l'ordre 1.

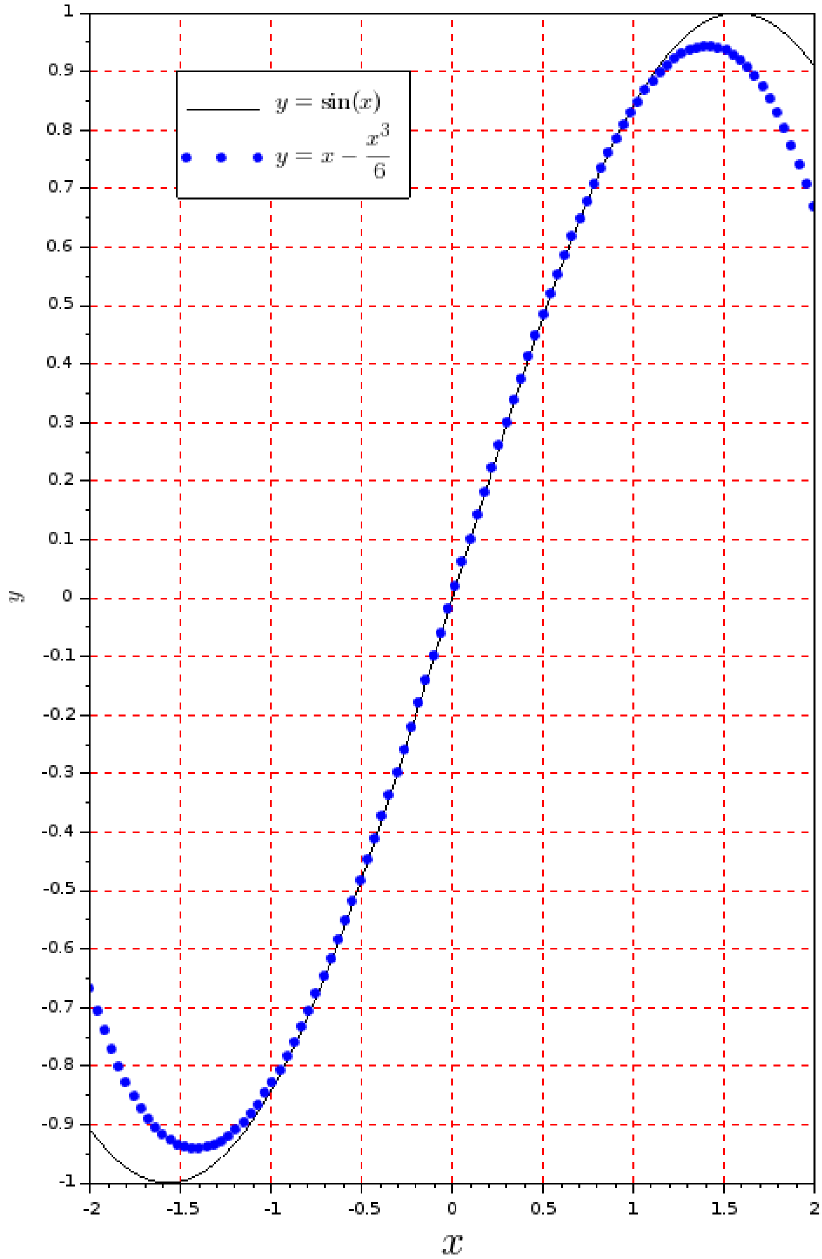

FIGURE 1 – la fonction sin et son développement limité en 0 l'ordre 3

Si l'on applique cette formule à la fonction sin, par exemple, on obtient ($\sin'(0) = \cos(0) = 1$)

$$\sin(x) = x + o(x).$$

Est-ce qu'on peut continuer ? Oui, si f est dérivable sur un voisinage de 0 et *deux fois dérivable en* 0, alors

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o\left(x^2\right)$$

C'est la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Si f est deux fois dérivable sur un voisinage de 0, et trois fois dérivable en 0, on peut encore gagner en précision :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f^{(3)}(0) + o\left(x^3\right)$$

Appliquons cette formule à la fonction sin (qui est dérivable autant qu'on veut). On sait que $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$ et $\sin^{(3)} = -\cos$, donc $\sin''(0) = 0$ et $\sin^{(3)}(0) = -1$. On retrouve bien la formule donnée précédemment.

En général, on a :

Proposition 4 (formule de Taylour-Young en 0)**.** *Soit f une fonction dérivable $n-1$ fois sur un voisinage de* 0 *et dérivable n fois en* 0*. Alors,*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o\left(x^n\right)$$

Autre exemple avec la fonction exponentielle, à tout ordre $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

3 Séries entières

On peut voir une série entière comme un « développement limité infini en 0 ».

Voyons un premier exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{1}$$

Ce n'est rien d'autre qu'une fonction définie par une série. Il n'est pas complètement évident de voir que cette formule est vrai et que la série converge pour tout x. Il faudrait pour cela un cours, même élémentaire, sur les séries.

Un autre exemple, d'égale importance est celui déjà vu de la série géométrique. En langage « série entière », cela donne :

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[, \quad 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{2}$$

Nous sommes maintenant prêts à donner une définition plus précise :

Définition 5. Soit (u_n) une suite de nombres réels. La série entière de terme général (u_n) est la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} u_n x^n,$$

qui est définie là où le terme de droite à un sens (c'est-à-dire converge).

Pour préciser le domaine de définition de la série entière nous avons besoin d'admettre le résultat qui suit.

Proposition 6. *Soit* (u_n) *une suite de réels. Il existe un nombre* $R \in [0\,;\infty]$*, tel que,*

$$\forall r \in [0\,;R[,\quad \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\, r^k < \infty$$

et

$$\forall r > R,\quad \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\, r^k = \infty.$$

Définition 7. Ce réel R s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière de terme général (u_n).

Ainsi une série entière de rayon de convergence R est toujours définie au moins sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

Exemple 8. Le rayon de convergence du développement en série de la fonction exponentielle est $+\infty$. Cela signifie que la formule 1 est toujours valable.

Le rayon de convergence de la série géométrique (formule 2) est 1, cela signifie que cette formule est valable au moins sur $]-1\,;1[$.

Pour finir, un point important, on peut dériver et « primitiver » autant qu'on veut une série entière dans son intervalle de convergence.

Théorème 9. *Soit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$$

une série entière de rayon de convergence $R > 0$*. Alors* f *est dérivable sur* $]-R\,;R[$*, sa dérivée est encore développable en série entière, avec le même rayon de convergence* R*, et*

$$\forall x \in\,]-R\,;R[,\quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k k x^{k-1}.$$

De plus, la primitive F *de* f *qui s'annule* 0 *admet également un développement en série entière avec même rayon de convergence* R *et l'on a :*

$$\forall x \in\,]-R\,;R[,\quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Les formules ci-dessus se retrouvent en dérivant (respectivement en « primitivant ») *terme à terme* la série entière de x.

Exemple 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!} = \exp'(x) = \exp(x).$$

On obtient aussi, en primitivant cette fois :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)k!} = e^x - 1.$$

4 Corrigé de l'exercice 3 de la feuille 2

Énoncé :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n > 0$, on ait $P(X = n-1) = \frac{1}{4} n P(X = n)$. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance. Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Corrigé :

Soit $\alpha = P(X = 0)$. En réécrivant la formule donnée dans l'énoncé, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n+1) = \frac{4}{n+1} P(X = n).$$

En appliquant cette formule pour $n = 0, 1, \ldots, k-1$, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{4}{k} \times \frac{4}{k-1} \times \ldots \times \frac{4}{1} P(X = 0) = \frac{4^k}{k!}\alpha.$$

On peut maintenant trouver la valeur de α :

$$1 = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \frac{4^k}{k!} = \alpha \frac{4^k}{k!}$$

Or, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Donc,

$$\alpha \times e^4 = 1$$
$$\alpha = \frac{1}{e^4} = e^{-4}$$

Finalement, la loi de X est déterminée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-4} \frac{4^k}{k!}.$$

Par définition, X suit la loi de Poisson de paramètre 4. D'après le cours, son espérance est 4 et sa variance vaut également 4.

Nous allons le redémontrer par le calcul.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-4} \frac{4^k}{k!} = 4e^{-4} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{4^{k-1}}{k!}.$$

Comme, d'après le théorème de dérivation des séries entières,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!},$$

et, bien sûr $\exp' = \exp$, on trouve que

$$E[X] = 4e^{-4} \exp'(4) = 4e^{-4} e^4 = 4 \times e^0 = 4.$$

Passons à la variance. On veut calculer

$$E\left[X^2\right] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4} k^2 \frac{4^k}{k!}.$$

Une possibilité est d'utiliser une deuxième fois la dérivation des séries entières. On a la formule suivante :

$$\exp(x) = \exp''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{4^{k-2}}{k!}.$$

Pour pouvoir utiliser cette formule, on commence par soustraire l'espérance de X puis on remarque que le terme de rang 1 vaut 0 :

$$E\left[X^2\right] = \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-4}\left(k^2-k\right)\frac{4^k}{k!}\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-4}\frac{4^k}{k!}\right) = 16e^{-4}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(k-1\right)\frac{4^{k-2}}{k!} + E\left[X\right].$$

Finalement,

$$E\left[X^2\right] = 16e^{-4}e^4 + 4 = 20$$

et enfin,

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 = 20 - 16 = 4.$$

Pour finir, calculons $E\left[\frac{1}{X+1}\right]$. Par définition,

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} e^{-4}\frac{4^k}{k!}.$$

On veut utiliser la formule de primitivation des séries entières qui donne ici :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{k!},$$

car la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est la primitive de exp qui s'annule en 0. En faisant les factorisations nécessaires pour utiliser cette formule, on trouve,

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{e^{-4}}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\frac{4^{k+1}}{k!} = \frac{e^{-4}}{4}\left(e^4 - 1\right) = \frac{1-e^{-4}}{4}.$$

5 Espérance de la loi géométrique

Soit $p \in \left]0\,;1\right[$ et soit T une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. On a par définition

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(T = k\right) = p\left(1-p\right)^{k-1}.$$

On peut commencer par vérifier que

$$P\left(T=1\right) + P\left(T=2\right) + \ldots + P\left(T=k\right) + \ldots = 1$$

En effet, en changeant d'indice puis en utilisant la série géométrique,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p\left(1-p\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p\left(1-p\right)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-p\right)^k = p \times \frac{1}{1-\left(1-p\right)} = 1.$$

Calculons l'espérance de T :

$$E[T] = \sum_{k=1}^{\infty} kp (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1}.$$

La dérivation du développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = (1-x)^{-2},$$

donc l'espérance de T vaut :

$$E[T] = p \times (1-(1-p))^2 = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$